

2018年陕西普通高等学校优秀教材

■ 高等数学精品课教材

高等数学

下册

第三版

ADVANCED MATHEMATICS

主 编 薛利敏 赵小鹏



西北大学出版社

2018 年陕西普通高等学校优秀教材

高等数学下册

(第三版)

主 编 薛利敏 赵小鹏

副主编 朱天民 关文吉 唐 平 王荣波

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册 / 薛利敏, 赵小鹏主编. —3版. —西安:
西北大学出版社, 2014.6 (2019.6重印)
ISBN 978-7-5604-3408-7

I. ①高… II. ①薛… ②赵… III. ①高等数学—高等学校—
教材 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第128672号

高等数学(下册)

主 编 薛利敏 赵小鹏
出版发行 西北大学出版社
地 址 西安市太白北路229号
邮 编 710069
电 话 029-88303059
经 销 全国新华书店
印 装 陕西向阳印务有限公司
开 本 710毫米×1000毫米 1/16
印 张 21.875
字 数 368千
版 次 2004年8月第1版
2014年6月第3版
印 次 2019年6月第11次印刷
书 号 ISBN 978-7-5604-3408-7
定 价 42.00元

目 录

第七章 向量代数与空间解析几何	(1)
第一节 空间直角坐标系	(1)
§ 7.1.1 空间直角坐标系	(1)
§ 7.1.2 空间两点间的距离	(3)
习题 7.1	(3)
第二节 向量及其线性运算	(4)
§ 7.2.1 向量的概念	(4)
§ 7.2.2 向量的线性运算	(4)
§ 7.2.3 向量的坐标表示	(5)
§ 7.2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式	(7)
习题 7.2	(9)
第三节 数量积 向量积 *混合积	(9)
§ 7.3.1 向量的数量积	(9)
§ 7.3.2 向量的向量积	(11)
*§ 7.3.3 向量的混合积	(13)
习题 7.3	(15)
第四节 平面及其方程	(15)
§ 7.4.1 平面的点法式方程	(15)
§ 7.4.2 平面的一般式方程	(16)
§ 7.4.3 两平面的夹角	(18)
§ 7.4.4 点到平面的距离	(18)
习题 7.4	(19)
第五节 空间直线及其方程	(20)
§ 7.5.1 空间直线的对称式方程与参数方程	(20)
§ 7.5.2 空间直线的一般式方程	(21)
§ 7.5.3 两直线的夹角	(22)
§ 7.5.4 直线与平面的夹角	(23)
习题 7.5	(25)
第六节 曲面及其方程	(26)
§ 7.6.1 曲面方程的概念	(26)

§ 7.6.2	旋转曲面	(27)
§ 7.6.3	柱面	(28)
习题 7.6		(29)
第七节	常见二次方程及其二次曲面	(30)
§ 7.7.1	椭球面	(30)
§ 7.7.2	双曲面	(31)
§ 7.7.3	抛物面	(31)
习题 7.7		(33)
第八节	空间曲线及其方程	(33)
§ 7.8.1	空间曲线的一般方程	(33)
§ 7.8.2	空间曲线的参数方程	(34)
§ 7.8.3	空间曲线在坐标面上的投影	(35)
习题 7.8		(37)
总习题七		(37)
第八章	多元函数微分法及其应用	(41)
第一节	多元函数的基本概念	(41)
§ 8.1.1	预备知识	(41)
§ 8.1.2	多元函数的概念	(42)
§ 8.1.3	多元函数的极限	(44)
§ 8.1.4	多元函数的连续性	(46)
习题 8.1		(48)
第二节	偏导数	(49)
§ 8.2.1	偏导数的定义及计算	(49)
§ 8.2.2	二元函数偏导数的几何意义	(51)
§ 8.2.3	高阶偏导数	(52)
习题 8.2		(53)
第三节	全微分及其应用	(54)
§ 8.3.1	全微分的概念	(54)
§ 8.3.2	全微分与偏导数的关系	(54)
* § 8.3.3	全微分在近似计算及误差估计中的应用	(56)
习题 8.3		(58)
第四节	多元复合函数的求导法则	(58)
§ 8.4.1	复合函数的一阶偏导数、全导数	(59)
§ 8.4.2	多元复合函数的高阶偏导数	(62)
§ 8.4.3	全微分的运算性质及全微分的形式不变性	(63)

习题 8.4	(64)
第五节 隐函数及其微分法	(65)
§ 8.5.1 一个方程的情形	(65)
§ 8.5.2 方程组的情形	(67)
习题 8.5	(69)
第六节 多元函数微分法在几何中的应用	(70)
§ 8.6.1 空间曲线的切线及法平面	(70)
§ 8.6.2 曲面的切平面及法线	(72)
习题 8.6	(74)
第七节 方向导数与梯度	(75)
§ 8.7.1 方向导数	(75)
§ 8.7.2 梯度	(78)
习题 8.7	(80)
第八节 多元函数的极值及其求法	(81)
§ 8.8.1 多元函数极值的概念	(81)
§ 8.8.2 多元函数极值的求法	(81)
§ 8.8.3 条件极值 拉格朗日乘数法	(85)
习题 8.8	(89)
总习题八	(90)
第九章 重积分	(93)
第一节 二重积分的概念与性质	(93)
§ 9.1.1 二重积分的概念	(93)
§ 9.1.2 二重积分的性质	(97)
习题 9.1	(100)
第二节 二重积分的计算法	(101)
§ 9.2.1 二重积分在直角坐标系中的计算法	(101)
习题 9.2(1)	(110)
§ 9.2.2 二重积分在极坐标系中的计算法	(110)
习题 9.2(2)	(118)
第三节 二重积分的应用	(119)
§ 9.3.1 曲面的面积	(120)
§ 9.3.2 平面薄片的重心	(123)
§ 9.3.3 平面薄片的转动惯量	(126)
§ 9.3.4 平面薄片对质点的引力	(128)
习题 9.3	(129)

第四节	三重积分的概念及其算法	(129)
§ 9.4.1	三重积分的概念	(129)
§ 9.4.2	三重积分在直角坐标系中的算法	(131)
习题 9.4		(136)
*第五节	利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	(137)
§ 9.5.1	利用柱面坐标计算三重积分	(137)
§ 9.5.2	利用球面坐标计算三重积分	(140)
§ 9.5.3	三重积分的应用举例	(143)
习题 9.5		(147)
总习题九		(148)
第十章	曲线与曲面积分	(153)
第一节	对弧长的曲线积分	(153)
§ 10.1.1	对弧长的曲线积分的概念与性质	(153)
§ 10.1.2	对弧长的曲线积分的算法	(155)
习题 10.1		(157)
第二节	对坐标的曲线积分	(158)
§ 10.2.1	对坐标的曲线积分的概念与性质	(158)
§ 10.2.2	对坐标的曲线积分的算法	(161)
*§ 10.2.3	两类曲线积分之间的关系	(163)
习题 10.2		(165)
第三节	格林公式及其应用	(166)
§ 10.3.1	格林公式	(167)
§ 10.3.2	平面上曲线积分与路径无关的条件	(171)
*§ 10.3.3	二元函数的全微分的求积	(174)
习题 10.3		(176)
*第四节	对面积的曲面积分	(177)
习题 10.4		(181)
*第五节	对坐标的曲面积分	(182)
§ 10.5.1	对坐标的曲面积分的概念与性质	(182)
§ 10.5.2	对坐标的曲面积分的算法	(186)
§ 10.5.3	两类曲面积分的关系	(188)
习题 10.5		(189)
*第六节	高斯公式和斯托克斯公式	(191)
§ 10.6.1	高斯公式	(191)
§ 10.6.2	斯托克斯公式	(195)

习题 10.6	(197)
总习题十	(198)
第十一章 无穷级数	(202)
第一节 常数项级数的概念和性质	(202)
§ 11.1.1 常数项级数的概念	(202)
§ 11.1.2 级数的基本性质	(205)
习题 11.1	(208)
第二节 常数项级数的审敛法	(209)
§ 11.2.1 正项级数及其审敛法	(209)
§ 11.2.2 交错级数及其审敛法	(214)
§ 11.2.3 绝对收敛与条件收敛	(215)
习题 11.2	(216)
第三节 幂级数	(217)
§ 11.3.1 函数项级数的概念	(217)
§ 11.3.2 幂级数及其收敛性	(218)
§ 11.3.3 幂级数的运算	(221)
习题 11.3	(224)
第四节 函数展开成幂级数	(224)
§ 11.4.1 泰勒级数	(224)
§ 11.4.2 函数展开成幂级数	(226)
* § 11.4.3 幂级数展开式的应用	(230)
习题 11.4	(233)
* 第五节 傅里叶级数	(233)
§ 11.5.1 三角函数系 三角级数	(233)
§ 11.5.2 函数展开成傅里叶级数	(234)
习题 11.5	(239)
* 第六节 正弦级数与余弦级数	(239)
§ 11.6.1 奇函数和偶函数的傅里叶级数	(239)
§ 11.6.2 函数展开成正弦级数或余弦级数	(241)
习题 11.6	(242)
* 第七节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	(243)
* 习题 11.7	(244)
总习题十一	(244)
第十二章 微分方程	(248)
第一节 微分方程的基本概念	(248)

§ 12.1.1	引例	·····	(248)
§ 12.1.2	微分方程的概念	·····	(250)
习题 12.1		·····	(253)
第二节	可分离变量的微分方程	·····	(254)
习题 12.2		·····	(259)
第三节	齐次方程	·····	(259)
§ 12.3.1	齐次方程	·····	(260)
*§ 12.3.2	可化为齐次方程的方程	·····	(263)
习题 12.3		·····	(265)
第四节	一阶线性微分方程	·····	(266)
§ 12.4.1	线性方程	·····	(266)
§ 12.4.2	伯努利方程	·····	(269)
习题 12.4		·····	(271)
第五节	全微分方程	·····	(272)
习题 12.5		·····	(275)
第六节	可降阶的高阶微分方程	·····	(276)
§ 12.6.1	$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	·····	(276)
§ 12.6.2	$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	·····	(277)
§ 12.6.3	$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	·····	(281)
习题 12.6		·····	(283)
第七节	二阶常系数齐次线性微分方程	·····	(284)
§ 12.7.1	二阶线性微分方程的概念	·····	(284)
§ 12.7.2	线性微分方程解的结构	·····	(286)
*§ 12.7.3	常数变易法	·····	(288)
§ 12.7.4	二阶常系数齐次线性微分方程	·····	(291)
习题 12.7		·····	(295)
第八节	二阶常系数非齐次线性微分方程	·····	(296)
§ 12.8.1	$f(x) = P_m(x)e^{cx}$ 型	·····	(296)
§ 12.8.2	$f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ 型	·····	(299)
习题 12.8		·····	(304)
*第九节	欧拉方程	·····	(305)
习题 12.9		·····	(306)
目	总习题十二	·····	(307)
录	附录 二阶行列式和三阶行列式简介	·····	(311)
◇	习题答案与提示	·····	(313)

第七章 向量代数与空间解析几何

平面解析几何是在平面直角坐标系的基础上用代数的方法研究平面几何问题. 同样, 空间解析几何是在空间直角坐标系的基础上用代数的方法研究空间几何问题. 像平面解析几何是研究一元函数微积分学的基础一样, 向量代数与空间解析几何是研究多元函数微积分学的基础. 本章首先建立空间直角坐标系, 其次引进向量并介绍向量的运算, 然后以向量为工具讨论空间的平面和直线, 最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节 空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置, 我们建立了平面直角坐标系. 同样, 为了确定空间一点的位置, 我们要建立空间直角坐标系. 像平面直角坐标系是平面解析几何的基础一样, 空间直角坐标系是空间解析几何的基础.

§ 7.1.1 空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴, 它们都以定点 O 为原点, 且一般取相同的长度单位, 这三条数轴分别为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 它们的正方向符合右手系(当右手的四个手指由 x 正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向). 通常将 x 轴、 y 轴放置在水平面上, z 轴为铅垂线, 见图 7-1 所示, 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系, 点 O 称为坐标原点. 每两条坐标轴确定的平面称为坐标面, 分别是 xOy 面、 yOz 面和 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分, 称为八个卦限, 并逐个编号为 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, 分别称为第一卦限, 第二卦限, ..., 第八卦限, 如图 7-2.

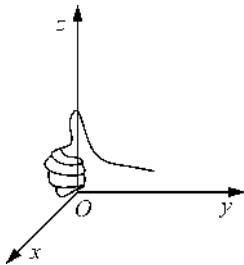


图 7-1

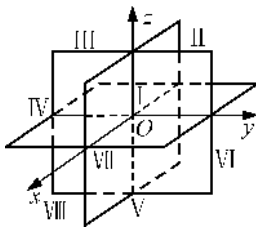


图 7-2

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧,见图 7-1,及正等侧,见图 7-3.

设 M 为空间的一点(见图 7-4),过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面,

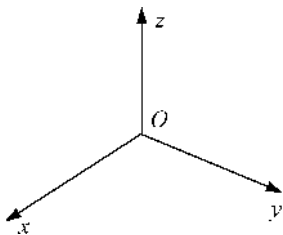


图 7-3

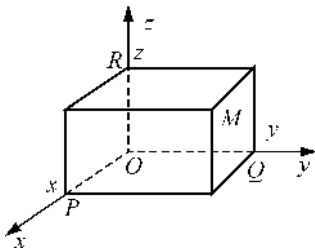


图 7-4

它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R , 其坐标依次为 x, y, z , 从而得到一个有序数组 (x, y, z) ; 反之, 给定一有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别作 $OP = x, OQ = y, OR = z$, 然后过 P, Q, R 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 这三个平面确定了惟一的交点 M . 这样, 空间点 M 就与有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系. 称 (x, y, z) 为点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$; x 轴、 y 轴和 z 轴上点的坐标的形式分别为 $(x, 0, 0)$ 、 $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$; xOy 面、 yOz 面和 zOx 面上点的坐标的形式分别为 $(x, y, 0)$ 、 $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$.

注意, 图 7-4 中的点 P , 虽然它在 x 轴上的坐标是 x , 但是它的空间直角坐标却是 $(x, 0, 0)$, 而不是 x .

例 1 设 P 是空间内一点, 其坐标为 (x, y, z) , 即 $P(x, y, z)$, 求:

- (1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?
- (2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得

- (1) 点 $P(x, y, z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x, 0, 0)$;
 点 $P(x, y, z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0, y, 0)$;
 点 $P(x, y, z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0, 0, z)$.
- (2) 点 $P(x, y, z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足坐标为 $(x, y, 0)$;
 点 $P(x, y, z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足坐标为 $(0, y, z)$;
 点 $P(x, y, z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足坐标为 $(x, 0, z)$.

例 2 求点 $P(1, 2, 3)$ 关于各坐标轴、坐标面及原点对称点的坐标.

解 根据点与坐标及对称性的关系得

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1, -2, -3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于原点对称点的坐标为 $(-1,-2,-3)$.

注 两个点关于某平面(或轴)对称,是指这两点的连线垂直于该平面(或轴)且被该平面(或轴)平分;两个点关于某点对称,是指这两点的连线通过该点且被该点所平分.

§ 7.1.2 空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点,过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7-5). 因为

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 \\ &\quad + |NM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上,所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$,根据题意有 $|MA| = |MB|$,即

$$\begin{aligned} &\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2} \end{aligned}$$

化简得 $z = \frac{14}{9}$,故所求的点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

习题 7.1

1. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点?指出下列各点的位置.

$A(3,4,0); B(0,1,2); C(3,0,0); D(0,-1,0)$.

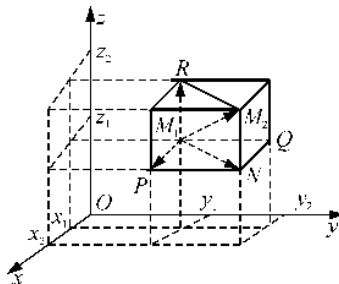


图 7-5

2. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?
3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.
4. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到原点及各坐标轴的距离.
5. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.
6. 证明 $P_1(1, 2, 3), P_2(2, 3, 1), P_3(3, 1, 2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节 向量及其线性运算

§ 7.2.1 向量的概念

在研究力学、物理学以及其它应用学科时, 常会遇到这样的一类量, 它们既有大小, 又有方向, 如力、力矩、位移、速度、加速度等, 我们将这种既有大小又有方向的量, 称为向量(或矢量).

在数学上, 往往用有向线段来表示向量, 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向, 以 M_1 为起点, M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (见图 7-6). 有时也用一个黑体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量, 如 \mathbf{a}, \vec{a} . 向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数), 如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, \mathbf{a} 的模为 $|\mathbf{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量, 模为零的向量称为零向量, 记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$, 其方向可任意选取.



图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量, 即只考虑向量的大小和方向, 而不论它的起点在什么地方, 这种向量称为自由向量. 由于我们只讨论自由向量, 所以如果两个向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的模相等且方向相同, 我们就说向量 \mathbf{a} 与向量 \mathbf{b} 是相等的, 记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 从几何直观来看, 就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反, 就称这两个向量平行, 向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 平行, 记作 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$.

§ 7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} , 任取一点 A , 作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 连接

AC (见图 7-7(a)), 向量 $\overrightarrow{AC} = c$ 称为向量 a 与向量 b 的和, 记作 $a+b$, 即 $c = a+b$. 这就是向量加法的三角形法则.

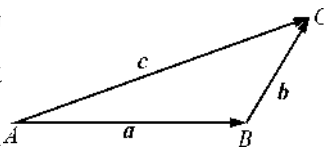


图 7-7(a)

仿此, 也有向量加法的平行四边形法则: 当向量 a 与 b 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC (图 7-7(b)), 向量 \overrightarrow{AC} 即等于向量 a 与 b 的和 $a+b$.

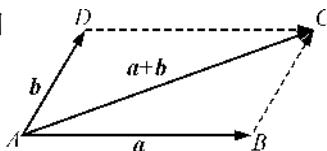


图 7-7(b)

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $a+b = b+a$;
- (2) 结合律 $(a+b)+c = a+(b+c)$.

见图 7-7(c).

设 a 为一向量, 与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$, 由此, 我们规定 $b+(-a)$ 称为向量 b 与 a 的差, 记作 $b-a = b+(-a)$ (见图 7-8).

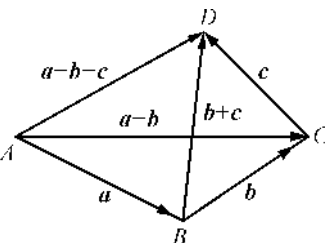


图 7-7(c)

2. 向量与数的乘法

设 a 是一个非零向量, λ 是一个非零实数, 则 a 与 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 且

- (1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;
- (2) λa 的方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, 与 a 反向.

如果 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$, 则规定 $\lambda a = 0$.

容易验证, 向量与数的乘法满足以下运算规律:

- (1) 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
- (2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
 $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

其中 λ, μ 都是常数.

设 a 是非零向量, 由数乘向量的规定可知, 向量 $\frac{a}{|a|}$ 的模等于 1, 且与 a 同方向, 记作 a° , 即 $a^\circ = \frac{a}{|a|}$. 显然 $a = |a| a^\circ$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

§ 7.2.3 向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具, 需将向量运算用代数表示. 因此,

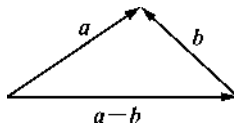


图 7-8(a)

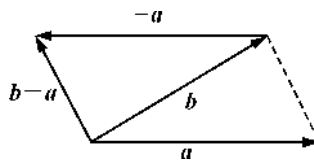


图 7-8(b)

在空间直角坐标系中,若将向量的始点移到坐标原点 O ,则这个向量完全由其终点确定;反过来,任给空间一点 M ,总可以确定一个向量 \overrightarrow{OM} ,就是说,空间的点与始点为原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量,分别记作 i, j, k .

设向量 a 的起点在坐标原点,终点坐标为 $M(x, y, z)$,过终点 M 作与坐标轴垂直的平面,其垂足依次为 P, Q, R (见图 7-9),由向量的加法及数乘向量运算,有

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QR} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \end{aligned}$$

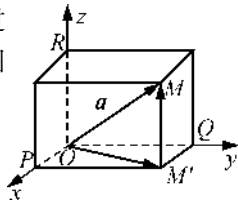


图 7-9

即

$$a = xi + yj + zk \quad (1)$$

称(1)式为向量 a 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便,亦记

$$a = (x, y, z) \quad (2)$$

称(2)式为向量 a 的坐标表示式.

将向量 $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中,如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$,根据向量的线性运算(见图 7-10),得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k) \\ &= (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k, \end{aligned}$$

若记 $x_2 - x_1 = a_x, y_2 - y_1 = a_y, z_2 - z_1 = a_z$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= a = a_xi + a_yj + a_zk \\ &= (a_x, a_y, a_z). \end{aligned} \quad (3)$$

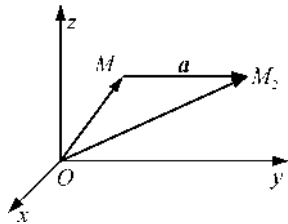


图 7-10

a_x, a_y, a_z 称为向量 a 的坐标. 利用向量的坐标,可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $a = a_xi + a_yj + a_zk, b = b_xi + b_yj + b_zk$, 于是

$$\begin{aligned} a \pm b &= (a_xi + a_yj + a_zk) \pm (b_xi + b_yj + b_zk) \\ &= (a_x \pm b_x)i + (a_y \pm b_y)j + (a_z \pm b_z)k, \end{aligned}$$

即

$$a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

即

$$\begin{aligned} \lambda a &= \lambda(a_xi + a_yj + a_zk) = \lambda a_xi + \lambda a_yj + \lambda a_zk, \\ \lambda a &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \quad (\lambda \text{ 为常数}) \end{aligned}$$

例 1 设有二非零向量 $a = (a_x, a_y, a_z), b = (b_x, b_y, b_z)$, 证明: $a \parallel b$ 的充分必要条件是 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$.

证明 先证必要性. 如果 $a \parallel b$, 根据数乘向量的规定, $a = \lambda b$ 且 $\lambda \neq 0$, 即

有 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 根据二向量相等有

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

再证充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, 设其比为 λ , 于是 $a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, 即 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 则 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} // \mathbf{b}$.

例 2 设 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 为已知两点, 而在 AB 直线上的点 M 分有向线段 \overrightarrow{AB} 为两个有向线段 \overrightarrow{AM} 和 \overrightarrow{MB} , 使它们的值的比等于某数 $\lambda (\lambda \neq -1)$, 即

$$\frac{AM}{MB} = \lambda,$$

求分点 M 的坐标 (x, y, z) .

解 因为 \overrightarrow{AM} 与 \overrightarrow{MB} 在一直线上 (见图 7-11), 所以依题意有

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

而

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$.

即 $(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda} [(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)]$

$$= \frac{1}{1+\lambda} (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2).$$

由此即得点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

点 M 叫做有向线段 \overrightarrow{AB} 的定比分点. 当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 是有向线段 \overrightarrow{AB} 的中点, 其坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 7.2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示, 也可以用它的坐标来表示, 为了应用上的方便, 有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 根据两点间距离公式

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{M_1 M_2}|$$

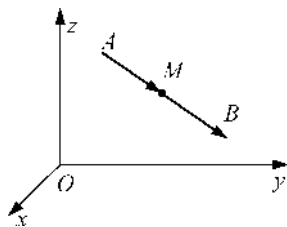


图 7-11

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \end{aligned}$$

即

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (4)$$

对于非零向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, 我们可以用它与三条坐标轴的夹角 α, β, γ ($0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi, 0 \leq \gamma \leq \pi$) 来表示它的方向(见图 7-12), 称 α, β, γ 为非零向量 \mathbf{a} 的方向角, 称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.

因为 $\triangle M_1PM_2, \triangle M_1QM_2, \triangle M_1RM_2$ 都是直角三角形, 所以

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases} \quad (5)$$

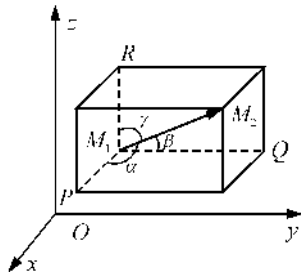


图 7-12

(4) 式和(5)式是用向量的坐标表示向量的模与方向余弦的公式.

由(5)式易得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (6)$$

即任一非零向量的方向余弦的平方和为 1.

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则有

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} (a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

\mathbf{a}° 表示与非零向量 \mathbf{a} 同方向的单位向量, 它可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2, 2, \sqrt{2}), M_2(1, 3, 0)$, 求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2}),$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

*** 例 4** 设向量 \mathbf{a} 的两个方向余弦为 $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}$, 又 $|\mathbf{a}| = 6$, 求向

量 \mathbf{a} 的坐标.