2016

Shu Xue Zhi Shi
Ying Yong Jing Sai

初中组

上海市中学生

数学知识应用竞赛

辅导教程

上海市中学生数学知识应用竞赛组委会 编著

上海科技教育出版社

2016年上海市中学生数学知识应用竞赛辅导教程

初中组

上海市中学生数学知识应用竞赛组委会　编著

上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

上海市中学生数学知识应用竞赛辅导教程. 初中组/上海市中学生数学知识应用竞赛组委会编著. —上海:上海科技教育出版社,2016.4

ISBN 978-7-5428-5890-0

Ⅰ. ①上… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①中学数学课—初中—竞赛题 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 058907 号

责任编辑 郑丽娟
封面设计 汪 彦

上海市中学生数学知识应用竞赛辅导教程
初中组
上海市中学生数学知识应用竞赛组委会 编著

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社
(上海市冠生园路 393 号 邮政编码 200235)
网 址 www.sste.com www.ewen.co
经 销 各地新华书店
印 刷 上海师范大学印刷厂
开 本 787×1092 1/16
印 张 6.75
版 次 2016 年 4 月第 1 版
印 次 2016 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5428-5890-0/O・1001
定 价 25.00 元

前言

Preface

上海市中学生数学知识应用竞赛是由上海市科技艺术教育中心和上海市工业与应用数学学会在1991年共同发起举办的。在2005年,上海市中学生数学知识应用竞赛组委会决定在原高中组的基础上创设初中组的竞赛活动。初中组竞赛活动每年都有15000多名中学生参加,至今已连续开展了11年。

初中组竞赛分为初赛与决赛两个阶段,都采用闭卷方式进行。全市参赛学生分成市区组和郊区组两个组别,分别评选出个人一、二、三等奖。每年竞赛还评选出优秀组织团体奖、优秀组织教师奖、优秀辅导教师奖等各奖项。

为了给参加竞赛活动的学生提供更丰富的资料,竞赛组委会组织了一直关心和参与中学生应用数学教学并在应用数学方面有造诣的大学、中学教师编写了本书。本书的主要内容为:提供若干有用的初等应用数学方法,对中学生数学知识应用竞赛试题分类型进行分析、详细解答和方法总结。另外本书还收录了最新的上海市中学生数学知识应用竞赛试题。

上海市中学生数学知识应用竞赛组委会

2016年2月

目录

Contents

一、数 与 式

1. 正整数与有理数

例 **1-1-1** 地球赤道可近似看成一个圆,其半径约为 6370 千米,若在赤道上空离地面 5 米处架设一圈架空线,则该圈架空线的长度比赤道周长长约________米(精确到 0.1 米).

答: 31.4.

例 **1-1-2** 某书正文的页码编码用了 2016 个 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这些数字,那么这本书正文共有________页.

答: 708.

例 **1-1-3** 某张信用卡的密码是四位数,这四个数字中没有 0,前两位数是 5 的幂,后两位数是 2 的幂,且这四个数字的和是奇数,则这四个数字的乘积是________.

答: 240.

例 **1-1-4** 有 5 袋保健球,每袋都有 10 个球,其中 4 袋中每个球重 250 克,另一袋中每个球重 200 克. 为了称一次就能找出哪一袋中的球重 200 克,小王把 5 个袋分别编为 1、2、3、4、5 号袋,然后从中分别取出 1、2、3、4、5 个球,他把所有取出的球合在一起放在秤上称得总重量为 3600 克,则装有球重 200 克的那一袋是________号袋.(每个袋中取出的球的个数与袋的编号相同)

答: 3.

例 **1-1-5** 我国"神七"飞行员翟志刚曾在"神七"绕地球轨道飞行时出舱 19 分 35 秒执行任务,在此期间仪器记载飞船飞行了 9165 千米,则"神七"在这段时间内飞行的平均速度为________千米/秒.

答: 7.8.

例 **1-1-6** 甲、乙两人整修街道左右两边的花坛,已知街道左边的花坛数比右边多 4 个. 整修时,甲先到,开始整修左边的花坛. 当他整修完左边四个花坛时,乙来了,他说"左边难修,还是我来整修左边吧". 于是,甲又到街道右面去整修花坛. 当乙整修完左面留下

的花坛后又到右边帮甲整修了3个花坛时，此时正好两人同时完工，整修完了所有的花坛.请问：甲、乙两人谁整修的花坛多？多几个？

解：设左边有花坛个数为　　$(x+4)$个，
那么右边有花坛个数为　　x个，
甲修了左边花坛个数为　　4个，
乙修了左边花坛个数为　　x个，
乙修了右边花坛个数为　　3个，
甲修了右边花坛个数为　　$(x-3)$个，
甲整修花坛总数为　　$4+(x-3)=(x+1)$个，
乙整修花坛总数为　　$(x+3)$个，
$x+3-(x+1)=2$，
所以，乙整修花坛数多，多整修了2个.

例 **1-1-7**　(1) 2012年我国成功发射了“神九”，并在运行中实现了与“天宫一号”的成功对接及分离试验.“神九”与“天宫一号”对接期间，成为一个联合体，一天绕地球飞行约16圈.假设联合体的轨道可以近似看成一个圆，联合体飞行时离地面平均高度约为300千米，求联合体飞行的平均速度.(精确到0.1千米/秒，假设地球半径约为6400千米，$\pi=3.14$)

(2) 美国火星探测器于2005年8月12日发射，2006年3月11日到达火星表面轨道.已知从地球发出的电波速度为300000千米/秒，需12分钟才能到达火星，求火星探测器飞行的平均速度.(精确到0.01千米/秒)

解：(1) 联合体绕地球飞行一圈所用时间约为：

$$\frac{24\times3600}{16}=5400(\text{秒}).$$

联合体绕地球飞行一圈路程约为：

$$2\pi\times(6400+300)=42076(\text{千米}).$$

联合体飞行的平均速度为：

$$V=42076\div5400=7.8(\text{千米/秒}).$$

(2) 地球与火星间的距离为：

$$300000\times12\times60=216000000(\text{千米}).$$

火星探测器飞行的平均速度为：

$$216000000\div211\div24=42654(\text{千米/时})=11.85(\text{千米/秒}).$$

例 **1-1-8**　阅读以下数据，并回答问题：

7.8级地震释放的能量相当于23860颗长崎原子弹同时爆炸的能量.

7.9级地震释放的能量相当于33700颗长崎原子弹同时爆炸的能量.

8.0级地震释放的能量相当于47600颗长崎原子弹同时爆炸的能量.

我国唐山大地震释放的能量大约相当于400颗广岛原子弹同时爆炸的能量.

(1) 如果7.6级、7.7级、7.8级地震释放的能量规律与7.8级、7.9级、8.0级地震释放

的能量规律相一致,那么地震的级数每增加 0.1 级,释放的能量增长几倍?(精确到千分位)

(2) 汶川大地震释放的能量相当于唐山大地震释放的能量的几倍?(汶川大地震为 8.0 级,唐山大地震为 7.8 级)

(3) 8 级地震释放的能量是 7 级地震释放的能量的几倍?

(4) 2011 年 1 月 12 日上午 9 时 21 分,黄海地区发生 5.0 级地震,释放的能量是汶川大地震的几分之一?

(5) 2011 年 3 月 11 日,日本东北部地区发生 9.0 级地震,释放的能量是我国唐山大地震能量的几倍?

(6) 一颗广岛原子弹的威力相当于多少颗长崎原子弹的威力?(保留整数)

答:(1) 约 1.412 倍.

(2) 约 2 倍.

(3) 约 31.5 倍.

(4) $\frac{1}{1.412^{30}} \approx \frac{1}{31264}$.

(5) $1.412^{12} \approx 62.8$ 倍.

(6) 约 60 颗.

例 **1-1-9** 某粮食加工厂送货员给某商店送去 10 箱袋装面粉,每箱 20 袋,每袋 800 克.送完货刚要返回工厂时,厂部突然来电话说 10 箱中有一箱因生产时机器故障,每袋少装了 50 克,要求立即把缺量的一箱带回厂中更换.当时商店无台秤可用,只有一台自动体重机可称重量,每次投币 0.10 元,送货员身边只有一枚壹角硬币.他想了一想,用笔将十个箱子编上号码:1,2,3,…,10,然后从第 1 号箱子取出 1 袋,第 2 号箱子取出 2 袋,第 3 号箱子取出 3 袋,…,第 10 号箱子取出 10 袋,投入硬币,称得总重量为 43800 克,然后他顺利地找出了缺量的那一箱.你知道是哪一箱吗?

解:一共取了 55 袋,按标准重量应为 $800\times55=44000$(克),但实际重量为 43800 克,相差了 200 克.已知 10 箱中只有一箱重量不够,且每袋都少 50 克.因为 $200\div50=4$,说明所取的 55 袋中正好有 4 袋缺量.显然它们是从第 4 号箱子中取出的,所以应将第 4 号箱面粉带回厂更换.

例 **1-1-10** 西蒙大叔有一天赶着马车去赶集,车上坐着同村的乡亲.走到一个拐弯的地方,一不小心马车撞翻了路边的一篮子鸡蛋,鸡蛋几乎全部打碎,流淌一地.西蒙大叔当即准备赔偿鸡蛋钱.他问蛋的主人:“你篮子里一共有多少个鸡蛋?”蛋主人说:“准确的数我记不清楚了,我在家里把鸡蛋从这个篮子倒腾到那个篮子,又从那个篮子倒腾到这个篮子,倒腾了几遍.我记得,分别按 2 个一次、3 个一次、4 个一次、5 个一次、6 个一次拿出时,篮子里总是剩下一个,而当我按 7 个一次往外拿时,正好拿完,篮里一个也不剩了.”车上的乡亲们听了后说:“这怎么能算出来呢?”西蒙大叔慢慢地眨巴着眼,思索了一会儿,又找了根树枝在地上划了一会,说:“你总共有 301 个鸡蛋.”蛋主听后,表示同意按此数

赔钱.

你知道西蒙大叔是怎么算出来的吗?

解:西蒙大叔是这样算的:

因为鸡蛋按2个一次、3个一次、4个一次、5个一次、6个一次拿,最后都剩下一个,符合这样拿法的鸡蛋数最少是2至6这五个数的最小公倍数多1,即61.但61个鸡蛋每次拿7个,不能正好拿完,所以蛋数应是60的倍数加1,又是7的倍数.而$60\times2+1=121$,$60\times3+1=181$,$60\times4+1=241$,都不能被7整除.$60\times5+1=301$能被7整除.当然还可算得721等也符合条件,可是蛋主的篮子不能装下721个鸡蛋,所以可以确定总共有301个鸡蛋.

例 **1-1-11** 编号分别为1～20的20张卡片放在箱内,每次从中抽出3张.若卡片上的编号之和是3的倍数即算中奖.问:能中奖的不同的抽取方法有多少种?

解:把1～20分别除以3,按得到的余数为0、1、2分为3类,分别有6、7、7个数.各类中任取一个,和是3的倍数.同类中取3个相加,和也是3的倍数.

$$\begin{aligned}\therefore N &= 6\times7\times7+\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}+\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}+\frac{7\times6\times5}{1\times2\times3}\\&=294+20+35+35\\&=384,\end{aligned}$$

∴共有384种不同的抽取方法可以中奖.

例 **1-1-12** 李师傅买卖甲、乙两种股票.买进甲种股票每股10元,盈利20%,全部抛出.买卖乙种股票数量是甲种股票的3倍,买入后盈利25%全部抛出.如果乙种股票的抛出价是甲种股票的买入价的一半,买卖全部结束后,李师傅结算共盈利20000元.试计算买卖两种股票的股数及乙种股票的买入价.

解:设买入甲种股票x股,则买入乙种股票为$3x$股,

甲种股票每股盈利$10\times20\%=2$(元),共盈利$2x$元.

乙种股票抛出价为$10\times\frac{1}{2}=5$(元),

∴ 乙种股票买入价为$\frac{5}{1+25\%}=4$(元),

乙种股票盈利$3x\times(5-4)=3x$(元).

由$3x+2x=20000$,得$x=4000$(股),$4000\times3=12000$(股).

∴ 乙种股票的买入价为每股4元,

买卖甲种股票4000股,买卖乙种股票12000股.

2. 整　　式

例 **1-2-1** 有两种日常温度计量单位,一种是摄氏度t_C,一种是华氏度t_F,它们可以

用公式 $t_F=\frac{9}{5}t_C+32$ 相互换算，则摄氏 100 度相当于华氏________度.

答：212.

例 **1-2-2** 一位英国医生发现子女成年后的身高与父母的身高有如下的关系：若用 a 表示父亲身高，b 表示母亲身高，则儿子成年后身高为 $\frac{a+b}{2}\times1.08$，女儿成年后身高为 $\frac{0.923a+b}{2}$. 若父亲身高 $a=1.80$ 米，母亲身高 $b=1.64$ 米，则女儿成年后身高为________米.(精确到 0.01 米)

答：1.65.

例 **1-2-3** 上海已实行了阶梯水价，规定每户用水量(全年)不超过 220 吨(含 220 吨)的，每吨 3.45 元；用水量在 220～300 吨(含 300 吨)的，每吨按 4.83 元计；超过 300 吨的，按每吨 5.83 元计. 小明家全年(12 个月)总共付水费 952.2 元，则小明家全年用水共________吨.

答：260.

例 **1-2-4** 在体育课上，王老师要同学们排成一列，按 1 至 2，1 至 3，1 至 7 报数各一遍. 他问排在最后的同学：在这三次报数中，你各次报的都是几？那位同学说，我各次报的都是 1. 则这个班级共有________名同学.(假设这个班的总人数不超过 60 人)

答：43.

例 **1-2-5** 有一种商品由于原材料提价而不得不提价，有三种提价方案，都是分两次提价：方案甲先提 $p\%$，再提 $q\%$；方案乙先提 $q\%$，再提价 $p\%$；方案丙两次都提价 $\frac{p+q}{2}\%$($p>0,q>0,p\neq q$). 则方案________提价幅度最大.

答：丙.

例 **1-2-6** 某林场 2011 年底有林木 1000 万立方米，自然增长加上人工植林，可使林木每年比上年增长 25%. 同时，上级要求该林场每年年底砍伐 100 万立方米支援国家建设，并要求 5 年后(2016 年底)林场林木存有量增加到 2000 万立方米.

问：(1) 这一目标能否达到？

(2) 假如要求每年年底砍伐 150 万立方米林木，到 2016 年底林场存有的林木为多少万立方米？

解：(1) 1 年后(2012 年底)林场存有林木数量为：

$$S_{2012}=1000\times(1+25\%)-100=1000\times\frac{5}{4}-100,$$

2 年后(2013 年底)林场存有林木数量为：

$$S_{2013}=S_{2012}\times\frac{5}{4}-100=1000\times\left(\frac{5}{4}\right)^2-100\left(\frac{5}{4}+1\right),$$

5 年后(2016 年底)林场存有林木数量为：

$$\begin{aligned}S_{2016}&=S_{2015}\times\frac{5}{4}-100\\&=1000\times\left(\frac{5}{4}\right)^5-100\left[\left(\frac{5}{4}\right)^4+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}+1\right]\\&=1000\times\left(\frac{5}{4}\right)^5-100\,\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^5-1}{\frac{5}{4}-1}\\&=1000\times\left(\frac{5}{4}\right)^5-400\left[\left(\frac{5}{4}\right)^5-1\right]\\&\approx 2231(\text{万立方米}),\end{aligned}$$

∴ 能达到目标.

(2) $S_{2016}=S_{2015}\times\frac{5}{4}-150=1000\times\left(\frac{5}{4}\right)^5-600\left[\left(\frac{5}{4}\right)^5-1\right]\approx 1821$(万立方米).

如果每年砍伐 150 万立方米，那么到 2016 年底林木存量应为 1821 万立方米.

例 **1-2-7** 三个旅行家在一个雪夜里放弃大路不走，而想从宽 4 千米的山谷中穿出去.他们走了很久，按时间计算应该已经到达目的地了，可每次总是莫名其妙地回到原出发点附近，最后不得不在山谷中坐到天明.这就是迷信中人们所说的“鬼迷路”现象.这里我们用数学知识解释并进行计算：人走路时，左右两脚间的距离大约是 0.1 米，每一步大约是 0.7 米，由于每个人两脚的力量不可能完全一致，迈出的步长也就不一样.所以一个人闭了眼睛在一空旷地上走出的路线不是一条直线，实际上是在“打圆圈”，这就形成了“鬼迷路”的现象.假如某人右脚比左脚每一步多迈出 l 米(即脚步差)，所转圆圈半径为 R 米，又假设右脚在外圈，走一圈共行了 $2\pi R$ 米，左脚在内圈，走一圈共行了 $2\pi(R-0.1)$ 米，那么走一圈，两脚的行程差为 0.2π 米.人走一圈，左右脚各走$\frac{2\pi R}{2\times 0.7}$步，由于脚步差×步数＝路程差，所以 $l\cdot\frac{2\pi R}{2\times 0.7}=0.2\pi$，即 $Rl=0.14$.试问：

(1) 若 $l=1$ 毫米，那么此人转圈子的半径是多少米？

(2) 如果题中三个旅行家转圈子的直径为 4 千米，问他们的脚步差是多少？

解：(1) 将 $l=1$ 毫米$=0.001$ 米代入 $Rl=0.14$，得 $R=140$ 米；

即此人转圈子的半径为 140 米.

(2) 由题意，$R=\frac{4\times 1000}{2}=2000$(米)，代入 $Rl=0.14$，

得脚步差 $l=\frac{0.14}{2000}=0.00007$ 米$=0.07$ 毫米.

故三位旅行家的脚步差是 0.07 毫米.

例 **1-2-8** 小李家改善住房，年底买入新房.首付60%后，向银行贷款80万元，约定5年还清.假定小李家采取的还款方式是每年年底归还银行相同一笔数量的还款，借款一年后的年底第一次归还，分5年还清.那么小李家每年要还款多少？（假定银行5年期贷款年利率5.0%，精确到元）

解：假定小李家每年年底归还银行 x 元，

则到第一年年底还款后，向银行欠款数为

$800000(1+5\%)-x=800000\times1.05-x$ (元)，

到第二年年底还款后，欠款数为

$(800000\times1.05-x)\times(1+5\%)-x$

$=800000\times1.05^2-1.05x-x$

$=800000\times1.05^2-x(1.05+1)$.

依次类推，到第五年年底还款后，欠款数为

$800000\times1.05^5-x(1.05^4+1.05^3+1.05^2+1.05+1)$

$=800000\times1.05^5-\dfrac{1.05^5-1}{1.05-1}x$.

因为约定5年还清，所以应有

$800000\times1.05^5-\dfrac{1.05^5-1}{1.05-1}x=0$，

解得 $x=184781$(元)，

即每年年底需还款184781元，五年可以还清.

例 **1-2-9** 某校组织全体学生(总人数不超过1000人)参加团体操.到场的学生正好可以排成一个横排人数与竖排人数相同的方阵，不多也不少.若让全体到场学生按2人一组，或3人一组，或4人一组，或5人一组，或6人一组分组，结果都会多出一个人.问：到场学生全体按7人一组分组，可能会多出几个人来？

解：到场学生总数是一个自然数的平方数，又是2、3、4、5、6的最小公倍数的倍数多1，即以下两个数集的交集：

$\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,\cdots,121,\cdots,361,\cdots,784,841,900,961\}$，

$\{61, 121, 181,\cdots,361,421,\cdots,841,901,961\}$，

∴ 到场人数可能是121人，或361人，或841人，或961人.

按7人一组分组，可能会多出1个人，或2个人，或4个人.

例 **1-2-10** 如图1-2-1，已知半圆弧 $\overset{\frown}{AaB}$ 和 $\overset{\frown}{BbC}$ 分别以 AB 和 BC 为直径，且 $AB\perp BC$，$AB:BC=2:3$，$AB/\!/DE/\!/FG/\!/HC$，$AD/\!/EF/\!/GH/\!/BC$.一只老鼠从 A 点出发，沿着 $\overset{\frown}{AaB}$ 和 $\overset{\frown}{BbC}$ 的半圆弧路程逃窜；一只猫同时从 A 点出发，沿着折线 $ADEFGHC$ 的路程到达 C 点后，再沿 $\overset{\frown}{CbB}$ 路程行进到 I 点处正好迎头把老鼠逮住.

假设 $\overset{\frown}{CI}$ 长度为20米，老鼠的速度是猫的速度的 $\dfrac{11}{13}$，求半圆直径 AB 和 BC 的长.

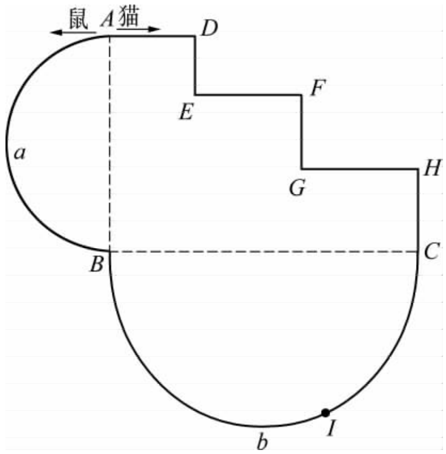

图 1-2-1

（π 取 3.1，精确到 0.1 米）

解： 设 $AB+BC=x$，则猫共走了 $20+x$ 米，老鼠共走了$\left(\frac{\pi x}{2}-20\right)$米.

假设猫抓住老鼠共用 t 秒，则 $V_{猫}=\frac{x+20}{t}$，$V_{鼠}=\frac{\frac{\pi}{2}x-20}{t}$.

由$\frac{\frac{\pi}{2}x-20}{t}=\frac{11}{13}\cdot\frac{x+20}{t}$，约去 t 得 $13\left(\frac{\pi}{2}x-20\right)=11(x+20)$，

解得 $x=52.46$，

∴ $AB=\frac{2}{5}x=21.0$（米），$BC=\frac{3}{5}x=31.5$（米），

∴ 半圆直径 $AB=21.0$ 米，$BC=31.5$ 米.

例 **1-2-11** 小王在书报亭工作，每天要从报社批来若干份报纸（每份 a 元），卖得每份$(a+b)$元，卖不掉的报纸可退还给报社，每份$(a-2b)$元$(a>2b>0)$. 报社规定一个月中每天从报社批报的份数必须不变. 假如小王一个月中有 25 天每天可卖掉 500 份，5 天只能卖掉 350 份. 为了取得最大的利润，每天的批报量应定为多少份？

解： 设每天批来报纸 x 份，则 x 必定小于等于 500 份，又大于等于 350 份，即

$$350\leqslant x\leqslant 500.$$

设月利润为 W 元，

则 $W=25xb+5[350b-(x-350)\cdot 2b]$

$=25bx-10bx+5250b$

$=15bx+5250b$（元） $(350\leqslant x\leqslant 500)$.

显然当 $x=500$ 时，$W_{\max}=12750b$（元）.

所以每天应从报社批报 500 份，月利润最大为 $12750b$ 元.

例 **1-2-12** 现有甲、乙两个服装厂生产同一种服装，甲厂每月产成衣 900 套，生产上衣和裤子的时间比是 2∶1；乙厂每月产成衣 1200 套，生产上衣和裤子的时间比是 3∶2.若两厂分工合作，请安排一个生产方案，其产量超过原两厂生产能力之和，并求出每月生产出多少套成衣.

解： 如果甲厂仅生产上衣，每月可生产 $900+450=1350$(件)，

如果甲厂仅生产裤子，每月可生产 $900\times 2+900=2700$(件).

如果乙厂仅生产上衣，每月可生产 $1200+1200\times\frac{2}{3}=2000$(件)，

如果乙厂仅生产裤子，每月可生产 $1200+1200\times\frac{3}{2}=3000$(件).

上述数据中，$\frac{2000}{1350}$反映了乙厂生产上衣比甲厂生产上衣的优势，

$\frac{3000}{2700}$反映了乙厂生产裤子比甲厂生产裤子的优势.

由于$\frac{2000}{1350}>\frac{3000}{2700}$，所以选择乙厂生产上衣，可产 2000 件.

甲厂生产 2000 条裤子需$\frac{2000}{2700}$月，剩下$\left(1-\frac{20}{27}\right)$月时间再生产成套成衣，可生产

$$\left(1-\frac{20}{27}\right)\times 900=\frac{7}{27}\times 900=\frac{700}{3}\approx 233(\text{套}).$$

这样，共可生产服装 $2000+233=2233$(套)，比原来两厂生产总和 2100 套还多 133 套.

二、一次方程与不等式

1. 一次方程和一次方程组

例 **2-1-1** 甲、乙两人单独完成同一项工作，分别需要 12 天、15 天. 如果甲先做，然后乙加入一起做，一共用了 8 天，那么甲先做了________天.

解： 设甲先做了 x 天，甲、乙一共做了$(8-x)$天.

则$\frac{x}{12}+(8-x)\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)=1$，解得 $x=3$，即甲先做了 3 天.

例 **2-1-2** 某公司向两家商业银行申请贷款共计 200 万元，已知甲银行的贷款年利率为 7%，乙银行的贷款年利率为 6.5%，每年该公司需付利息 13.6 万元，则甲银行的贷款额为________万元.

解： 设甲银行的贷款额是 x 万元，乙银行为$(200-x)$万元.

则 $0.07x+0.065(200-x)=13.6$，解得 $x=120$. 即甲银行贷款额为 120 万元.

例 **2-1-3** 某铁路桥长 1000 米，现有一列火车从桥上通过，测得火车从开始上桥到完全通过用了半分钟，整列火车完全在桥上的时间为 20 秒，那么火车的速度是________米/秒.

解： 设火车长为 x 米，速度为 v 米/秒.

则$\begin{cases}1000+x=30v,\\1000-x=20v,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=200,\\v=40,\end{cases}$即火车的速度为 40 米/秒.

例 **2-1-4** 某人从家里骑自行车去学校. 若每小时行 15 千米，可比预定时间早到 15 分钟；若每小时行 9 千米，可比预定时间晚到 15 分钟. 那么从家里到学校有________千米.

解： 设家到学校 x 千米. 则$\frac{x}{15}+0.5=\frac{x}{9}$，解得 $x=11.25$，即从家里到学校有 11.25 千米.

例 **2-1-5** 要配制含纯硫酸 10%的溶液 1000 千克，已有含纯硫酸 60%的溶液 85 千克，那么还需要含纯硫酸 98%的溶液________千克，水________千克.

解： 设需要含纯硫酸 98%的溶液 x 千克，水 y 千克.

则$\begin{cases}85\times0.6+0.98x=1000\times0.1,\\85\times0.4+0.02x+y=1000\times0.9,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=50,\\y=865,\end{cases}$

即需要含纯硫酸98%的溶液50千克，水865千克.

例 **2-1-6** 汽车上坡时每小时行28千米，下坡时每小时行35千米，去时，下坡路比上坡路的两倍还少14千米，原路返回比去时多用12分钟，求去时上、下坡路程各多少千米.

分析：这与船在水里的航行问题相似，顺流、逆流与下坡、上坡是对应的.

解：设去时上坡路程为x千米，下坡路程为$(2x-14)$千米. 12分钟$=\frac{1}{5}$小时，

则$\frac{x}{28}+\frac{2x-14}{35}+\frac{1}{5}=\frac{x}{35}+\frac{2x-14}{28}$，解得$x=42$，$2x-14=70$.

即去时上坡路程为42千米，下坡路程为70千米.

例 **2-1-7** 甲、乙、丙三人现在的岁数和是113岁. 当甲的岁数是乙的岁数的一半时，丙是38岁；当乙的岁数是丙的岁数的一半时，甲是17岁. 问：甲、乙、丙三人现在分别是多少岁？

解：当甲的岁数是乙的岁数的一半时，设甲x岁，那么乙就是$2x$岁，丙是38岁；当乙的岁数是丙的岁数的一半时，甲是17岁，乙设为y岁，丙就是$2y$岁.

由于纵向之间的年龄差是相同的，可以得到方程组：

$$\begin{cases}2x-y=x-17,\\38-2y=x-17,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=7,\\y=24.\end{cases}$$

把第一个时间的三者岁数相加：$x+2x+38=3x+38=59$，与现在相差$113-59=54$，由于从那时到现在这段时间内每人增长的岁数都一样，把54平均分给三人，得18.

$$x+18=7+18=25,$$
$$2x+18=2\times7+18=32,$$
$$38+18=56.$$

所以，现在甲的年龄为25岁，乙为32岁，丙为56岁.

例 **2-1-8** 一个三位数，百位上的数字作为一个一位数与其后的两位数之和为58. 若把百位上的数字移作个位上的数字，并把原来十位和个位上的数字顺次升为百位和十位上的数字，则新的三位数比原数大306. 求原来这个三位数.

解：设原来三位数的百位数字为a，十位数字为b，个位数字为c，且a、b、c都可看作一位数，且a、b不等于0.

根据题目中的条件列出下面的方程：

$\begin{cases}a+10b+c=58,\\100b+10c+a=100a+10b+c+306,\\a,b=1,2,\cdots 9,c=0,1,2,\cdots,9,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a+10b+c=58,\\100(b-a)+10(c-b)+(a-c)=306,\\a,b=1,2,\cdots 9,c=0,1,2,\cdots,9.\end{cases}$

由于 $b-a$、$c-b$、$a-c$ 小于 10，只能得到 $b-a=3$ 或 4.

当 $b-a=3$ 时，$c-b=0$ 或 1.

当 $\begin{cases}b-a=3,\\c-b=0\end{cases}$ 时，$a-c=6$，矛盾，无解.

当 $\begin{cases}b-a=3,\\c-b=1\end{cases}$ 时，$a-c=-4$，代入第一个等式解得 $\begin{cases}a=2,\\b=5,\\c=6,\end{cases}$ 即三位数为 256.

同理，可以对其他情况进行分析，结果无其他解.

所以，原来这个三位数是 256.

例 **2-1-9** 晚上 8 点刚过，不一会儿小华开始做作业，一看钟，时针和分针刚好成一直线. 做完作业再看钟，还不到 9 点，而且分针与时针恰好重合. 小华做作业总共用了多长时间？

分析：要解决本问题，首先必须搞清楚有关钟表的几个数量关系：

(1) 如果时针正指在 1,2,3,…,12 上时，分针必指在 12 上.

(2) 分针每小时走一圈(60 格)，即每分钟走一格，时针每小时走 5 格，即每分钟走 $\frac{1}{12}$ 格.

解：在 8 点到 9 点之间，钟表的时针和分针成一直线，必然是分针指在数字 2 和 3 之间，根据一圈 360°可以知道，一直线即180°表示 30 格，即分针在时针后 30 格.

设实际开始做作业的时间为 8 时 x 分，

据题意有：$x=5\times 8+\frac{x}{12}-30$，解得 $x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$.

在 8 点到 9 点之间，钟表的时针和分针重合在一起.

设做完作业的时间为 8 时 y 分.

据题意有：$y=5\times 8+\frac{y}{12}$，解得 $y=\frac{480}{11}=43\frac{7}{11}$.

再把做完作业的时间减去开始做作业的时间：

$$43\frac{7}{11}-10\frac{10}{11}=32\frac{8}{11}.$$

因此，开始做作业的时间是 8 时 $10\frac{10}{11}$分，结束的时间是 8 时 $43\frac{7}{11}$分，共花 $32\frac{8}{11}$分钟.

例 **2-1-10** 一条船航行于 A、B 两码头之间，顺流行驶 40 分钟还差 4 千米才能到达，逆流行驶需 1 小时 10 分钟到达. 已知逆流速度是每小时 12 千米，求船在静水中的速度.

分析：我们把两种情况下的航行分别建立一个方程，但是未知量较多，有静水中速度、水流速度和 A、B 两地之间的距离.