高等教育公共基础课精品系列规划教材

高等数学(一)
(第 2 版)

主　编　董银丽
副主编　任翠萍　徐　威　吴　睿
参　编　张新锋　马明远

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．一/董银丽主编．—2 版．—北京：北京理工大学出版社，2019.7
ISBN 978－7－5682－7247－6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①董…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 143281 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 /http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /
开　　本 /787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 /12
字　　数 /296 千字
版　　次 /2019 年 7 月第 2 版　2019 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 /35.00 元

责任编辑 /多海鹏
文案编辑 /孟祥雪
责任校对 /周瑞红
责任印制 /李志强

前言

《高等数学》分为一、二两册.本书为《高等数学(一)(第 2 版)》,包括一元函数微积分、空间解析几何和数学软件 MATLAB;《高等数学(二)》包括多元函数微积分学、微分方程、级数.各章配有习题,书末附有习题答案.

本书在编写中注重概念的表述形式,以使学生更好地理解微积分基本思想.根据教学改革目标,本书在内容设计上注重数学的应用性介绍,让学生了解在专业知识领域中是如何运用数学这一工具解决问题的,有利于提升学生专业素质.

本书可作为高等学校本科高等数学课程的教材.

参加《高等数学》编写工作的有(按照编写章节次序介绍):西安欧亚学院任翠萍、张新锋,负责编写第一章、第二章、第三章和第八章的内容;西安欧亚学院董银丽、徐威,负责编写第四章、第五章、第九章和第十章的内容;西安欧亚学院吴睿、马明远,负责编写第六章、第七章、第十一章和 MATLAB 的数学实验内容.本书的编写得到了学院领导、部门领导和同事的支持与鼓励,在此表示感谢!

限于编者水平,书中存在的不足之处,希望广大读者批评指正.

编　者

微积分简介

在微积分产生之前，数学发展仍处于初等数学时期．人类只能研究常量，而对于变量则束手无策．在几何上只能讨论三角形和圆，而对于一般曲线则无能为力．到了17世纪中叶，由于科学技术发展的需要，人们开始关注变量与一般曲线的研究．在力学上，人们关心如何根据路程函数去确定质点的瞬时速度，或者根据瞬时速度去求质点走过的路程．在几何上，人们希望找到求一般曲线的切线的方法，并计算一般曲线所围图形的面积．令人惊讶的是，不同领域的问题却归结为相同模式的数学问题：求因变量在某一时刻对自变量的变化率；求因变量在一定时间过程中所积累的变化．前者引发了微分的概念；后者引发了积分的概念．两者都包含了极限与无穷小的思想．

微积分学是微分学（Differential Calculus）和积分学（Integral Calculus）的统称，英文简称Calculus，意为计算．微积分的产生一般分为三个阶段：极限概念、求积的无限小方法、积分与微分的互逆关系．最后一步是由牛顿、莱布尼茨完成的，而对于前两阶段的工作，欧洲大批数学家，一直追溯到古希腊的阿基米德都作出了各自的贡献．关于这方面的工作，中国毫不逊色于西方，微积分思想在中国古代早有萌芽，是古希腊数学不能比拟的．

微积分主要有三大类分支：极限、微分学、积分学．微积分中最重要的概念是“极限”．微商（即导数）是一种极限，定积分也是一种极限．从牛顿开始实际使用它到最后制定出周密的定义，数学家们奋斗了200多年．现在使用的定义是魏尔斯特拉斯于19世纪中叶给出的．数列极限就是当一个有顺序的数列往前延伸时，如果存在一个有限数（非无限大的数），使这个数列可以无限地接近这个数，则这个数就是这个数列的极限．微分学包括求导数的运算，是一套关于变化率的理论．它使得函数、速度、加速度和曲线的斜率等均可用一套通用的符号进行演绎．积分学，包括求积分的运算，为定义和计算面积、体积等提供了一套通用的方法．微积分学基本定理指出，微分和积分互为逆运算，这也是两种理论被统一成微积分学的原因．

微积分发展的历史轨迹是：积分学—微分学—微积分学—极限理论—实数理论．但从数学分析课程来看，它的理论体系应该是：实数理论—极限理论—微分学—积分学—微积分学．

微分学中的符号“dx”“dy”等，由莱布尼茨首先使用．其中的d源自拉丁语中“差”（Differentia）的第一个字母．积分符号“$\int$”亦由莱布尼茨所创，它是拉丁语“总和”（Summa）的第一个字母s的伸长（和$\sum$有相同的意义）．莱布尼茨创造的微积分符号，正像印度-阿拉伯数码促进了算术与代数发展一样，促进了微积分学的发展．莱布尼茨是数学史上最杰出的符号创造者之一．牛顿当时采用的微分和积分符号现在不用了，而莱布尼茨所采用的符号现今仍在使用．莱布尼茨比别人更早更明确地认识到，好的符号能大大节省思维劳动，运用符号的技巧是数学成功的关键之一．

目　录 CONTENTS

第一章　函数、极限与连续

17 世纪，数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个被称为“高等数学时期”的新时代，微积分的创立更是这一时期最突出的成就之一. 微积分研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 极限是研究函数的一种基本方法，而连续性则是函数的一种重要属性. 因此，本章内容是整个微积分的基础.

第一节　函数的概念与性态

【课前导读】

在中学数学学习过程中，我们学习了集合和函数的概念. 本节主要是复习回顾高中所学函数的概念和简单性态、基本初等函数、复合函数与初等函数的深入认识以及几种常见的经济函数.

函数描述的是变量与变量之间的依赖关系，例如每天的气温随着时间的变化，圆的面积大小依赖于圆的半径，行驶的路程依赖于行驶的时间等.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果按照某种确定的法则，对于每个 $x\in D$，都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记作 $y=f(x)$. 自变量 x 的取值范围 D 称为**函数的定义域**，因变量 y 的取值范围称为**函数的值域**，记作 R_f.

函数可以由公式、表格、图形、语言叙述来表示，例如散点图、心电图等.

函数的定义域应根据实际问题中问题的实际意义具体确定，对于无实际背景的函数，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合为其定义域.

一、函数的简单性态

1. 函数的有界性

定义 2　函数 $y=f(x)$，$x\in D$，设区间 $I\subset D$，如果存在常数 $M>0$，使得对于区间 I 内任意的 x 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 否则，称 $f(x)$ 在 I 上无界.

注：有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，$y=\sin x$ 是有界函数，因为在它的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界.

2. 函数的单调性

定义 3　函数 $y=f(x)$，$x\in D$，设区间 $I\subset D$，若对区间 I 内任意的 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调减少.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数,单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间.

3. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点 O 对称,任取 $x\in D$,如果

(1) $f(-x)=f(x)$,则函数 $y=f(x)$为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$,则函数 $y=f(x)$为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1 判断函数 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$的奇偶性.

解 函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-f(x),$$

故函数 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$为奇函数.

奇偶函数的运算具有下列特点:

奇(偶)函数与奇(偶)函数的和仍为奇(偶)函数;奇(偶)函数与奇(偶)函数的乘积为偶函数,奇偶函数的乘积为奇函数.

4. 函数的周期性

定义 5 设 $y=f(x)$是定义在 D 上的函数,如果存在 $T>0$,使得对于 D 上任意的 x 有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为周期函数,T 是它的周期.

一般情况下,如果函数 $y=f(x)$的最小正周期为 T,则函数 $y=f(ax+b)$的最小正周期为$\frac{T}{|a|}$.

二、基本初等函数

1. 常值函数 $y=c$(c 为常数)

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数的图形是一条水平的直线.

2. 幂函数 $y=x^\mu$($\mu\in\mathbf{R}$)

其定义域和值域依 μ 的取值不同而不同,但是无论 μ 取何值,幂函数在 $x\in(0,+\infty)$内总有定义,图像都过(1,1)点.

3. 指数函数 $y=a^x$($a>0$,$a\neq1$)

其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$(0,+\infty)$,其图像都过(0,1)点,位于 x 轴上方.

4. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$,$a\neq1$)

其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

在工程中,常以无理数 $e=2.718\,281\,828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底,并记 $e^x=\exp x$, $\log_e x=\ln x$.

5. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$,定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=[-1,1]$.

(2) 余弦函数 $y=\cos x$,定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R=[-1,1]$.

(3) 正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,定义域 D:$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域 $R=(-\infty,+\infty)$.

(4) 余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,定义域 D:$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域 $R=(-\infty,+\infty)$.

(5) 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,定义域 D:$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,值域 $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(6) 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,定义域 D:$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$,值域 $R=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

6. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$,$x\in[-1,1]$,$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$,$x\in[-1,1]$,$y\in[0,\pi]$.

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$,$x\in\mathbf{R}$,$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,$x\in\mathbf{R}$,$y\in(0,\pi)$.

下面给出工程和物理问题中常用到的几类函数:

(1) **双曲正弦** $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty)$,它是奇函数,其图像通过原点(0,0)且关于原点对称.在 $\mathbf{R}$ 内单调增加(图 1-1-1).

(2) **双曲余弦** $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}(-\infty<x<+\infty)$,它是偶函数,其图像通过点(0,1)且关于 y 轴对称,在 $(-\infty,0)$ 内单调减少;在 $(0,+\infty)$ 内单调增加(图 1-1-1).

(3) **双曲正切** $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}(-\infty<x<+\infty)$,它是奇函数,其图像通过原点(0,0)且关于原点对称.在 $\mathbf{R}$ 内单调增加(图 1-1-2).

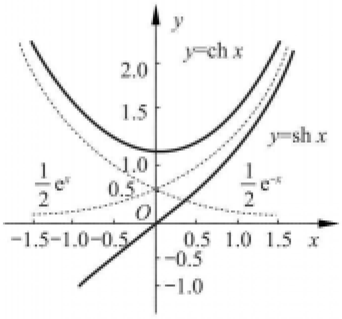

图 1-1-1

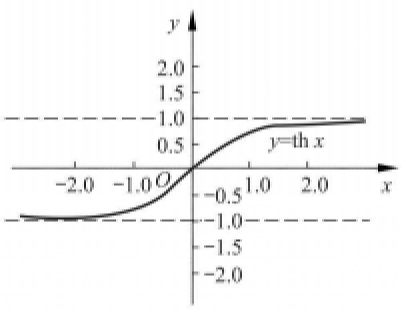

图 1-1-2

三、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对于任意的 $y\in W$，在 D 上有唯一确定的 x 与之对应，就可以得到一个新的函数：

$$x=f^{-1}(y)$$

称函数 $x=f^{-1}(y)$ **为函数** $y=f(x)$ **的反函数**.

习惯上，自变量用 x 表示，因变量用 y 来表示，因此，可将 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.

注：(1) 反函数的定义域和值域分别是直接函数的值域和定义域.

(2) $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 根据反函数的定义，并不是任何一个函数都有反函数的. 例如 $y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上就没有反函数，在 $[0,+\infty)$ 内有反函数 $x=\sqrt{y}$.

(4) 直接函数与反函数有相同的单调性.

例 2 求函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 的反函数.

解 $y=1+\sqrt{e^x-1}$ 的定义域为 $x\geqslant 0$，值域为 $y\geqslant 1$. 由 $y=1+\sqrt{e^x-1}$，得

$$x=\ln(y^2-2y+2),\quad y\geqslant 1,$$

将 x,y 互换，得反函数

$$y=\ln(x^2-2x+2),\quad x\geqslant 1.$$

四、复合函数

定义 6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数. x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为因变量. 这里 $\varphi(x)$ 称为内函数，$f(u)$ 称为外函数.

例 3 将下列复合函数分解为基本初等函数：

(1) $y=(\arctan\sqrt{x})^3$； (2) $y=\sqrt{\lg\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$；

(3) $y=\sin^2 x$； (4) $y=\sin x^2$.

解 (1) $y=u^3, u=\arctan v, v=\sqrt{x}$；

(2) $y=\sqrt{u}, u=\lg v, v=1+\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=u^2, u=\sin x$；

(4) $y=\sin u, u=x^2$.

五、初等函数

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并且可以用一个解析式表达的函数称为**初等函数**. 例如，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x^2-1}$ 都是初等函数，而 $y=\begin{cases}2x, x\geqslant 0,\\ e^x, x<0\end{cases}$ 则是非初等函数.

六、几种常见的经济函数

1. 单利与复利

1）单利计算公式

设初始本金为 p 元，银行年利率为 r. 则第 n 年末的本利和为 $s_n=p(1+nr)$.

2）复利计算公式

设初始本金为 p 元，银行年利率为 r. 则第 n 年末的本利和为 $s_n=p(1+r)^n$.

例 4 现有初始本金 100 元，若银行年储蓄利率为 7%，问：

(1) 按单利计算，3 年末的本利和为多少？

(2) 按复利计算，3 年末的本利和为多少？

(3) 按复利计算，需多少年能使本利和超过初始本金的一倍？

解 (1) 已知 $p=100$，$r=0.07$，由单利计算公式得

$$s_3=p(1+3r)=100\times(1+3\times0.07)=121(\text{元}).$$

即 3 年末的本利和为 121 元.

(2) 由复利计算公式得

$$s_3=p(1+r)^3=100\times(1+0.07)^3\approx122.5(\text{元}).$$

即 3 年末的本利和为 122.5 元.

(3) 若 n 年后的本利和超过初始本金的一倍，即要 $s_n=p(1+r)^n>2p$.
解得

$$n>\ln 2/\ln 1.07\approx10.2.$$

即需 11 年本利和可超过初始本金一倍.

2. 复利付息

因每次支付的利息都计入本金，故年末的本利和与支付利息的次数是有关系的. 设初始本金为 p 元，年利率为 r，若一年分 m 次付息，则一年末的本利和为

$$s=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^m.$$

第 n 年末的本利和为

$$s_n=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

3. 需求函数、供给函数与市场均衡

需求函数是指在某一特定时期内，市场上某种商品的各种可能的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系.

假定其他因素（如消费者的货币收入、偏好和相关商品的价格等）不变，则决定某种商品需求量的因素就是这种商品的价格. 此时，需求函数表示的就是商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系：

$$q=f(p).$$

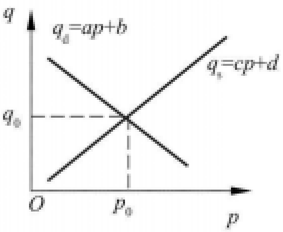

图 1-1-3

其中,q 表示需求量,p 表示价格.需求函数的反函数 $p=f^{-1}(q)$ 称为**价格函数**,习惯上将价格函数也统称为需求函数.

例如,$q_d=ap+b(a<0,b>0)$ 称为线性需求函数(图 1-1-3).

供给函数是指在某一特定时期内,市场上某种商品的各种可能的供给量和决定这些供给量的诸因素之间的数量关系.

假定生产技术水平、生产成本等其他因素不变,则决定某种商品供给量的因素就是这种商品的价格.此时,供给函数表示的就是商品供给量和价格这两个经济量之间的数量关系:

$$s=f(p).$$

其中,s 表示供给量,p 表示价格.

例如,$q_s=cp+d(c>0)$ 称为线性供给函数(图 1-1-3).

对一种商品而言,如果需求量等于供给量,则这种商品就达到了**市场均衡**.以线性需求函数和线性供给函数为例,令

$$q_d=q_s,$$

即

$$ap+b=cp+d,$$

故

$$p=\frac{d-b}{a-c}\equiv p_0,$$

$$q_0=ap_0+b=cp_0+d.$$

这个价格 p_0 称为该商品的**市场均衡价格**,q_0 称为**市场均衡数量**.

根据市场的不同情况,需求函数与供给函数还有二次函数、多项式函数与指数函数等.但其基本规律是相同的,都可找到相应的**市场均衡点**(p_0,q_0).

4. 成本函数

成本函数表示费用总额与产量(或销售量)之间的依赖关系,产品成本可分为**固定成本**和**变动成本**两部分.所谓固定成本,是指在一定时期内不随产量变化的那部分成本;所谓变动成本,是指随产量变化而变化的那部分成本.一般地,以货币计值的(总)成本 C 是产量 x 的函数,即

$$C=C(x),\quad x\geqslant 0.$$

称其为**成本函数**.当产量 $x=0$ 时,对应的成本函数值 $C(0)$ 就是产品的固定成本值.其图像称为**成本曲线**.

设 $C(x)$ 为成本函数,称 $\overline{C}=\frac{C(x)}{x}(x>0)$ 为**单位成本函数**或**平均成本函数**.

例 5 某服装有限公司每年的固定成本为 10 000 元.要生产某个式样的服装 x 件,除固定成本外,每套(件)服装要花费 40 元,即生产 x 套这种服装的变动成本为 $40x$ 元.

(1) 求一年生产 x 套服装的总成本函数;

(2) 生产 100 套服装的总成本是多少? 400 套呢? 并计算生产 400 套服装比生产 100 套服装多支出多少成本.

解 (1) 因 $C(x)=C_{变}+C_{固}$,所以总成本为

$$C(x)=40x+10\,000,\quad x\in[0,+\infty).$$

(2) 生产 100 套服装的总成本是 $C(100)=40\times 100+10\,000=14\,000$(元).

生产 400 套服装的总成本是 $C(400)=40\times 400+10\,000=26\,000$(元).

生产 400 套服装比生产 100 套服装多支出成本是

$$C(400)-C(100)=26\,000-14\,000=12\,000(\text{元}).$$

5. 收入函数与利润函数

销售某种产品的收入 R 等于产品的单位价格 P 乘以销售量 x,即 $R=P\cdot x$,称为**收入函数**. 而销售利润 L 等于收入 R 减去成本 C,即 $L=R-C$,称为**利润函数**.

当 $L=R-C>0$ 时,生产者盈利;

当 $L=R-C<0$ 时,生产者亏损;

当 $L=R-C=0$ 时,生产者盈亏平衡,使 $L(x)=0$ 的点 x_0 称为**盈亏平衡点**(又称为**保本点**).

例 6 参看例 5,该有限公司销售 x 套服装所获得的总收入按每套 100 元计算,即收入函数 $R(x)=100x$.

(1) 在同一坐标系中画出 $R(x)$、$C(x)$ 和利润函数 $L(x)$ 的图形;

(2) 求盈亏平衡点.

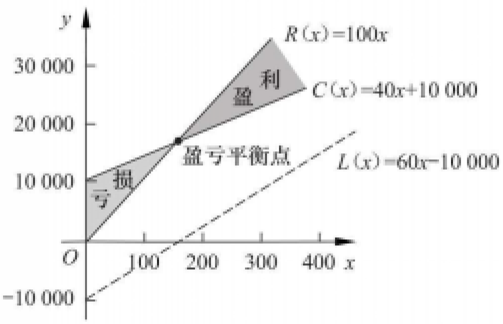

图 1-1-4

解 (1) $R(x)=100x$ 和 $C(x)=40x+10\,000$ 的图形如图 1-1-4 所示.

当 $R(x)$ 在 $C(x)$ 下方时,将出现亏损;当 $R(x)$ 在 $C(x)$ 上方时,将有收益.

利润函数

$$\begin{aligned}L(x)&=R(x)-C(x)\\&=100x-(40x+10\,000)\\&=60x-10\,000\end{aligned}$$

$L(x)$ 的图形用虚线表示. x 轴下方的虚线表示亏损,x 轴上方的虚线表示盈利.

(2) 为求盈亏平衡点,需解方程

$$R(x)=C(x),$$

即

$$100x=40x+10\,000,$$

解之得 $x=166\dfrac{2}{3}$.

所以盈亏平衡点约为 167. 预测盈亏平衡点通常要进行充分考虑,因为公司为了获利最大,必须有效经营.

例 7 某电器厂生产一种新产品,在定价时不单根据生产成本而定,还要依据各销售单位的出价,即他们愿意购买的价格而定. 根据调查得出需求函数为 $x=-900P+45\,000$. 该厂生产该产品的固定成本是 270 000 元,而单位产品的变动成本为 10 元. 为获得最大利润,出厂价格应为多少?

解 收入函数为 $R(P)=P\cdot(-900P+45\,000)=-900P^2+45\,000P$.

利润函数为

$$L(P)=R(P)-C(P)=-900(P^2-60P+800)=-900(P-30)^2+90\,000.$$

由于利润是一个二次函数,容易求得,价格 $P=30$ 元时,利润 $L=90\,000$ 元为最大利润.在此价格下,销售量为 $x=-900\times30+45\,000=18\,000$(单位).

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$;　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+6}$;　(3) $f(x)=\lg(2-\lg x)$;

(4) $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-5x+6}}$;　(5) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$;

(6) $f(x)=\dfrac{2}{|x|-x}+\sqrt{\ln(3+x)}$.

2. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　(2) $y=2\sin 3x$;　(3) $y=6\log_4 x$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq0,x\neq1)$,求 $f[(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

4. 试将函数 $f(x)=2|x-2|+|x+1|$ 表示成分段函数,并画出它的图像.

5. 下列函数由哪些简单函数复合而成?

(1) $y=\sin(3x+1)$;　(2) $y=\cos^3(1-2x)$;　(3) $y=\sqrt{\tan\left(\dfrac{x}{2}+6\right)}$;

(4) $y=\ln\arctan x$;　(5) $y=\sqrt[3]{\cos x^2}$.

6. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元.厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台的,每多订 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂房所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利多少?

第二节　数列的极限

【课前导读】

极限的概念是为求某些实际问题的精确解答产生的.有许多实际问题的精确解,仅仅通过有限次的算术运算是求不出的,而需要考查一个无限变化过程,由此产生了极限的理论和方法.本节介绍数列极限的定义、数列极限的计算方法.

一、数列的定义

按照一定规律排列的无穷多个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为数列,记作$\{a_n\}$,其中每个数称为一个项,a_n 称为通项或者一般项.

例 1　(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}:1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$;

(2) $\{2^n\}$：$2,4,8,\cdots,2^n,\cdots$；

(3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

(4) $\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$；

(5) $\left\{1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}$：$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$；

(6) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$：$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$.

利用散点图和列表，观察当项数 n 无限增大时，通项 a_n 的变化趋势.

解 对于数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，观察得下表：

n	1	100	1 000	10 000	…
$\frac{1}{n}$	1	0.01	0.000 1	0.000 01	…

由表看出，当 n 无限增大时，$a_n=\frac{1}{n}$无限接近于常数 0. 其他数列依照同样方法观察可得相应的结果，在此不再详述.

结论：上面的例题中，当项数 n 无限增大时，通项 a_n 有两种变化趋势：

当 n 无限增大时，a_n 无限接近于某个常数，例如(1)，(3)，(5)，(6)；

当 n 无限增大时，a_n 不趋于任何常数，例如(2)，(4).

二、数列极限及有界性

定义 1 设有数列$\{x_n\}$和常数 a，如果当 n 无限增大时，x_n 无限接近常数 a，则称**常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限**，或称**数列$\{x_n\}$收敛于 a**，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad 或\ x_n \to a(n\to\infty).$$

如果一个数列没有极限，就称该数列是**发散的**.

例 1 中(1)，(3)，(5)，(6)为收敛数列；(2)，(4)为发散数列.

定义 2 设有数列$\{x_n\}$，若存在正数 M，使对一切 $n=1,2,\cdots$，有$|x_n|\leqslant M$，则称**数列$\{x_n\}$是有界的**，否则称它**是无界的**.

对于数列$\{x_n\}$，若存在常数 M，使对 $n=1,2,\cdots$，有 $x_n\leqslant M$，则称**数列$\{x_n\}$有上界**；若存在常数 M，使对 $n=1,2,\cdots$，有 $x_n\geqslant M$，则称**数列$\{x_n\}$有下界**.

显然，**数列$\{x_n\}$有界的充要条件是$\{x_n\}$既有上界又有下界**.

例如，数列$\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$有界；数列$\{n^2\}$有下界而无上界；数列$\{-n^2\}$有上界而无下界；数列$\{(-1)^n n-1\}$既无上界又无下界.

定义 3 数列$\{x_n\}$的项若满足 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots$，则称数列$\{x_n\}$为**单调增加数列**；若满足 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots$，则称数列$\{x_n\}$为**单调减少数列**.

定理 1 收敛的数列必有界.

推论 1 无界的数列必发散.

推论 2 单调有界数列必收敛.

三、数列极限的计算

极限的定义在计算数列的极限时有一定的局限性,所以,下面我们给出数列极限的运算法则.

定理2(数列极限的运算法则) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\cdot b$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\sqrt{a}\,(x_n\geqslant 0,a\geqslant 0)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{a}{b}\,(b\neq 0)$.

例2 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-7n^2}{n^2+3}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$.

(2) 利用数列的交换法则,可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}=\sqrt{1+0}=1.$$

(3) 先将分子有理化,再利用运算法则,可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

(4) 将分子、分母同时除以n^2,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-7}{1+\frac{3}{n^2}}=\frac{0-7}{1+0}=-7.$$

(5) 利用等差数列求和公式,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

(6) 利用等比数列求和公式,可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{3}{2}.$$

习题 1-2

1. 数列$\{x_n\}$的一般项x_n如下，观察一般项x_n的变化趋势，写出数列的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2^n}$；　(2) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$；　(3) $x_n=2+\frac{1}{2^n}$；

(4) $x_n=\frac{n-1}{n+1}$；　(5) $x_n=(-1)^n n$.

2. 求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+5}$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-5}-\sqrt{n})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}$；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a}}{n}$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\times n}\right)$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n^2+3n}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n-1}$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}-\frac{2}{n}\right)$.

第三节　函数的极限

【课前导读】

前面我们学过数列的极限，数列的通项可以看作特殊的函数，我们现在把数列的定义域扩充到 **R**，那么就变成了函数的极限. 本节将介绍自变量趋于无穷大($x\to\infty$)和自变量趋于固定值($x\to x_0$)，两种形式下的函数极限.

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

引例　连续复利问题.

现有一笔贷款A_0(称本金)，以年利率 r 贷出，若以一年为 1 期计算利息，1 年末的本利和为$A_1=A_0(1+r)$，2 年末的本利和为$A_2=A_1(1+r)=A_0(1+r)^2$，…，t 年末的本利和为$A_t=A_0(1+r)^t$. 若年利率为 r，1 年计息 n 期，则每期的利率为$\frac{r}{n}$，t 年末的本利和为$A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$.

上述计息期次数是有限的，若计息期的时间间隔无限缩短，则计息次数 $n\to\infty$，t 年末的本利和为$A_t=A_0\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$，称为连续复利.

定义 1　设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$ $(a>0)$内有定义，如果当$|x|$无限增大时，函数 $f(x)$无限趋近于一个常数 A(即$|f(x)-A|\to0$)，则称常数 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限. 记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A(x\to\infty).$$