2018年陕西普通高等学校优秀教材

高等数学精品课教材

高等数学 下册

第三版

ADVANCED MATHEMATICS

主编 薛利敏 赵小鹏

西北大学出版社

2018 年陕西普通高等学校优秀教材

高等数学 下册

（第三版）

主　编　薛利敏　赵小鹏

副主编　朱天民　关文吉　唐　平　王荣波

西北大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.下册 / 薛利敏，赵小鹏主编. —3版. —西安：西北大学出版社，2014.6（2019.6重印）

ISBN 978-7-5604-3408-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①薛… ②赵… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字 (2014) 第128672号

高等数学（下册）

主　　编　薛利敏　赵小鹏
出版发行　西北大学出版社
地　　址　西安市太白北路229号
邮　　编　710069
电　　话　029-88303059
经　　销　全国新华书店
印　　装　陕西向阳印务有限公司
开　　本　710毫米×1000毫米　1/16
印　　张　21.875
字　　数　368千
版　　次　2004年8月第1版
　　　　　2014年6月第3版
印　　次　2019年6月第11次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5604-3408-7
定　　价　42.00元

目　录

第七章　向量代数与空间解析几何

平面解析几何是在平面直角坐标系的基础上用代数的方法研究平面几何问题.同样,空间解析几何是在空间直角坐标系的基础上用代数的方法研究空间几何问题.像平面解析几何是研究一元函数微积分学的基础一样,向量代数与空间解析几何是研究多元函数微积分学的基础.本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置,我们建立了平面直角坐标系.同样,为了确定空间一点的位置,我们要建立空间直角坐标系.像平面直角坐标系是平面解析几何的基础一样,空间直角坐标系是空间解析几何的基础.

§7.1.1　空间直角坐标系

过空间一定点O作三条两两垂直的数轴,它们都以定点O为原点,且一般取相同的长度单位,这三条数轴分别为x轴(横轴)、y轴(纵轴)、z轴(竖轴).它们的正向符合右手系(当右手的四个手指由x正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向y轴的正向时,大拇指的指向就是z轴的正向).通常将x轴、y轴放置在水平面上,z轴为铅垂线,见图7-1所示,这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系,点O称为坐标原点.每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是xOy面、yOz面和zOx面.三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限,并逐个编号为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ,分别称为第一卦限,第二卦限,…,第八卦限,如图7-2.

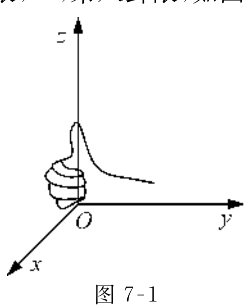

图 7-1

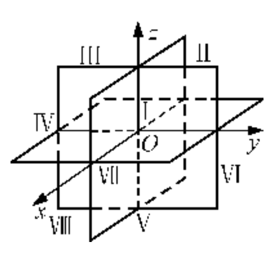

图 7-2

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧，见图 7-1，及正等侧，见图 7-3.

设 M 为空间的一点(见图 7-4)，过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面，

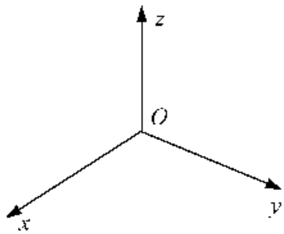

图 7-3

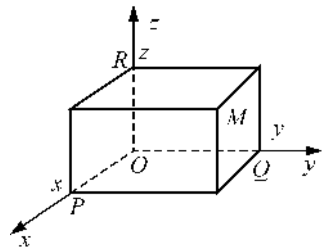

图 7-4

它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，其坐标依次为 x,y,z，从而得到一个有序数组 (x,y,z)；反之，给定一有序数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $OP=x,OQ=y,OR=z$，然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面确定了惟一的交点 M. 这样，空间点 M 就与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称 (x,y,z) 为点 M 的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

原点的坐标为 $O(0,0,0)$；x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标的形式分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；xOy 面、yOz 面和 zOx 面上点的坐标的形式分别为 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$.

注意，图 7-4 中的点 P，虽然它在 x 轴上的坐标是 x，但是它的空间直角坐标却是 $(x,0,0)$，而不是 x.

例 1 设 P 是空间内一点，其坐标为 (x,y,z)，即 $P(x,y,z)$，求：

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何？

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何？

解 根据点与坐标的关系得

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足坐标为 $(x,y,0)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足坐标为 $(0,y,z)$；

点 $P(x,y,z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足坐标为 $(x,0,z)$.

例 2 求点 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴、坐标面及原点对称点的坐标.

解 根据点与坐标及对称性的关系得

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为$(-1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为$(-1,-2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为$(1,2,-3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为$(-1,2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为$(1,-2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于原点对称点的坐标为$(-1,-2,-3)$.

注　两个点关于某平面(或轴)对称,是指这两点的连线垂直于该平面(或轴)且被该平面(或轴)平分;两个点关于某点对称,是指这两点的连线通过该点且被该点所平分.

§7.1.2　空间两点间的距离

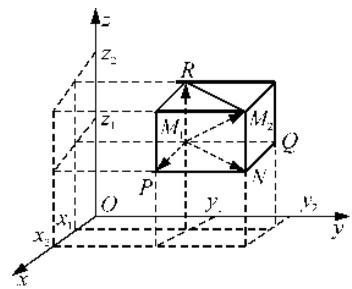

图 7-5

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(见图 7-5).因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2+|NM_2|^2\\ &= |M_1P|^2+|M_1Q|^2\\ &\quad +|NM_2|^2\\ &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 3　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上,所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$,根据题意有 $|MA|=|MB|$,即

$$\begin{aligned}&\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}\\ =&\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}\end{aligned}$$

化简得 $z=\dfrac{14}{9}$,故所求的点为 $M(0,0,\dfrac{14}{9})$.

习题 7.1

1. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点?指出下列各点的位置.
   $A(3,4,0)$;$B(0,1,2)$;$C(3,0,0)$;$D(0,-1,0)$.

2. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴上和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

4. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

5. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

6. 证明 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节　向量及其线性运算

§7.2.1　向量的概念

在研究力学、物理学以及其它应用学科时，常会遇到这样的一类量，它们既有大小，又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，我们将这种既有大小又有方向的量，称为向量（或矢量）.

在数学上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（见图 7-6）. 有时也用一个黑体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模（也称为向量的范数），如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可任意选取.

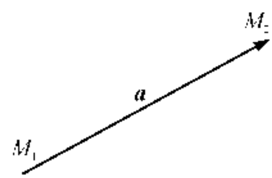

图 7-6

在这里我们只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种向量称为自由向量. 由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看，就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

§7.2.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接

AC(见图 7-7(a)),向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$的和,记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的三角形法则.

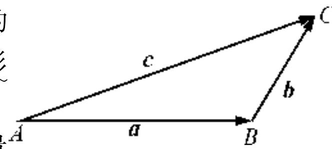

图 7-7(a)

仿此,也有向量加法的平行四边形法则:当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以$AB$、$AD$为边作一平行四边形$ABCD$,连接对角线$AC$(图 7-7(b)),向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

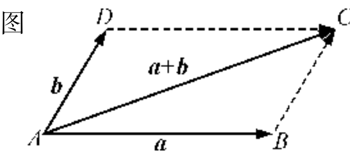

图 7-7(b)

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

见图 7-7(c).

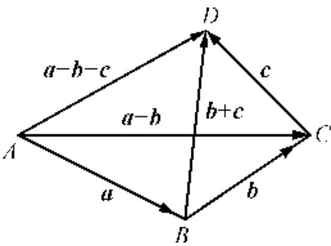

图 7-7(c)

设$\boldsymbol{a}$为一向量,与$\boldsymbol{a}$的模相等而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的负向量,记作$-\boldsymbol{a}$,由此,我们规定$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$称为向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差,记作$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$(见图 7-8).

2. 向量与数的乘法

设$\boldsymbol{a}$是一个非零向量,λ是一个非零实数,则$\boldsymbol{a}$与λ的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$,规定$\lambda\boldsymbol{a}$是一个向量,且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2)$\lambda\boldsymbol{a}$的方向为:当$\lambda>0$时,与$\boldsymbol{a}$同向;当$\lambda<0$时,与$\boldsymbol{a}$反向.

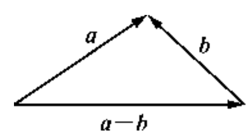

图 7-8(a)

如果$\lambda=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,则规定$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证,向量与数的乘法满足以下运算规律:

(1) 结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

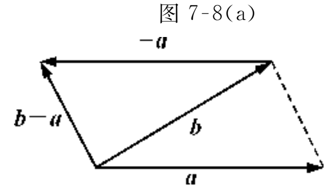

图 7-8(b)

其中λ,μ都是常数.

设$\boldsymbol{a}$是非零向量,由数乘向量的规定可知,向量$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的模等于1,且与$\boldsymbol{a}$同方向,记作$\boldsymbol{a}^{\circ}$,即$\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 显然$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

§7.2.3　向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具,需将向量运算用代数表示. 因此,

在空间直角坐标系中，若将向量的始点移到坐标原点 O，则这个向量完全由其终点确定；反过来，任给空间一点 M，总可以确定一个向量$\overrightarrow{OM}$，就是说，空间的点与始点为原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标为 $M(x,y,z)$，过终点 M 作与坐标轴垂直的平面，其垂足依次为 P,Q,R(见图 7-9)，由向量的加法及数乘向量运算，有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

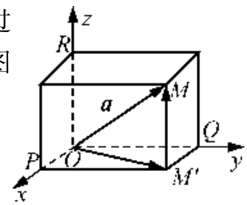

图 7-9

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

称(1) 式为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便，亦记

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z) \tag{2}$$

称(2) 式为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

将向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中，如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，根据向量的线性运算(见图 7-10)，得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$
$$=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

若记 $x_2-x_1=a_x,y_2-y_1=a_y,z_2-z_1=a_z$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$
$$=(a_x,a_y,a_z). \tag{3}$$

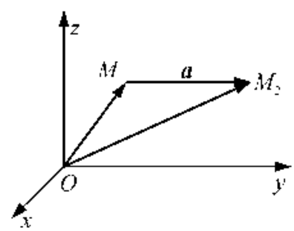

图 7-10

a_x,a_y,a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 利用向量的坐标，可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，于是

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$
$$=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

即
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z).$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k},$$

即
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z). \quad (\lambda \text{ 为常数})$$

例 1 设有二非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，证明：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是$\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

证明 先证必要性. 如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 且 $\lambda\neq 0$，即

有$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，根据二向量相等有

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z,$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

再证充分性. 如果$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$，设其比为$\lambda$，于是$a_x=\lambda b_x,a_y=\lambda b_y,a_z=\lambda b_z$，即$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，则$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

例 2 设$A(x_1,y_1,z_1)$和$B(x_2,y_2,z_2)$为已知两点，而在AB直线上的点M分有向线段$\overrightarrow{AB}$为两个有向线段$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{MB}$，使它们的值的比等于某数$\lambda(\lambda\neq-1)$，即

$$\frac{AM}{MB}=\lambda,$$

求分点M的坐标(x,y,z).

解 因为$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{MB}$在一直线上(见图 7-11)，所以依题意有

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}.$$

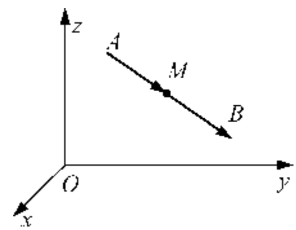

图 7-11

而

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此 $$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}).$$

即 $$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}[(x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2)]$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2).$$

由此即得点M的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点M叫做有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点. 当$\lambda=1$时，点M是有向线段$\overrightarrow{AB}$的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

§7.2.4 向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量可以用它的模和方向来表示，也可以用它的坐标来表示，为了应用上的方便，有必要找出这两种表示法之间的联系.

设向量$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=\overrightarrow{M_1M_2}$，根据两点间距离公式

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

即

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{4}$$

对于非零向量$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$,我们可以用它与三条坐标轴的夹角 $\alpha,\beta,\gamma(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi)$ 来表示它的方向(见图 7-12),称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

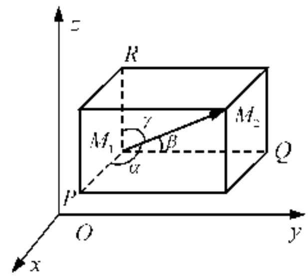

图 7-12

因为 $\triangle M_1PM_2, \triangle M_1QM_2, \triangle M_1RM_2$ 都是直角三角形,所以

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \end{cases} \tag{5}$$

(4) 式和(5) 式是用向量的坐标表示向量的模与方向余弦的公式.

由(5) 式易得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{6}$$

即任一非零向量的方向余弦的平方和为 1.

若 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,则有

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x, a_y, a_z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

$\boldsymbol{a}^\circ$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,它可由其方向余弦表示.

例 3 已知 $M_1(2,2,\sqrt{2}), M_2(1,3,0)$,求$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 1, -\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2;$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3}{4}\pi.$$

* **例 4** 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}, \cos\beta = \dfrac{2}{3}$,又 $|\boldsymbol{a}| = 6$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.