

荣惠嫣 编著

# 高中数学 解题奇妙钥匙

来自 **北大数学系** 的解题思路，  
摆脱疲劳战术。

昔日 **北大学子** 复盘高中数学学习心路历程，  
帮你搭上高考赛场上的高铁列车。

深入高中课堂，告别偏题怪题。

一本 **写给高三学生** 的解题指南，更 **适合所有高中生**。



# 高中数学解题奇妙钥匙

荣惠嫣 编著



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

学生在校阶段,积累必要的基础知识固然重要,但是主要还应以学习寻求解决问题的基本方法和掌握继续学习的能力为主.其中,数学的学习所起的作用至关重要.

本书就是针对这样的需求,重点从解题思路和思考方法入手,借助在例题解答过程中所做的示范、启发、对比、归纳等,希望让学生领悟一套合理的思考方法.在今后的继续学习中,这些方法能为增强学习能力发挥有益的作用.

比如,“数”和“形”的结合就是本书着力强调的内容之一.几处例题都把方程转换为两个函数式,在同一坐标系中,作这两个函数图,再研究其交点.作者的意图,就是让学生树立这样的意识,深刻理解“数”“形”结合的本质,拓展其应用,把各章知识主动地互相渗透,这才是学好数学的关键.

书中多有类似的体现数学学习方法的内容,非常明晰且容易掌握,而且承载这些内容的例题又体现了高中数学的核心知识,还多是高考的主要题型,确实值得认真参读.

合理的思考角度、高效的解答方法还可以提高学习数学的兴趣.我们衷心希望学生能从各例的解答中悟出新思路、新方法、悟出趣味.即便能有几处,或许也是改变对数学学习的态度、对数学发生兴趣的开始呢!

## 图书在版编目(CIP)数据

高中数学解题奇妙钥匙 / 荣惠娟编著. — 上海 :

上海交通大学出版社, 2019

ISBN 978 - 7 - 313 - 20624 - 4

I. ①高… II. ①荣… III. ①中学数学课—高中—题解 IV. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 271690 号

## 高中数学解题奇妙钥匙

编 著: 荣惠娟

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

印 制: 上海春秋印刷厂

开 本: 787 mm × 1092 mm 1/16

字 数: 485 千字

版 次: 2019 年 7 月第 1 版

书 号: ISBN 978 - 7 - 313 - 20624 - 4/G

定 价: 69.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021 - 64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 20

印 次: 2019 年 7 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 021 - 33854186

## 作者简介

荣惠嫣

1946年10月出生.

1965年毕业于上海市五爱中学,同年考入北京大学.

1965—1970年就读北京大学数学力学系数学专业.

1982—1997年,连任五届西安市数学会理事、常务理事.退休后,被聘为荣誉理事.

1985年被西安市数学会聘任为西安市奥林匹克教练员,并任西安市奥林匹克竞赛组组长.

1989年被中国数学会聘任为中国数学奥林匹克一级教练员.

作者培养的学生中,曾获得国际奥林匹克数学竞赛金牌、银牌各一名.获得全国数学竞赛联赛一、二、三等奖百余名.曾主讲开设市级奥林匹克数学讲座及公开课300余次,受益学生超过20000人.

1977年恢复高考后,作者主要担任西安交通大学附属中学毕业班数学教学.所教班级的学生参加全国高考联考,数学平均分多次获西安市第一名.

由于成绩突出得到陕西省嘉奖:①陕西省优秀青少年辅导员;②陕西省科学技术先进个人.

作者曾出版《高考数学辅导报告集》《中学数学辅导》等著作,深受教师和学生的好评.曾发表《数学初探》等论文,多次获各级数学会优秀论文奖.

# 序 一

著名数学家华罗庚说过：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日月之繁，无处不用到数学。”说明数学应用在各个领域，都对人类的生活和社会的发展起到至关重要的作用。而在高中阶段学好数学，可以给未来学习任何学科打好基础。

当今的中学生学习数学似乎并不是那么轻松，他们面临什么问题呢？面对一些题目，找不到解题的思路。而日常的训练中，会遇到大量重复的题目，课业负担非常大，最终却收效甚微，不能达到理想的成绩。其实，数学的学习应该非常理性：只需掌握少量精华题型，重点是将知识点融会贯通，就足以在解答数学题目时游刃有余。

1965年，北京大学数学力学系在上海高考成绩优秀的学生中，录取了20名学子。北大校长派专人接送这20名高材生搭乘大学新生进京火车专列到该系读书。半个多世纪之后，当年的学子回到了出发地——上海。我们不忘初心，追忆当年高中数学学习，对当下的高中数学教学进行了思考。我们组成了策划团队，认真研读了新高中课程方案与课程标准，对历年数学高考题做了分析和解读，希望能将对数学的兴趣与较好的学习方法传达给今天的中学生们。

我们邀请荣惠嫣执笔，根据新高中课程方案与课程标准，集笔者40余年奋战在教学第一线之经验，编写了这本书。书中精选的234道例题，凝聚着荣惠嫣老师的能力与智慧。希望能够帮助同学开阔视野，扩展思路。

北京大学数学力学系驻沪65级同学多次探讨《高中数学解题奇妙钥匙》这本书的编撰宗旨。在撰稿阶段对题目的设计、章节的编排提出了框架。完稿之后，几十位同学认真参与了审阅，并给予了有益的建议。

本书重在理清知识脉络，让学生清楚地认识到高中数学内容的要点及知识点、各章节的重点。每一个题目都经过精挑细选，具有典型性。每一章节的例题和巩固题都由浅入深地设计，适合学生操练，也与高考接轨。

本书既囊括了高中数学的核心知识，又涵盖了高考的主要题型。用独到的解题方法，给学生以示范和启迪。读者们会发现，在这本书中提供的解题方法，简单易掌握，而且有非同寻常的创新思路，可谓“四两拨千斤”。相信会让在题海中挣扎的中学生眼前一亮！

这是一份跨越半个世纪的礼物，我们希望有更多的教师和中学生能读到这本书，并从中找到灵感，帮助更多的人从数学学习中找到自信，爱上数学这门学科是我们努力的方向，也是我们的一份社会责任！

策划组成员：北京大学数学力学系校友（按姓氏笔画）

毕业校系	姓名	毕业中学	退休前任教中学	备注
北京大学数学力学系65级	丁正中	上海市育才中学		
	丁征	上海师范学院附中		

(续表)

毕业校系	姓名	毕业中学	退休前任教中学	备注
北京大学数学力学系 65 级	王 侯	呼和浩特市一中		
	王蓓蓓	上海市位育中学	上海市延安中学	
	韦志国	辽宁省实验中学	上海市第三女中	
	叶茂昌	上海市浦东北蔡中学		
	叶 嵩	上海市上海中学		
	孙宝其	上海市吴淞中学	上海市宝山中学	
	刘 发	河北省涿州一中	煤炭部地勘局中学	
	刘英华	上海市位育中学		
	宋逢明	上海交通大学附中		
	吴士渊	北京市第四中学		
	沈承凤	上海市松江三中		
	邵维忠	山东省平度一中		
	陈 昊	中国人民大学附中		
	林知焯	福建省福州一中		
	郁德懋	上海市澄衷中学		
	郑斯宁	东北师大附中		
	荣惠嫣	上海市五爱中学	西安交通大学附中	
	翁彦荣	北京房山区良乡中学		
	黄金兴	上海市顾村中学		
	黄明贵	陕西省勉县第七中学	西安交通大学附中	
黄慧芝	上海市复兴高级中学	杭州外国语学校		
鲁传敬	上海市育才中学			
北京大学 63 级	沈亦文	上海市比乐中学		特邀
清华大学	沈黎洪	上海复旦大学附中		特邀

推荐组成员：北京大学数学力学系校友(按姓氏笔画)

毕业校系	姓名	毕业中学	退休前任教中学	备注
北京大学数学力学系 65 级	尤建忠	江苏张家港乐余中学		
	王瑞卿	河北省深县中学		
	支志斌	河北省深县中学		
	田盼星	河南省濮阳县第一中学		

(续 表)

毕业校系	姓名	毕业中学	退休前任教中学	备注
北京大学数学力学系 65 级	白玉林	北京师大二附中		
	朱天启	福建省泉州七中		
	吕君成	天津市第七中学		
	刘贺湘	河北蠡县缪家营中学		
	陈礼明	福建省长乐一中		
	陈昌财	福建省闽清一中		
	陈代于	四川省宣汉县中学		
	陈永杰	福建省福州高级中学		
	洪天祝	福建省同安县一中		
	张万增	吉林省舒兰一中		
	张桂花	陕西省华县咸林中学		
	张清波	广东省普宁二中		
	施以方	北京市第八中学		
	赵金明	福建省闽侯一中		
	胡鸿彬	湖北省武昌实验中学		
	杨玉儒	陕西省乾县中学		
	杨成新	四川省苍溪县中学		
	杨延龄	北京市第八中学		
	贺家栋	福建省福州七中	福州铁路中学	
	黄锦权	广东省佛山一中		
	黄和生	浙江嘉善县嘉善中学		
	黄达武	成都铁二局一中		
黄建铭	四川省成都四中			
钱 江	江苏张家港梁丰中学			
蔡金生	江苏张家港沙洲中学			
北京大学 63 级 64 级	陈桂兴	江苏张家港沙洲中学		
	王启丽	北京市女六中		
	王常鲁	华中师范大学一附中		
	陈 娟	华中师范大学一附中		
	郑应文	昆明市第十二中学		
	韩宇奕	海南省三亚一中		

2018 年 10 月

## 序 二

数学,是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科,它有二十几个分支.数学是自然科学和社会科学的重要基础,数学的应用更是人类生活的基础工具.

本书所说的数学是中学课程里的数学科目.中学数学教育主要是传授基础数学知识,为进一步学习打下坚实基础.在中学主要侧重于基础定理的掌握,考题多为技巧性较强的计算题和证明题,在高考中数学的地位非常重要.

中学数学教师的能力与水平至关重要,甚至是决定性的.所以,能在高中阶段遇到一位优秀的数学老师更是我们人生中的一大幸事.作为北京大学学子,我们对此深有体会.在中学时代,我们授课教师中的佼佼者多是毕业于著名大学,他们学识高深、授业认真,我们当年能考取北大数学力学系与他们的辛勤教导是分不开的.当我们从北大毕业后,一部分同学选择了中学的教学岗位,成为改革开放时期中学教育的骨干力量,提高了中学的教育水平.

我们的大学同学荣惠嫣就是其中优秀的一员.能考入北京大学数学力学系的女生微乎其微,当年我们年级 185 人,女同学只有 27 人,这些女同学刻苦勤奋是当然的,她们更大的特点是具有很强的逻辑思维能力和表达能力.她们一旦从事教学工作,往往能创造出斐然的成绩.荣惠嫣曾任西安交通大学附属中学数学教师,在几十年的教学生涯中培育出很多尖子生,早在 1989 年她被中国数学会批准为“中国数学奥林匹克一级教练员”,并担任西安市数学奥林匹克竞赛组组长,培养出国际奥林匹克数学竞赛金牌、银牌及百余名全国数学联赛获奖选手.

荣惠嫣在教学之余多有著述,多篇文章获各级数学学会优秀论文奖.她参与编写出版的《高考数学辅导报告集》《中学数学辅导》等书深受教师和学生的好评.

荣惠嫣在退休后回到上海,仍然坚持站在教学第一线,继续为学生辅导高中数学,在名校开展讲座.经过荣惠嫣老师的点化,这些学生对知识的掌握均有大幅度提高,让学生们体会到北京大学数学力学系学生对数学的深刻理解、领会了令人眼前一亮的解题思路.面对如今升学压力巨大的学生,荣惠嫣决定总结提纯一生对高中数学教学及辅导的经验,厚积薄发、融会贯通地编写出这本教辅书,旨在为学生减压,跳出题海.这本书从知识、方法、实练三个维度立体训练,引导思考,以求将北大数学力学系学生解题的精髓介绍给高中学生.

现今各地的数学教科书,经过减负改革,内容确实精简了许多.但相应的教辅材料仍然没有摆脱铺天盖地、杂乱无章的题海,使大部分高中生苦不堪言.其实我们一直认为,学生学好数学的重点在于深度;着意理解和挖掘章节之间、甚至科目之间的知识与方法的联系、借鉴,才是学懂学活学好、掌握其精髓的关键.

如果把课本里的知识片段比作枝叶,那么通过更深一层的学习理解,它们就能化作一棵树,有望生出新的枝叶.

如果把课本里的知识片段比作麟爪,那么通过更深一层的融会贯通,它们就能化作一条龙,就能尽意飞舞腾挪.

而荣惠嫣的这本高中数学辅导书正是注重了这一点,全书只有 234 道例题,却囊括了高中数学主要内容.希望通过这本书的帮助,每个高中生都能尽力在高中阶段的数学学习中养成一个勤于思考、善于联系、乐于钻研的好习惯,跨上一个新的台阶.

北京大学数学力学系 65 级校友 邵维忠 鲁传敬 王侯 陈昊 翁彦荣 丁征

注:

邵维忠:北京大学信息科学技术学院教授,博士生导师.培养了博士、硕士研究生六十余名,主持完成了多项国家科研项目,获国家级科技进步二等奖和多次省部级奖励.

鲁传敬:上海交通大学教授,博士生导师,曾任工程力学系主任.培养博士、硕士研究生数十名,主持国家科技攻关项目、973 项目、国家自然科学基金重点项目等数十项,获国家和省部级科技进步奖十余项.

王侯:执教中学数学多年,专业归口后从事计算机软件开发,受邀参与深圳证券交易所筹建,是我国证券业计算机开发应用和数据传输方面的开拓者,在证券业卫星通信应用方面有重大贡献.历任深圳证券交易所总工程师,深圳证券卫星通信公司总经理、董事长、监事长.

陈昊:就职于机械冶金行业,参加的联合设计项目获全国科学大会重大成果奖.在河北省机械、电子、冶金行业应用推广工业工程方面有突出业绩.曾任保定市机械冶金工业局局长、党委书记.

翁彦荣:曾任高校教师,后调任军队现役干部,武警交通部队高级工程师,大校军衔.曾参加两项交通部科技攻关项目,作为主要完成人之一获国家级科技进步二等奖一项,省部级科技进步奖、省部级优秀设计奖数项.

丁征:就职于建材、化工、冶金和机械行业,在国企改革和工业制造业自动化方面尽职尽责,曾任宁夏长城机器制造厂副厂长、高级工程师.作为北大学子,以自己的学识、能力和谦虚谨慎的工作作风赢得员工的好评和拥戴.

寄语中学生

与任何课程的学习一样,数学也是练会的,不是念会的.但我不赞成仅为应试而设计的题海战术,那是不讲道理、不长功力的重复操作,把中学生训练成“搜索引擎”.事实上,只要抓住精髓,练到点子上,就会事半功倍,并且终身受益.

北京大学数学力学系 65 级校友 郑斯宁

注:郑斯宁:大连理工大学数学科学学院教授、博士生导师.多次主持国家自然科学基金项目和国家级教改项目.任多种国际数学期刊编委.培养毕业博士研究生二十余名.在国际主流数学期刊发表 SCI 检索论文 100 余篇,数学评论 200 余期.

2018 年 10 月

# 前 言

本书针对新高中课程方案与课程标准的要求编写而成。

中央高层关于高考作出一系列重大历史性改革决策,即将在全国范围内纠正课内外教学中的奇、难、偏、怪等现象势在必行,应对高考的固有顽疾是题海战术,打破题海战术,必须创新解题思路,为此,作者将高中数学知识核心及相关要点进行归类总结,精选要题,分类予以讲解。

本书分为七章,即函数,三角比和三角函数,数列,解析几何,复数,向量,排列、组合、二项式定理、概率,每个章节又分为三个部分:知识要点及引申、精选例题和自我巩固题。

本书内容可供高中各阶段学生进行实时挑选阅读,所附练习,高一至高三学生均可使用,当然,高一高二年级学生重在夯实基础,迅速跟上新高中课程方案与课程标准的要求,稳步提高数学能力;高三学生则宜稳中求精,抓住考前黄金时间,更加系统熟练应对高考内容要求;本书推陈出新、化繁为简、深入浅出,用别具一格的全方位解题思路进行各个难点的突破,并进行各个章节间的灵活转化;力求将“数形结合”拓宽为建构数学模型,通过这种视角,渗透贯穿七个章节的知识内在联系,进而运用于处置高中数学题型的思路。

顺应不同学生的不同思维,书中独到地提出各类解题技巧,在“因材施教”条件下真正实现:将复杂的问题应对简单化,将繁冗的思路整理清晰化,将单一的思维拓展开阔化,将庞大的题目筛选精细化,在有限的时间内,最大效率地把握核心关键,掌握要点,冲刺高考。

由于时间及本人水平有限,书中存在的不足之处,恳请读者批评指正。

# 目 录

第 1 章 函数	1
1.1 函数、方程、不等式	1
1.1.1 函数、方程、不等式的知识要点及引申	1
1.1.2 例题精选	5
1.1.3 自我巩固	16
1.2 函数建模的应用及拓展	17
1.2.1 函数图像建模的引申	17
1.2.2 例题精选	24
1.2.3 自我巩固	42
1.2.4 函数、方程与不等式自我巩固题答案	44
1.2.5 函数建模的应用及拓展巩固题答案	49
第 2 章 三角比和三角函数	58
2.1 三角比和三角函数的主要内容及引申	58
2.1.1 三角函数及反三角函数的图像	58
2.1.2 辅助角公式	63
2.1.3 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 、 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 、 $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ 的 图像与性质	65
2.1.4 解斜三角形	70
2.1.5 反三角函数中,容易混淆的几点	71
2.2 例题精选	72
2.3 自我巩固	90
2.4 三角比和三角函数自我巩固题答案	93
第 3 章 数列	104
3.1 等差数列	104
3.1.1 等差数列的知识要点及引申	104
3.1.2 例题精选	105
3.1.3 自我巩固	107
3.2 根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式,求数列 $\{a_n\}$ 的通项	107
3.2.1 迭加法与凑式法的解析与对比	107
3.2.2 例题精选	109

3.2.3	自我巩固	112
3.3	关于求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项之和 $S_n$ 的几种解法	113
3.3.1	知识要点	113
3.3.2	例题精选	114
3.3.3	自我巩固	120
3.4	数列综合题	120
3.4.1	例题精选	120
3.4.2	自我巩固	127
3.4.3	自我巩固题答案	128
<b>第4章</b>	<b>解析几何</b>	137
4.1	直线方程	137
4.1.1	直线方程的主要内容及引申	137
4.1.2	例题精选	142
4.1.3	自我巩固	147
4.2	圆锥曲线	147
4.2.1	圆锥曲线的主要内容及引申	147
4.2.2	例题精选	150
4.2.3	自我巩固	152
4.3	解题技巧篇	153
4.3.1	构造直角三角形法(其中两条直角边分别平行于 $x$ 轴、 $y$ 轴)	153
4.3.2	不求两个函数图像的交点坐标,解与图像交点有关的问题	158
4.3.3	三角函数在解析几何中的应用	163
4.3.4	二次曲线定义的应用	168
4.3.5	开放性、多元性思维的应用	179
4.4	解析几何巩固题答案	186
4.4.1	直线方程	186
4.4.2	圆锥曲线	188
4.4.3	解题技巧篇	190
4.4.3.1	构造直角三角形法	190
4.4.3.2	不求两个函数图像的交点坐标,解与图像交点有关的问题	192
4.4.3.3	三角函数在解析几何中的应用	193
4.4.3.4	二次曲线定义的应用	195
4.4.3.5	开放性、多元性思维的应用	202
<b>第5章</b>	<b>复数</b>	204
5.1	复数知识要点及引申	204
5.2	例题精选	209
5.3	自我巩固	220

5.4	自我巩固题答案 .....	220
<b>第 6 章</b>	<b>向量</b> .....	225
6.1	平面向量 .....	225
6.1.1	平面向量的主要内容及引申 .....	225
6.1.2	例题精选 .....	230
6.1.3	自我巩固 .....	239
6.2	立体几何、空间向量 .....	240
6.2.1	立体几何、空间向量的主要内容及引申 .....	240
6.2.2	例题精选 .....	245
6.2.3	自我巩固 .....	257
6.3	自我巩固题答案 .....	259
6.3.1	平面向量 .....	259
6.3.2	立体几何、空间向量 .....	261
<b>第 7 章</b>	<b>排列、组合、二项式定理、概率</b> .....	268
7.1	排列组合 .....	268
7.1.1	求排列组合数的几种方法 .....	268
7.1.2	例题精选 .....	270
7.1.3	自我巩固 .....	278
7.2	二项式定理、排列数公式、组合数公式、组合数性质公式 .....	279
7.2.1	二项式定理、排列数公式、组合数公式、组合数性质公式主要内容及 引申 .....	279
7.2.2	例题精选 .....	281
7.2.3	自我巩固 .....	283
7.3	概率 .....	283
7.3.1	概率的主要内容 .....	283
7.3.2	例题精选 .....	286
7.3.3	自我巩固 .....	291
7.4	自我巩固题答案 .....	292
7.4.1	排列组合 .....	292
7.4.2	二项式定理、排列数公式、组合数公式、组合数性质公式 .....	294
7.4.3	概率 .....	295
	后记一 .....	299
	后记二 .....	300
	后记三 .....	301

# 第1章 函 数

## 1.1 函数、方程、不等式

### 1.1.1 函数、方程、不等式的知识要点及引申

**知识点 1.1** 方程  $f(x)=0$  的根对应于相应函数的零点,即函数  $y=f(x)$  的图像与  $x$  轴交点的横坐标为方程  $f(x)=0$  的根.

**例 1-1** 已知方程  $x^2+mx-6=0$  在区间  $(2, 4)$  上,仅有一个根,求实数  $m$  的取值范围.

**解:** 设  $f(x)=x^2+mx-6$ .

要使二次函数  $y=f(x)$  的图像在区间  $(2, 4)$  上只有一个零点,

只要  $f(2) \cdot f(4) < 0$  即可,

即  $(4+2m-6) \cdot (16+4m-6) < 0$ ,  $(m-1)(2m+5) < 0$ ,

因此当  $-\frac{5}{2} < m < 1$  时,方程  $x^2+mx-6=0$  在区间  $(2, 4)$  上仅有一个根.

**评论:** 当  $m \in \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$  时,  $f(2)$ 、 $f(4)$  的值为异号,

因为  $f(x)=x^2+mx-6$  是连续的二次函数,所以  $y=f(x)$  的图像在区间  $(2, 4)$  上有唯一零点.

**例 1-2** 已知方程  $x^2-px+3=0$  在区间  $(1, 4)$  内,有两个不同的根,求实数  $p$  的取值范围.

**解:** 设  $f(x)=x^2-px+3$ .

要使二次函数  $y=f(x)$  的图像在区间  $(1, 4)$  内有两个零点,

$$\text{必须} \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(4) > 0 \\ \Delta > 0 \text{ (方程有两个不同的根)} \\ 1 < -\frac{-p}{2} < 4 \text{ (对称轴位于两条直线 } x=1, x=4 \text{ 之间)} \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} 1-p+3 > 0 \\ 16-4p+3 > 0 \\ p^2-12 > 0 \\ 2 < p < 8 \end{cases} \quad \text{解得 } 2\sqrt{3} < p < 4.$$

当  $p \in (2\sqrt{3}, 4)$  时,函数  $y=f(x)$  的图像在区间  $(1, 4)$  内,有两个零点.

所以,  $p \in (2\sqrt{3}, 4)$  时, 方程  $x^2 - px + 3 = 0$  在区间  $(1, 4)$  内, 有两个不同的实数根.

**例 1-3** 已知方程  $ax^2 - 2x - 2 = 0$  在区间  $[\frac{1}{2}, 2]$  内有解, 求实数  $a$  的取值范围.

方法一: 分两种情况讨论:

① 在区间  $[\frac{1}{2}, 2]$  内仅有一解;

② 在区间  $[\frac{1}{2}, 2]$  内有两解.

(略)

方法二: 分离实数  $a$ , 解出关于  $x$  函数的值域.

解: 由已知  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ , 知  $x^2 \neq 0$  且  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 2$ ,

由原方程可化为:  $a = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ ,

因为  $\frac{3}{2} \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \leq 12$ , 因此  $a \in [\frac{3}{2}, 12]$ ,

所以, 当  $a \in [\frac{3}{2}, 12]$  时, 方程  $ax^2 - 2x - 2 = 0$  在区间  $[\frac{1}{2}, 2]$  内有解.

评论: 对于二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ),

(1) 当  $x \in (m, n)$  时, 方程  $f(x) = 0$  仅有一个实数根 (不包括两个相等的根) 的充要条件为  $f(m) \cdot f(n) < 0$ .

(2) 当  $x \in (m, n)$  时, 方程  $f(x) = 0$  有两个不相等的实数根的充要条件是

$$\begin{cases} f(m) > 0, \\ f(n) > 0, \\ \Delta > 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n. \end{cases}$$

(3) 当  $x \in (m, n)$  时, 方程  $f(x) = 0$  有根, 采用例 1-3 解法二, 即分离常数法.

**知识点 1.2** 如方程  $f(x) = 0$  通过变形, 可转化为两个常用函数式的等量关系, 再分别画出两个函数的图像, 观察两图像交点, 交点横坐标即为方程  $f(x) = 0$  的根.

**例 1-4** 方程  $\log_2 x + x^2 - 8x + 13 = 0$  有几个解?

解: 由已知方程转化为  $\log_2 x = -x^2 + 8x - 13$ ,

即  $\log_2 x = -(x-4)^2 + 3$ .

设  $y = \log_2 x$  和  $y = -(x-4)^2 + 3$ ,

在同一个直角坐标系内, 画出函数  $y = \log_2 x$  和  $y = -(x-4)^2 + 3$  的图像, 如图 1-1 所示, 两函数图像的交点有三个,

所以, 方程  $\log_2 x + x^2 - 8x + 13 = 0$  有三个解.

评论: 二次函数  $y = -(x-4)^2 + 3$  的定义域为  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 对

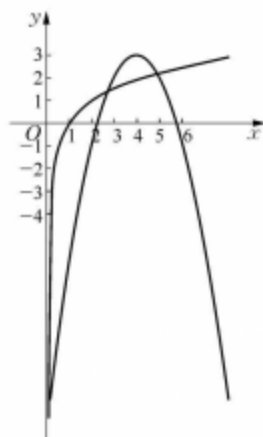


图 1-1

数函数  $y = \log_2 x$  的定义域为  $x \in (0, \infty)$ , 应注意当  $x \in (0, 1)$  时, 两函数的图像还有一个交点.

**例 1-5** 已知方程  $|x| = ax + 1$  恰有一个负根, 而没有正根, 求实数  $a$  的取值范围.

解: 设  $y = |x|$  和  $y = ax + 1$ ,

$y = ax + 1$  是过点  $(0, 1)$  的直线,

函数如图 1-2(a) 所示, 直线  $l_1, l_2$  均过点  $(0, 1)$ ,

当  $a < 1$  时, 直线  $l_1, l_2$  与函数  $y = |x|$  的图像有横坐标为正数的交点, 不合题意;

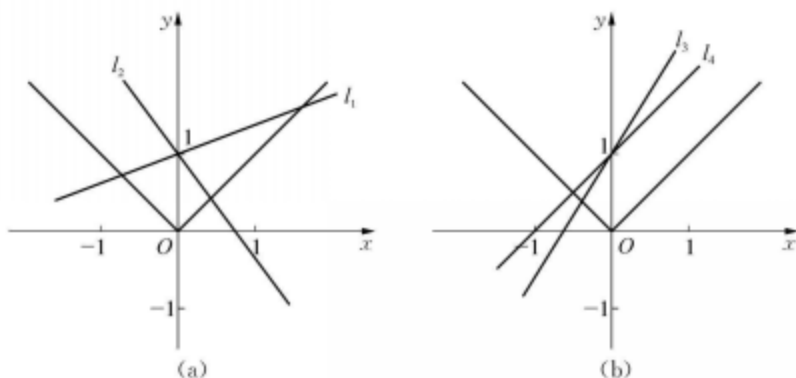


图 1-2

如图 1-2(b) 所示, 当  $a \geq 1$  时, 直线  $l_3, l_4$  过点  $(0, 1)$ , 与函数  $y = |x|$  的图像只有横坐标为负数的交点,

所以, 所求实数  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ .

**知识点 1.3** 关于求不等式  $f(x) < 0$  (或  $f(x) > 0$ ) 的解, 只要作出函数  $y = f(x)$  的图像, 观察  $x$  轴下方 (或上方) 部分图像的横坐标的范围, 就是不等式  $f(x) < 0$  (或  $f(x) > 0$ ) 的解.

**例 1-6** 已知函数  $f(x) = x^2 + 2mx + m^2 + m - 1$ , 若当  $x \in [-1, 0]$  时, 恒有  $f(x) < 0$ , 求实数  $m$  的取值范围.

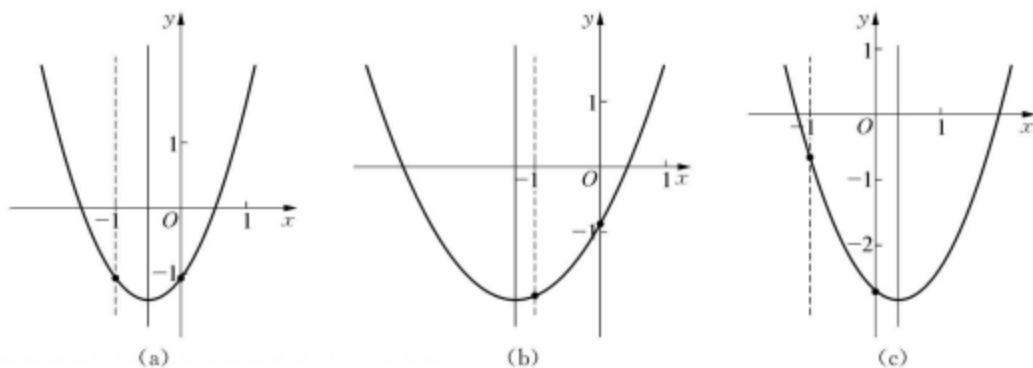


图 1-3

提示: 作函数  $y = f(x)$  的图像.

(1) 如图 1-3(a) 所示, 二次函数对称轴位于两条直线  $x = -1, x = 0$  之间;

(2) 如图 1-3(b) 所示, 对称轴位于直线  $x=-1$  的左边;

(3) 如图 1-3(c) 所示, 对称轴位于直线  $x=0$  的右边.

如图 1-3 所示, 要使当  $x \in [-1, 0]$  时, 恒有  $f(x) < 0$  成立, 以上三种情况都必须

$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$$

解: 要满足题意, 必须  $\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(0) < 0. \end{cases}$  得  $\begin{cases} 1-2m+m^2+m-1 < 0, \\ m^2+m-1 < 0. \end{cases}$

即  $\begin{cases} m(m-1) < 0, \\ \left(m+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}. \end{cases}$  解得  $0 < m < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

所以, 当  $m \in \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ,  $x \in [-1, 0]$  时, 恒有  $f(x) < 0$ .

评论: 对于二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ), 当  $x \in (m, n)$  时,  $f(x) < 0$  的充要条件为  $\begin{cases} f(m) < 0, \\ f(n) < 0. \end{cases}$

**例 1-7** 已知函数  $f(x) = \lg(1+2^x+3^x+5^x \cdot a)$ , 对  $x \in (-\infty, 2)$  恒有意义, 求实数  $a$  的取值范围.

提示: 分离常数  $a$ , 解出关于  $x$  函数的值域.

解: 当  $x \in (-\infty, 2)$  时, 要使函数  $f(x) = \lg(1+2^x+3^x+5^x \cdot a)$  恒有意义, 必须  $1+2^x+3^x+5^x \cdot a > 0$ , 移项得  $5^x \cdot a > -3^x - 2^x - 1$ , 因为  $5^x > 0$ ,

不等式两边同除以  $5^x$  得,  $a > -\left(\frac{3}{5}\right)^x - \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{1}{5}\right)^x$ , (1)

作函数  $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$  和函数  $y = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$  的图像(见图 1-4(a)、(b)),

所以,  $y = -\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 、 $y = -\left(\frac{2}{5}\right)^x$ 、 $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$  均为增函数.

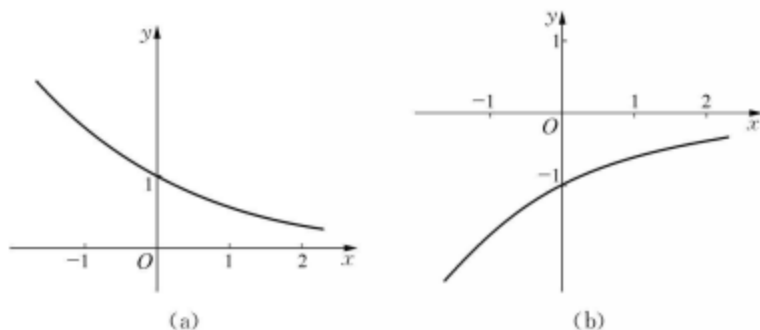


图 1-4

如图 1-4(b) 所示, 当  $x=2$  时,  $-\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{14}{25}$ , 因此  $a \geq -\frac{14}{25}$ .