

乐学七中

高中数学二轮专题复习

策划 许 勇

主编 廖学军

编委 康 华 江海兵 郑 严 王 华

高 峥 张祥艳 廖学军 许 勇

何毅章 郑勇军 殷晓婷 邹安宇

杜晓雯 郭 红



电子科技大学出版社

前言

→ → → → → → → → → → → → → → → →

成都七中的数学教学一直坚持发挥学生的主体作用. 孔子有云:知之者不如好之者,好之者不如乐之者.“乐学”是七中教师对学生主体更加积极的期许状态,学生的这一状态并非一蹴而就,而是需要耐心引导的.发现问题并解决问题所带来的成就感往往是学生“乐学”的内在动因,而数学教育中“怎样解题”则成为教师引导的关键所在.为了构建和完善“怎样解题”的引导平台,教辅用书的选择和使用贯穿了整个高中数学教学过程.

成都七中数学组对新课程高中数学教学进行了系统的反思和研究,形成了独特而完备的指导思想.为了将集体智慧渗透到学校的常规教学中,并进一步提高教学工作的有效性,由成都七中名优教师牵头,依托学校丰富的教育教学资源,在七中数学组教师群策群力下,共同编写了《乐学七中》系列的高一、高二的教辅同步用书和高三零诊、一轮复习资料.已编部分很好地满足了七中教育集团广大师生的日常教学需要,同时也得到了很多中肯的建议.在此基础上,七中数学组教师不断提高编撰水平,加强审阅力度,完善原有的不足,继续编写了《乐学七中》系列的二轮复习资料.这本复习资料突出了以下特点:

1. 章节排布与实际教学进度同步,为教师的课堂教学与作业布置带来了便利,增加了该书的可操作性.

2. “考纲要求”简要地说明了我省教育考试院颁布的《考试说明》中的考点和考试要求.

3. “知识梳理、规律总结”是对一轮复习的补充和强调,言简意赅、点到为止,为教师讲解,学生冥思留下空间.

4. “典型例题”是从最新的高考题和各地的诊断考试题中选择具有典型性、综合性和示范性特点的题目作例题或变式题.为了保证课堂训练的针对性和有效性,强调一讲一练,所选题目既能体现知识的内涵和外延,也能兼顾方法的呈现和过手.

5. “备选例题”一方面可作为教师授课的后备题库,另一方面也为学有余力者的拓展训练抛砖引玉.

6. “练习”遵循“紧扣考纲、难度适中、梯度呈现”的原则.

7. “模拟题”是全面把握我省 2015 年高考的最新考试信息及动态的情况下科学命制的,对 2015 年高考有一定前瞻预测性.

基于此,《乐学七中高中数学二轮专题复习》作为高三第二阶段的一本复习辅导用书,有其独特的优势和推广价值.热忱欢迎兄弟学校师生参考或使用该书.

由于编写时间紧,该书难免存在一些不足,恳请广大师生批评指正,以便今后修订时更加完善.

编者

2014 年 9 月

目 录

→ → → → → → → → → → → → → → →

专题一 不等式、函数与导数

- § 1.1 函数、基本初等函数的图象及性质 (1)
- § 1.2 函数与方程及函数的应用 (5)
- § 1.3 不等式及线性规划 (8)
- § 1.4 导数及其应用(1) (11)
- § 1.5 导数及其应用(2) (17)

专题二 三角函数与平面向量

- § 2.1 三角函数的图象与性质 (25)
- § 2.2 三角变换与解三角形 (30)
- § 2.3 平面向量 (34)

专题三 数列、推理与证明

- § 3.1 等差数列、等比数列 (37)
- § 3.2 数列求和及数列的综合应用 (42)
- § 3.3 推理与证明 (47)

专题四 立体几何

- § 4.1 空间几何体 (52)
- § 4.2 空间中的平行与垂直 (59)
- § 4.3 立体几何中的热点问题 (66)

专题五 解析几何

- § 5.1 直线与圆 (75)
- § 5.2 椭圆、双曲线、抛物线 (79)
- § 5.3 圆锥曲线中的热点问题(1) (84)
- § 5.4 圆锥曲线中的热点问题(2) (89)

专题六 概率与统计、复数、算法

- § 6.1 排列与组合、二项式定理(理科专用)
..... (95)
- § 6.2 概率(文科专用) (98)
- § 6.3 概率、统计、随机变量及其分布列(理科专用)
..... (102)
- § 6.4 统计 (106)

- § 6.5 算法与复数 (113)

专题七 数学解题技巧

- § 7.1 选择题的解题技巧 (117)
- § 7.2 填空题的解题技巧 (121)
- § 7.3 解答题的解题技巧(理科专用) (124)
- § 7.4 解答题的解题技巧(文科专用) (138)

专题八 数学思想方法

- § 8.1 函数与方程思想 (150)
- § 8.2 数形结合思想 (154)
- § 8.3 分类讨论思想 (157)
- § 8.4 转化与化归思想 (161)

专题九 回归教材

- § 9.1 教材回归专题训练(1) (164)
- § 9.2 教材回归专题训练(2) (167)
- § 9.3 教材回归专题训练(3) (171)

专题十 易错知识点、易错题汇编

- § 10.1 高考数学中的易错知识点和易错试题
汇编(1) (174)
- § 10.2 高考数学中的易错知识点和易错试题
汇编(2) (179)
- § 10.3 高考数学中的易错知识点和易错试题
汇编(3) (184)

专题十一 创新题型

- § 11.1 创新题型(1) (189)
- § 11.2 创新题型(2) (193)

模拟题

- 2015 年高考数学模拟题(1) (196)
- 2015 年高考数学模拟题(2) (202)

- 参考答案 (206)



专 题 一

不等式、函数与导数

§ 1.1 函数、基本初等函数的图象及性质

一、考纲要求

A 层次:映射,奇偶性,实数指数幂的意义,换底公式,指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数($a>0$ 且 $a\neq 1$),幂函数的概念,幂函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象

B 层次:单调性与最大(小)值,有理指数幂的含义,指数函数的概念、图象及其性质,对数的概念及其运算性质,对数函数的概念、图象及其性质

C 层次:函数的概念与表示,幂的运算

二、知识梳理,规律总结

1. 函数的定义域

2. 复合函数

指形如 $y=f[g(x)]$ 的函数,其中 $u=g(x)$ 称为内函数, $y=f(u)$ 称为外函数,而 u 常被称为中间变量.

3. 函数的单调性

一般地,设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量 x_1, x_2 ,当 $x_1 < x_2$,都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$),那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增(减)函数,也可以说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有(严格的)单调性. 区间 D 叫做 $f(x)$ 的单调区间.

4. 函数的最值

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I . 如果存在实数 M 满足:①对于任意 $x \in I$,都有 $f(x) \leq M$;②存在 $x_0 \in I$,使得 $f(x_0) = M$,则称 M 为 $f(x)$ 的最大值. 类似地,如果存在实数 m 满足:①对于任意 $x \in I$,都有 $f(x) \geq m$;②存在 $x_0 \in I$,使得 $f(x_0) = m$,则称 m 为 $f(x)$ 的最小值.

5. 函数周期性的常见结论

设 $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$,注意理解以下命题:

(1)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(x)$,则 $f(x)$ 是以 $2a$ 为一个周期的周期函数.

(2)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$,则 $f(x)$ 是以

$2a$ 为一个周期的周期函数.

(3)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$,则 $f(x)$ 是以 $2a$ 为一个周期的周期函数.

(4)若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$,则 $f(x)$ 是以 $2a$ 为一个周期的周期函数.

(5)若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,则 $f(x)$ 是以 $2(a-b)$ 为一个周期的周期函数.

(6)若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = -f(a-x), f(b+x) = -f(b-x)$,则 $f(x)$ 是以 $2(a-b)$ 为一个周期的周期函数.

(7)若函数 $f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = -f(b-x)$,则 $f(x)$ 是以 $4(a-b)$ 为一个周期的周期函数.

6. 对称问题

要注意曲线自身的对称性与曲线之间的对称性的区别、曲线自身的对称性与周期性之间的区别、曲线之间的对称性与曲线平移之间的区别.

(1)函数自身的对称性:除了掌握奇函数和偶函数的对称性外,还应该熟悉下列关于对称性和周期性的结论(你能推导下列结论吗?)

① $y=f(x)$ 满足 $f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$: $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称

② $y=f(x)$ 满足 $f(x-a) = f(x+a) \Leftrightarrow f(2a+x) = f(x)$: $y=f(x)$ 以 $2a$ 为一个周期

③ $y=f(x)$ 满足 $f(a+x) = -f(a-x) \Leftrightarrow f(2a-x) = -f(x)$: $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 对称

(2)函数图象之间的对称与平移(你能推导下列结论吗?)

① $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$:关于直线 $x=0$ 对称;

② $y=f(a-x)$ 与 $y=f(x-a)$:关于直线 $x=a$ 对称;

③ $y=f(x-a)$ 与 $y=f(x+a)$: $y=f(x-a)$ 的图象是由 $y=f(x+a)$ 的图象沿水平方向向右($a>0$)或向左($a<0$)平移 $2|a|$ 个单位而得.



三、典型例题

例1 设 $p: x^2 - x - 20 > 0$, $q: 1 - x^2 < 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

变式1 条件 $p: y = \lg(x^2 + 2x - 3)$ 有意义, 条件 $q: 5x - 6 > x^2$, 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

例2 若直角坐标平面内, A, B 两点满足条件: ①点 A, B 都在函数 $f(x)$ 图象上; ②点 A, B 关于原点对称, 则称点对 (A, B) 是函数 $f(x)$ 的一个“姐妹点对”(点对 (A, B) 与点 (B, A) 可看作同一个“姐妹对”).

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x (x < 0), \\ \frac{2}{e^x} (x \geq 0), \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的“姐妹点对”的个数为_____.

变式2 对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 有下述命题:

- ①若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x-1)$ 的图象关于点 $A(1, 0)$ 对称;
- ②若函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $f(x)$ 为偶函数;
- ③若对 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x-1) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 的周期为 2;
- ④函数 $y = f(x-1)$ 与 $y = f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

其中正确命题的序号是_____.

例3 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ①对任意 $x, y \in (-1, 1)$ 都有: $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$; ②当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0$, 回答下列问题.

- (1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上的图象关于原点对称;
- (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性, 并说明理由;
- (3) 证明: $f\left(\frac{1}{7}\right) + f\left(\frac{1}{13}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n^2 + 3n + 3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right), (n \in \mathbf{Z})$.

变式3 已知命题 p : 函数 $f(x) = x^2 + ax - 2$ 在 $[-1, 1]$ 内有且仅有一个零点. 命题 q : $x^2 + 3(a+1)x + 2 \leq 0$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 内恒成立. 若命题“ p 且 q ”是假命题, “ p 或 q ”是真命题求实数 a 的取值范围.



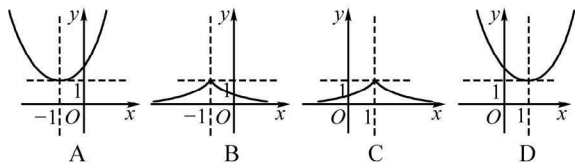
练习

一、选择题

1. 下列结论正确的是 ()

- A. 函数 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数
 B. 函数 $y = x^2 - 4x - 3$ 在 $(2, +\infty)$ 上是减函数
 C. 函数 $y = \frac{2}{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数
 D. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x-2|}$ 是偶函数

2. 已知函数 $f(x) = x - 4 + \frac{9}{x+1}$, $x \in (0, 4)$, 当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 b , 则在直角坐标系中函数 $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^{|x+b|}$ 的图象为 ()



3. 设二次函数 $f(x) = ax^2 - 4x + c$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域为 $[0, +\infty)$, 则 $\frac{1}{c+1} + \frac{9}{a+9}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{31}{25}$ B. $\frac{6}{5}$
 C. $\frac{38}{33}$ D. $\frac{31}{26}$

4. 函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+6) + f(x) = 2f(3)$, $y = f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 则 $f(2013) =$ ()

- A. -16 B. -8
 C. -4 D. 0

5. 将函数 $y = f(x)$ 的图象 F 沿 $a = (2, -2)$ 平移至 F' , 所得 F' 的函数解析式为 $y = 2(x-2)^2 + 2$, 则 $y = f(x)$ 的解析式为 ()

- A. $y = 2(x-4)^2 + 4$ B. $y = 2x^2 + 4$
 C. $y = 2(x-4)^2$ D. $y = 2x^2$

6. 我们把具有以下性质的函数 $f(x)$ 称为“好函数”: 对于在 $f(x)$ 定义域内的任意三个数 a, b, c , 若这三个数能作为三角形的三边长, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 也能作为三角形的三边长. 现有如下一些函数:

- ① $f(x) = \sqrt{x}$
 ② $f(x) = 1 - x, x \in (0, \frac{1}{2})$
 ③ $f(x) = e^x, x \in (0, 1)$
 ④ $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi)$

其中是“好函数”的序号有 ()

- A. ①② B. ①②③
 C. ②③④ D. ①③④

二、填空题

7. 若函数 $f(x) = ax^2 + 20x + 14$ ($a > 0$) 对任意实数 t , 在闭区间 $[t-1, t+1]$ 总存在两实数 x_1, x_2 , 使得 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 8$ 成立, 则实数 a 的最小值是 _____.

8. 关于 $y = f(x)$, 给出下列五个命题:

- ①若 $f(-1+x) = f(1+x)$, 则 $y = f(x)$ 是周期函数;
 ②若 $f(1-x) = -f(1+x)$, 则 $y = f(x)$ 为奇函数;
 ③若函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 则 $y = f(x)$ 为偶函数;
 ④函数 $y = f(1+x)$ 与函数 $y = f(1-x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称;
 ⑤若 $f(1-x) = f(1+x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称.

填写所有正确命题的序号 _____.

9. (1) 函数 $f(x) = x^2 + 2x$, 若函数 $f(x)$ 的定义域与值域都是 $[a, b]$, 实数对 (a, b) 有 _____ 对.

(2) 函数 $f(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$ ($a \leq x \leq b$), 值域为 $[a, b]$ ($a < b$), 实数对 (a, b) 有 _____ 对.

三、解答题

10. 已知函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) - \frac{x}{2}$.

(I) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(II) 若方程 $f(x) - m = 0$ 有解, 求 m 的取值范围;

(III) 若函数 $g(x) = \log_4[1 + 2^x + 3^x + \dots + (n-1)^x - n^x a]$, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}$, 对任意 $x \in (-\infty, 1]$ 都有意义, 求 a 的取值范围.



11. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+1)$ ($a > 1$), 函数 $y = g(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称. 若 $x \in [0, 1)$ 时, 总有 $2f(x) + g(x) \geq m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

12. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ -f(x) & (x < 0) \end{cases}.$$

(1) 若 $f(-1) = 0$ 且函数 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a, b 的值;

(2) 在(1)的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $h(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求 k 的取值范围;

(3) 若 $m \cdot n < 0, m+n > 0, a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 判断 $g(m) + g(n)$ 的符号(正或负)并说明理由.



§ 1.2 函数与方程及函数的应用

一、考纲要求

A 层次:函数的零点、二分法、函数模型的应用.

二、知识梳理,规律总结

1. 函数零点

对于函数 $y=f(x)(x \in D)$, 使方程 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫做函数 $y=f(x)(x \in D)$ 的零点, 即方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

2. 零点存在性定理

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$.

3. 二分法

对于在区间 $[a, b]$ 上连续不断, 且满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 的函数 $y=f(x)$, 通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二, 使区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫做二分法. 给定精度 ϵ , 用二分法求函数 $f(x)$ 的零点近似值的步骤如下:

第一步, 确定区间 $[a, b]$, 验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 给定精度 ϵ .

第二步, 求区间 (a, b) 的中点 x_1 .

第三步, 计算 $f(x_1)$:

①若 $f(x_1)=0$, 则 x_1 就是函数的零点;

②若 $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, 则令 $b=x_1$ (此时零点 $x_0 \in (a, x_1)$);

③若 $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, 则令 $a=x_1$ (此时零点 $x_0 \in (x_1, b)$).

第四步, 判断是否达到精度 ϵ : 即若 $|a-b| < \epsilon$, 则得到零点值 a (或 b); 否则重复第二、三、四步.

4. 利用方程 $f(x)=0$ 有实数根、函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点、函数 $y=f(x)$ 有零点三者的等价性实施方程与函数问题的相互转化, 这是数形结合方法的直接体现.

5. 常见的函数增长模型

(1) 幂函数模型, 如①一次函数模型与反比例函数模型, ②二次函数模型, ③“耐克”函数模型

(2) 指数增长模型(爆炸式增长)

(3) 对数增长模型(蜗牛式增长)

(4) 分段函数模型

6. 函数增长模型的比较

(1) 当自变量充分大时, 指数函数增长模型增速快于幂函数增长模型, 幂函数增长模型快于对数函数增长模型.

(2) 指数函数增长模型增速随自变量增大而增大.

(3) 对数函数增长模型增速随自变量增大而减小.

三、典型例题

例1 已知 $t > 0$, 则关于 x 的方程 $|x| + \sqrt{t-x^2} = \sqrt{2}$ 有相异实根的个数是 ()

- A. 0 或 2 个
- B. 0 或 2 或 4 个
- C. 0 或 2 或 3 或 4 个
- D. 0 或 1 或 2 或 3 或 4 个

变式1 对实数 a 与 b , 定义新运算“ $\otimes$ ”: $a \otimes b = \begin{cases} a, & a-b \leq 1, \\ b, & a-b > 1. \end{cases}$ 设函数 $f(x) = (x^2 - 2) \otimes (x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$. 若函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1] \cup (2, +\infty)$
- B. $(-2, -1] \cup (1, 2]$
- C. $(-\infty, -2) \cup (1, 2]$
- D. $[-2, -1]$

例2 已知函数 $y=f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2$, 则 $y=f(x)$ 与 $g(x) = \log_5 x$ 的图象的交点个数为_____.

变式2 下列说法:

- ①函数 $f(x) = \ln x - 3x - 6$ 的零点只有 1 个且属于区间 $(1, 2)$;
- ②若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2ax + 1 > 0$ 恒成立, 则 $a \in (0, 1)$;
- ③函数 $y=x$ 的图象与函数 $y=\sin x$ 的图象有 3 个不同的交点;
- ④函数 $y=\sin x \cos x + \sin x + \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 的最小值是 1.

正确的有_____. (请将你认为正确的说法的序号都写上)

例3 某批发商按客户订单数额的大小分别给予不同的优惠折扣. 计算客户应付货款的算法步骤如下:

S1 输入订单数额 x (单位: 件); 输入单价 A (单位: 元);

S2 若 $x < 250$, 则折扣率 $d=0$;

若 $250 \leq x < 500$, 则折扣率 $d=0.05$;

若 $500 \leq x < 1000$, 则折扣率 $d=0.10$;

若 $x \geq 1000$, 则折扣率 $d=0.15$;

S3 计算应付货款 $T = Ax(1-d)$ (单位: 元);

S4 输出应付货款 T .

已知一客户买 400 件时付款 38 000 元, 则应付货款为



88 200 元时订单数额是_____.

变式 3

已知某商品的进货单价为 1 元/件, 商户甲往年以单价 2 元/件销售该商品时, 年销量为 1 万件, 今年拟下调销售单价以提高销量, 增加收益. 据测算, 若今年的实际销售单价为 x 元/件 ($1 \leq x \leq 2$), 今年新增的年销量 (单位: 万件) 与 $(2-x)^2$ 成正比, 比例系数为 4.

(1) 写出今年商户甲的收益 y (单位: 万元) 与今年的实际销售单价 x 间的函数关系式;

(2) 商户甲今年采取降低单价, 提高销量的营销策略是否能获得比往年更大的收益 (即比往年收益更多)? 说明理由.

5. 若方程 $2a \cdot 9^{\sin x} + 4a \cdot 3^{\sin x} + a - 8 = 0$ 有解, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a > 0$ 或 $a \leq -8$

B. $a > 0$

C. $0 < a \leq \frac{8}{31}$

D. $\frac{8}{31} \leq a \leq \frac{72}{23}$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2+x) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时在 $f(x) = -x^2 + 1$, 若 $a[f(x)]^2 - b f(x) + 3 = 0$ 在 $[-1, 5]$ 上有 5 个根 x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ 的值为 ()

A. 7

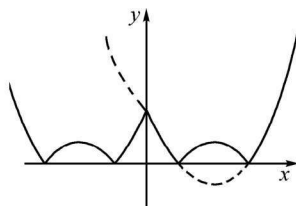
B. 8

C. 9

D. 10

二、填空题

7. 已知函数 $f(x) = |x^2 + (3m+5)x| + 1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且函数有八个单调区间, 则实数 m 的取值范围是_____.



8. 若关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x+2} = kx^2$ 有四个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围为_____.

9. 对于实数 a 和 b , 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab & (a \leq b) \\ b^2 - ab & (a > b) \end{cases}$, 设 $f(x) = (2x-1) * (x-1)$ 且关于 x 的方程 $f(x) = m$ ($m \in \mathbf{R}$) 恰有三个互不相等的实根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是_____.

三、解答题

10. 某房地产开发商投资 81 万元建一座写字楼, 第一年需维护费用为 1 万元, 以后每年增加 2 万元, 若把写字楼出租, 每年收入租金 30 万元.

(1) 开发商最早在第几年获取纯利润?

(2) 若干年后开发商为了投资其他项目, 有两种处理方案: ① 纯利润最大时, 以 10 万元出售该楼; ② 年平均利润最大时以 46 万元出售该楼. 问哪种方案更优? 并说明理由?

练习

一、选择题

1. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 的零点所在的区间是 ()

A. (1, 2)

B. (2, e)

C. (e, 3)

D. (3, +∞)

2. 已知 x_0 是 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{x}$ 的一个零点, $x_1 \in (-\infty, x_0)$, $x_2 \in (x_0, 0)$, 则 ()

A. $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0$

B. $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$

C. $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$

D. $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$

3. 已知函数 $f(x) = |x-2| + 1$, $g(x) = kx$, 若 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. (1, 2) D. (2, +∞)

4. 若一元二次方程 $3x^2 - 5x + a = 0$ 的一根大于 -2 且小于 0, 另一根大于 1 而小于 3, 则实数 a 取值范围 ()

A. (-12, 0)

B. $(-\infty, \frac{15}{14})$

C. $(\frac{15}{14}, +\infty)$

D. $(\frac{1}{2}, 2)$



11. 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - a$.

- (1) 对于任意实数 x , $f'(x) \geq m$ 恒成立, 求 m 的最大值;
(2) 若方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根, 求 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x) = e^x(x^2 + ax - a + 1)$, 其中 a 是常数.

- (I) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
(II) 若 $f(x)$ 在定义域内是单调递增函数, 求 a 的取值范围;
(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = e^x + k$ 在 $[0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根, 求 k 的取值范围.



§ 1.3 不等式及线性规划

一、知识梳理、规律总结

1. 一元二次不等式

(1) 会从实际情境中抽象出一元二次不等式模型.

(2) 通过函数图象了解一元二次不等式与相应的二次函数、一元二次方程的联系.

(3) 会解一元二次不等式, 对给定的一元二次不等式, 会设计求解的程序框图.

2. 基本不等式: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b \geq 0)$

(1) 解基本不等式的证明过程.

(2) 会用基本不等式解决简单的最大(小)值问题.

3. 理解绝对值的几何意义

(1) 能利用含绝对值不等式的几何意义证明以下不等式:

$$① |a+b| \leq |a| + |b|; ② |a-b| \leq |a-c| + |c-b|.$$

(2) 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式:

$$① |ax+b| \leq c; ② |ax+b| \geq c; ③ |x-a| + |x-b| \geq c.$$

4. 了解证明不等式的基本方法: 比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法, 会证明一些简单问题

5. 二元一次不等式表示的区域

对于直线 $Ax+By+C=0 (A>0)$, 不等式 $Ax+By+C>0$ 或 $Ax+By+C<0$ 的解集表示平面内的区域.

6. 线性规划

(1) 一般地, 求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题, 统称为线性规划问题.

(2) 线性规划的三个基本要素:

① 约束条件: 指关于一组变量 x, y 的不等式组;

② 目标函数 $z=f(x, y)$: 一般是 $z=ax+by$ (表示平行直线系或旋转直线系), 或 $z=\frac{y-b}{x-a}$ (表示斜率), 或 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$ (表示距离的平方), 多数情况下目标函数为第一种类型.

由于这组约束条件都是关于 x, y 的一次不等式, 所以称其为线性约束条件. 欲达到最大值或最小值所涉及变量 x, y 的解析式, 我们把它称为目标函数. 由于 $z=Ax+By$ 又是关于 x, y 的一次解析式, 所以叫做线性目标函数.

③ 可行域: 满足线性约束条件的解 (x, y) 叫做可行解, 由所有可行解组成的集合叫做可行域, 使目标函数达到最优值的可行解叫最优解.

7. 确定二元一次不等式表示平面区域的方法

(1) 直线定界, 特殊点定域

① 直线定界: 若不等式不含等号, 则应把直线画成虚线; 若不等式含有等号, 把虚线画成实线.

② 特殊点定域: 在直线 $Ax+By+C=0$ 的某一侧取一

个特殊点 (x_0, y_0) 作为测试点, 代入不等式检验, 若满足不等式, 则表示的就是包括该点的这一侧, 否则就表示直线的另一侧. 特别地, 当 $C \neq 0$ 时, 常把原点作为测试点; 当 $C=0$ 时, 常选点 $(1, 0)$ 或者 $(0, 1)$ 作为测试点.

(2) 一元二次不等式表示平面区域的“同上异下”法则
如果规定: 不等式方向为“ $>$ ”或“ $\geq$ ”的不等式符号为“正”, 不等式方向为“ $<$ ”或“ $\leq$ ”的不等式的符号为“负”, 那么:

① 当 B 的符号与不等式符号相同 (即 $B>0$ 且 $Ax+By+C>0$, 或 $B<0$ 且 $Ax+By+C<0$) 时, 一元二次不等式表示直线 $Ax+By+C=0$ 上方的区域 (此即为“同上”);

② 当 B 的符号与不等式符号相反 (即 $B>0$ 且 $Ax+By+C<0$, 或 $B<0$ 且 $Ax+By+C>0$) 时, 一元二次不等式表示直线 $Ax+By+C=0$ 下方的区域 (此即为“异下”).

二、典型例题

例1 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-4 \leq 0, \\ x-y-2 \leq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ 则目

标函数 $z=2x+3y+1$ 的最大值为_____.

变式1 设实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x-y+2 \geq 0, \\ 8x-y-4 \leq 0, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 若目标函数 $z=ax+y (a>0, b>0)$ 的最大

值为 8, 则 $a+b$ 的最小值为_____.

例2 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y \geq -2, \\ 3x-2y \leq 3, \\ x+y \geq 1. \end{cases}$ 若 $x^2 +$

$4y^2 \geq a$ 恒成立, 则实数 a 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

变式2 若不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ y+x \leq s, \\ y+2x \leq 4 \end{cases}$ 表示的平面区域是

一个三角形, 则实数 s 的取值范围是 ()

- A. $0 < s \leq 2$ 或 $s \geq 4$ B. $0 < s \leq 2$
C. $s \geq 4$ D. $s \leq 2$ 或 $s \geq 4$

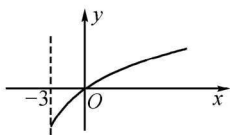
例3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2-6 & x \geq \sqrt{3} \text{ 或 } x \leq -\sqrt{3}, \\ -x^2 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \end{cases}$ 设 $0 < m < n$, 且 $f(m) = f(n)$,

则 mn^2 的最大值为 ()

变式3 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-3, +\infty]$, 且 $f(6) = f(-3) = 2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 函数 $f'(x)$ 的图



象如图所示.若正数 a, b 满足 $f(2a+b) < 2$, 则 $\frac{b+3}{a-2}$ 的取值范围是 ()



- A. $(-\frac{3}{2}, 3)$ B. $(-\infty, -\frac{9}{2})$
C. $(-\frac{9}{2}, 3)$ D. $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (3, +\infty)$

练习

一、选择题

- 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 0, \\ x+y+5 \geq 0, \\ x-y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+4y$ 的最小值是 ()
A. -20 B. -10 C. -15 D. 0
- 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y-1 \leq 0, \\ 2x-y-3 \geq 0, \end{cases}$ 当目标函数 $z=ax+by (a>0, b>0)$ 在该约束条件下取到最小值 $2\sqrt{5}$ 时, a^2+b^2 的最小值为 ()
A. 5 B. 4 C. $\sqrt{5}$ D. 2
- 已知 $a>0, x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x+y \leq 3, \\ y \geq a(x-3), \end{cases}$ 若 $z=2x+y$ 的最小值为 0, 则 $a=$ ()
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
- 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x-y+6 \geq 0, \\ x+y \geq 0, \\ x \leq 2, \end{cases}$ 若目标函数 $z=-mx+y$ 的最大值为 $-2m+10$, 最小值为 $-2m-2$, 则实数 m 的取值范围是 ()
A. $[2, 3]$ B. $[-2, 1]$
C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 3]$
- 已知 $x>0, y>0, \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$. 若 $x+2y > m^2 - 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()
A. $m \geq 4$ 或 $m \leq -2$
B. $-2 < m < 4$
C. $m \geq 2$ 或 $m \leq -4$
D. $-4 < m < 2$

- 设变量 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x-y \leq 1, \\ x+y \geq 2, \\ y-x \leq 2, \end{cases}$ 则 $\frac{x^4+y^4+2+2x^2y^2}{2x^2+2y^2}$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 2

二、填空题

- 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq x, \\ x+y \leq 4, \\ y \geq k, \end{cases}$ 且 $z=2x+y$ 的最小值为 -6, 则 $k=$ _____.
- 不等式 $|x+3| - |x-1| \leq a^2 - 3a$ 对任意实数 x 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 _____.
- 若函数 $f(x) = \min\{3 + \log_{\frac{1}{4}} x, \log 2x\}$, 其中 $\min\{p, q\}$ 表示 p, q 两者中的较小者, 则 $f(x) < 2$ 的解集为 _____.

三、解答题

- 定义: 对于区间 $[a, b), (a, b), [a, b], (a, b]$, 则 $b-a$ 为区间长度. 若关于 x 的不等式 $\frac{x^2 + (2a^2 + 2)x - a^2 + 4a - 7}{x^2 + (a^2 + 4a - 5)x - a^2 + 4a - 7} < 0$ 的解集是一些区间的并集, 且这些区间长度的和不少于 4, 求实数 a 的取值范围.



11. 已知函数 $f(x) = x^2 + a \ln x (a \neq 0, a \in \mathbf{R})$.

(I) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x) \geq (a+2)x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(II) 证明: 对 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+2013)} > \frac{2013}{n(n+2013)}$.

12. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax - 3 (a \in \mathbf{R})$

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线的倾斜角为 45° , 问: m 在什么范围取值时, 函数 $g(x) = x^3 + x^2 \left[\frac{m}{2} + f'(x) \right]$ 在区间 $(2, 3)$ 上总存在极值?

(3) 当 $a=2$ 时, 设函数 $h(x) = (p-2)x + \frac{p+2}{x} - 3$, 若对任意地 $x \in [1, 2]$, $f(x) \geq h(x)$ 恒成立, 求实数 p 的取值范围.



§ 1.4 导数及其应用(1)

一、考纲要求

A 层次:导数概念;根据导数定义求函数 $y=c$, $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$ 的导数.

B 层次:导数的几何意义;简单的复合函数(仅限于形如 $f(ax+b)$)的导数;导数公式表.

C 层次:导数的四则运算.

二、知识梳理、规律总结

1. 导数的背景:(1)切线的斜率;(2)瞬时速度;(3)边际成本.

2. 导函数的概念:如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导,对于开区间 (a, b) 内的每一个 x_0 , 都对应着一个导数 $f'(x_0)$, 这样 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内构成一个新的函数,这一新的函数叫做 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的导函数,记作 $f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, 导函数也简称为导数.

3. 求 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数的步骤:(1)求函数的改变量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; (2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; (3)取极限,得导数 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

4. 导数的几何意义:函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义,就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率,即曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$, 相应地切线的方程是 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. 特别提醒:(1)在求曲线的切线方程时,要注意区分所求切线是曲线上某点处的切线,还是过某点的切线:曲线上某点处的切线只有一条,而过某点的切线不一定只有一条,即使此点在曲线上也不一定只有一条;(2)在求过某一点的切线方程时,要首先判断此点是在曲线上,还是不在曲线上,只有当此点在曲线上时,此点处的切线的斜率才是 $f'(x_0)$.

5. 导数的运算法则:(1)常数函数的导数为 0, 即 $C' = 0$ (C 为常数).

$$(2) \textcircled{1} (x^n)' = nx^{n-1} (n \in \mathbb{Q});$$

$$\textcircled{2} (\sin x)' = \cos x;$$

$$\textcircled{3} (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\textcircled{4} (a^x)' = a^x \cdot \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1).$$

(3)若 $f(x)$, $g(x)$ 有导数,则 $\textcircled{1} [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$; $\textcircled{2} [C f(x)]' = C f'(x)$; $\textcircled{3} [f(x) \cdot$

$$g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \textcircled{4} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} (g(x) \neq 0).$$

6. 多项式函数的单调性:

(1)多项式函数的导数与函数的单调性:

$\textcircled{1}$ 若 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数;若 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 为减函数;若 $f'(x) = 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 为常数函数;若 $f'(x)$ 的符号不确定, 则 $f(x)$ 不是单调函数.

$\textcircled{2}$ 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$, 反之等号不成立;若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上单调递减, 则 $f'(x) \leq 0$, 反之等号不成立.

(2)利用导数求函数单调区间的步骤:(1)求 $f'(x)$; (2)求方程 $f'(x) = 0$ 的根, 设根为 $x_1, x_2, \dots, x_n$; (3) $x_1, x_2, \dots, x_n$ 将给定区间分成 $n+1$ 个子区间, 再在每一个子区间内判断 $f'(x)$ 的符号, 由此确定每一子区间的单调性.

三、典型例题

例1 (1)过点 $(1, 0)$ 作曲线 $y=e^x$ 的切线, 则切线方程为_____.

(2)在平面直角坐标系 xOy 中, 设 A 是曲线 $C_1: y = ax^3 + 1 (a > 0)$ 与曲线 $C_2: x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$ 的一个公共点, 若 C_1 在 A 处的切线与 C_2 在 A 处的切线互相垂直, 则实数 a 的值是_____.

变式1 (1)若曲线 $f(x) = x \sin x + 1$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $ax + 2y + 1 = 0$ 互相垂直, 则实数 a 等于_____.

(2)在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ (a, b 为常数)过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x + 2y + 3 = 0$ 平行, 则 $a + b$ 的值是_____.

例2 已知函数 $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减且满足 $f(0) = 1, f(1) = 0$.

(1)求 a 的取值范围;

(2)设 $g(x) = f(x) - f'(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值和最小值.

**变式 2**

(理科)已知常数 $a > 0$, 函数 $f(x) = \ln(1 + ax) - \frac{2x}{x+2}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) > 0$, 求 a 的取值范围.

变式 2

(文科)已知函数 $f(x) = x \cos x - \sin x + 1$ ($x > 0$),

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 记 x_i 为 $f(x)$ 的从小到大的第 i ($i \in \mathbf{N}^*$) 个零点, 证明: 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2} < \frac{2}{3}$.



例3 (文科) 设函数 $f(x) = ax - \frac{b}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 $7x - 4y - 12 = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 证明: 曲线 $y = f(x)$ 上任一点处的切线与直线 $x = 0$ 和直线 $y = x$ 所围成的三角形面积为定值, 并求此定值.

变式3 (文科) 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx - \ln x$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

(I) 设 $a \geq 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $a > 0$, 且对于任意 $x > 0$, $f(x) \geq f(1)$. 试比较 $\ln a$ 与 $-2b$ 的大小.

例3 (理科) 已知函数 $f(x) = ax + x \ln x$, 且图象在点 $(\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e}))$ 处的切线斜率为 1 (e 为自然对数的底数).

(1) 求实数 a 的值;

(2) 设 $g(x) = \frac{f(x) - x}{x - 1}$, 求 $g(x)$ 的单调区间;

(3) 当 $m > n > 1$ ($m, n \in \mathbf{Z}$) 时, 证明: $\frac{\sqrt[m]{n}}{\sqrt[n]{m}} > \frac{n}{m}$.



变式 3 (理科) 设函数 $f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + c$ ($e = 2.71828$

……是自然对数的底数, $c \in \mathbf{R}$).

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间、最大值;

(II) 讨论关于 x 的方程 $|\ln x| = f(x)$ 根的个数.

备选例题

例 1 已知函数 $f(x) = x^2 \ln(ax)$ ($a > 0$).

(I) $a = e$ 时, 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(II) 若 $f'(x) \leq x^2$ 对任意的 $x > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(III) 当 $a = 1$ 时, 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 若 $x_1, x_2 \in (\frac{1}{e}, 1)$, $x_1 + x_2 < 1$, 求证: $x_1 x_2 < (x_1 + x_2)^4$.

例 2 已知函数 $f(x) = e^x + ax^2 - ex$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 试确定 a 的取值范围, 使得曲线 $y = f(x)$ 上存在唯一的点 P , 曲线在该点处的切线与曲线只有一个公共点 P .

练习

一、选择题

1. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为 ()

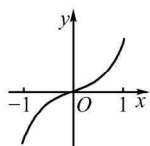
- A. $(-1, 1]$ B. $(0, 1]$
C. $[1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

2. 曲线 $y = xe^{x-1}$ 在点 $(1, 1)$ 处切线的斜率等于 ()

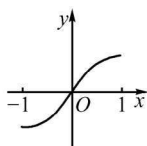
- A. $2e$ B. e C. 2 D. 1

3. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是下列四个图象之一, 且其导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的图象是

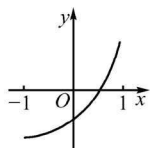
()



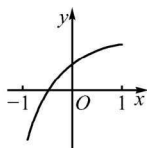
A



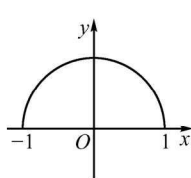
B



C



D



4. 若函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 且满足不等式 $xf'(x) > -f(x)$ 恒成立, 且常数 a, b 满足 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()