湘教版

初中数学创新培优读本

CHUZHONG SHUXUE
CHUANGXIN PEIYOU DUBEN

唐作明　邓革周　编著

8年级

见数学之好玩　展数学之魅力　以创新之精神　起培优之效用

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

湘教版初中数学创新培优读本. 八年级 / 唐作明，邓革周编著. —长沙：湖南教育出版社，2016. 10

ISBN 978-7-5539-4413-5

Ⅰ. ①湘… Ⅱ. ①唐… ②邓… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 221318 号

湘教版初中教学创新培优读本

八年级

责任编辑：邹伟华

责任校对：刘　源　张　征

湖南教育出版社出版发行(长沙市韶山北路 443 号)

网　　址：http://www.hneph.com

电子邮箱：hnjycbs@sina.com

微信号：多点学习

湖南省新华书店经销　湖南天闻新华印务邵阳有限公司印刷

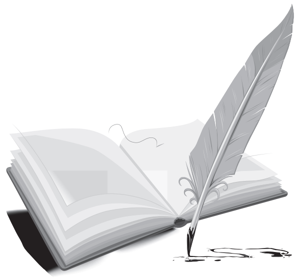
787×1092　16 开　印张：11.5　字数：250000

2016 年 10 月第 1 版　第 1 次印刷

ISBN 978-7-5539-4413-5

定　　价：25.00 元

前言



科学的生命在于创新精神，培养优秀人才的关键则在于培养受教育者的创新思维。对于可塑性极强的青少年，初中阶段的数学教育是培养学生创新思维的有效手段。对于初中学生来说，用自己的方法去解决一个数学问题时，或多或少展现了他们的创新能力。如果这种创新能力能引起他们的好奇心，能激发他们的兴趣，从而在他们的心中留下深刻的印象，这样的体验日积月累，就会养成善于思维的习惯，甚至影响到人的一生。因此，一个初中学生不能只把数学当作必修的知识，而应该把它当成人生最好的培养创新能力的手段。

一本好的初中数学教材，应该自始至终贯穿引导、培养创新思维这一主线，但因为教材的篇幅有限，它受到授课时数的严格控制，有些地方不得不择之过精，言之太略，所以还必须有一本好的配套课外读物。

这套创新培优读本就是为配合湘教版初中数学教材而编写的配套读物。

顾名思义，这套读本的目的是通过初中阶段的数学教育培养学生的创新思维，从而为培养优秀人才打下坚实的基础。它紧扣教材，与教学进度同步，对教材的内容发微导窍，提要钩玄，疑难处加以解释，省略处给予补充，与教材紧密配合，相得益彰。这套读本具有下述特点：

一、所选例题、习题特别强调命题理念与解题方法的创新。通过这些例题、

习题的训练，学生可以体会到在命题方式中如何调动知识，活学活用；在解题方法中，如何独具匠心，以简驭繁。

二、所选例题、习题都十分自然地体现出对文化素质的训练，不矫揉造作，不喧宾夺主，却能寓教于乐，使学生感到“数学好玩”，从而大大提高学生学习数学的兴趣。

三、所选例题、习题大多能与实际应用相结合，使学生从小就能体会到“数学之为用”，能有效地提高学生学习数学的自觉性和积极性。

这套读本自从 2007 年初版以来，十年的时间过去了。十年来深受读者欢迎，点赞有加，好评如潮。古人说“十年树木，百年树人”，这套读本，十年之间已经树立了自己的品牌；它也会像“随风潜入夜，润物细无声”那样，默默地，有效地为百年树人做出应有的贡献。

目录

八年级上册

目录

八年级下册

八年级【上册】

第1章 分 式

1.1 分式及其运算

知识精要

1. 分式$\frac{f}{g}$的值为零或值不存在的条件

当分子 $f=0$ 且分母 $g\neq 0$ 时，分式的值为 0.

当分母 $g=0$ 时，分式的值不存在，此时，也说分式无意义.

2. 分式的基本性质

分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个非零整式，所得分式与原分式相等，即对于分式$\frac{f}{g}$，有$\frac{f}{g}=\frac{f\cdot h}{g\cdot h}$，$\frac{f}{g}=\frac{f\div h}{g\div h}(h\neq 0)$.

3. 分式的运算

分式的加减运算：$\frac{f}{g}\pm\frac{h}{g}=\frac{f\pm h}{g}$，$\frac{f}{e}\pm\frac{h}{g}=\frac{fg\pm eh}{eg}$.

分式的乘除运算：$\frac{f}{g}\cdot\frac{u}{v}=\frac{fu}{gv}$，$\frac{f}{g}\div\frac{u}{v}=\frac{f}{g}\cdot\frac{v}{u}=\frac{fv}{gu}$.

分式的乘方：$\left(\frac{f}{g}\right)^n=\frac{f^n}{g^n}$.

4. 分式的化简求值

先化简，后代入求值是代数式化简求值问题的基本策略，有条件的化简求值题，条件可以直接使用、变形使用或综合使用，要与目标紧紧结合起来；无条件的化简求值题，要注意挖掘隐含条件，或通过分式巧妙变形，使得分子为 0 或分子分母构成倍分关系等特殊情况，再直接求出结果.

典例剖析

例 1 当 x 取何值时，分式$\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$有意义？当 x 为何值时，分式

$\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$的值为 0?

分析　分式有意义的条件是分母不等于 0，即$(x-1)(x+2)\neq 0$；分式的值为零的条件是分子为 0 而分母不为 0.

解　当$(x-1)(x+2)\neq 0$时，分式$\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$有意义，

解得 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$.

当 $x^2-1=0$ 且$(x-1)(x+2)\neq 0$时，分式$\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$的值为 0，

解得 $x=-1$.

方法归纳

在解答有关分式的值为 0 的问题时，不但要考虑其分子为 0，而且不能忽视分母不为 0，即只有在分式有意义的前提下，才能求分式的值.

例 2　化简：(1)$\dfrac{a+6a}{a^2+3a}-\dfrac{a^2-9}{a^2+6a+9}$；　　(2)$\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{4}{a^2-2a}\right)\div\dfrac{a+2}{a}$.

分析　(1)由于各分式的分子和分母有公因式，应先分解因式，再约分，最后进行计算较为简便.(2)先将括号内通分进行加减运算，再进行除法运算，括号内两项的公分母为 $a(a-2)$.

解　(1)原式$=\dfrac{a(a+6)}{a(a+3)}-\dfrac{(a+3)(a-3)}{(a+3)^2}=\dfrac{a+6}{a+3}-\dfrac{a-3}{a+3}=\dfrac{9}{a+3}$.

(2)原式$=\dfrac{a^2-4}{a(a-2)}\cdot\dfrac{a}{a+2}=\dfrac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)}\cdot\dfrac{a}{a+2}=1$.

方法归纳

解这类问题，要注意分式运算的顺序：分式的混合运算，先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的.分式运算的最后结果，分子、分母能约分的一定要约分，运算的结果要化成最简分式或整式.

例 3　先化简$\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}\div\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a}$，当 $b=-1$ 时，再从 $-2<a<2$ 的范围内选取一个合适的整数 a 代入求值.

分析　将分式化简，再把 $b=-1$ 代入后，分别讨论满足 $-2<a<2$ 的可能整数值所对应的分式的值.

解　原式$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)}\div\dfrac{(a+b)^2}{a}$

$=\dfrac{a+b}{a}\cdot\dfrac{a}{(a+b)^2}$

$=\dfrac{1}{a+b}$.

在 $-2<a<2$ 中，a 可取的整数为 -1，0，1，因此当 $b=-1$ 时，有以下情况：

①若 $a=-1$，则 $a^2-ab=0$，分式 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$ 无意义；

②若 $a=0$，则分式 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$，$\dfrac{2ab+b^2}{a}$ 均无意义；

③若 $a=1$，则 $a+b=0$，分式 $\dfrac{1}{a+b}$ 无意义.

所以 a 在规定的范围内取整数，原分式均无意义，即所求值不存在.

方法归纳

本题充分运用分类讨论思想将所有可能情况都考虑到，避免出现漏解现象．同时还要注意字母的取值能否使得分式有意义.

例 4 若 a，b 满足 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$，求 $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}$ 的值.

分析 根据分式的基本性质，把待求分式的分子和分母都除以 ab，再进行适当的变形，使之出现条件中的式子，把条件中的式子整体代入即可得解.

解 （方法 1）由 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$ 知 $ab\neq0$.

所以 $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}=\dfrac{\dfrac{a}{b}+1+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}+4+\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1}{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+4}=\dfrac{2+1}{2+4}=\dfrac{1}{2}$.

（方法 2）由 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2$ 知 $a\neq0$，$b\neq0$ 且 $a^2+b^2=2ab$，

所以 $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2+4ab+b^2}=\dfrac{(a^2+b^2)+ab}{(a^2+b^2)+4ab}=\dfrac{2ab+ab}{2ab+4ab}=\dfrac{1}{2}$.

方法归纳

这种整体代入的解题思路可使运算简化，避免出错.

培优竞赛

例 5 计算：$\dfrac{1}{x(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+9)}+\cdots+\dfrac{1}{(x+99)(x+102)}$.

分析 分式的分子相同，分母相差 3 的两个式子的积，分式加减的项多且无法通分计算，这类分式可以用裂项的方法计算.

解 因为$\frac{1}{x(x+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)$，

$$所以原式=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+9}+\cdots+\frac{1}{x+99}-\frac{1}{x+102}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+102}\right)$$

$$=\frac{34}{x(x+102)}.$$

方法归纳

此类题的通用解法就是采用裂项公式$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$. 解题时注意观察各部分分母中两个式子的大小，正确安排被减数和减数.

例 6 （上海市竞赛题）已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}(xyz\neq0)$，求$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$的值.

分析 根据已知条件和待求分式的特点，可设未知数（换元）解题.

解 设$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=k(k\neq0)$，则 $x=3k$，$y=4k$，$z=6k$.

$$所以\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+x^2}=\frac{3k\cdot4k+4k\cdot6k+6k\cdot3k}{(3k)^2+(4k)^2+(6k)^2}$$

$$=\frac{54k^2}{61k^2}=\frac{54}{61}.$$

方法归纳

解决此类连等、连比形式的问题，一般采用设未知数（换元）的方法，将多元转化为一元.

例 7 （河南省竞赛题）已知 $x^2-4x+1=0$，求下列各式的值：

(1)$x^2+\frac{1}{x^2}$；　　(2)$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$.

分析 目前不能求出 x 的值，通过观察方程 $x^2-4x+1=0$，显然 $x\neq0$，在方程两边同时除以 x，得 $x+\frac{1}{x}=4$. 观察(1)和已得的结论，将 $x+\frac{1}{x}=4$ 两边平方再整理，即可求出(1)的值；对于(2)，直接求值很困难，根据其特点和 $x+\frac{1}{x}=4$，能够求出其倒数的值，这样便可求出(2)的值.

解 (1)因为 $x^2-4x+1=0$，所以 $x+\frac{1}{x}=4$，

所以$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4^2$，即 $x^2+2+\frac{1}{x^2}=16$，所以 $x^2+\frac{1}{x^2}=14$.

(2)因为$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=14+1=15$，

所以$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{15}$.

方法归纳

若 $x^2-px+1=0$（p 为不为 0 的常数），则有：

(1)$x^2+1=px$，$x^2-px=-1$；

(2)$x+\frac{1}{x}=p$，进而可求出 $x^2+\frac{1}{x^2}$，$x^3+\frac{1}{x^3}$等代数式的值.

例 8 （重庆市竞赛题）若 $4x-3y-6z=0$，$x+2y-7z=0$，求$\frac{5x^2+2y^2-z^2}{2x^2-3y^2-10z^2}$的值.

分析 已知条件中有 3 个未知数，但只有两个等式，无法直接求出各未知数的值. 因此可考虑消元法，以 x，y 为主元，分别用含 z 的代数式表示，然后将其代入所求分式中求值即可.

解 以 x，y 为主元，将已知两等式化为

$\begin{cases}4x-3y=6z,\\x+2y=7z.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=3z,\\y=2z.\end{cases}$

所以原式$=\frac{5\times9z^2+2\times4z^2-z^2}{2\times9z^2-3\times4z^2-10z^2}=\frac{52z^2}{-4z^2}=-13$.

方法归纳

“消元”是解方程的基本思想方法，将这种思想运用到分式中有时会产生极好的效果.

实战演练

基础过关

1. 分式$\frac{|x|-3}{x+3}$的值为零，则 x 的值为 （　　）

A. 3　　B. -3　　C. ±3　　D. 任意实数

2. 如图 1-1，设 $k=\frac{\text{甲图中阴影部分的面积}}{\text{乙图中阴影部分的面积}}(a>b>0)$，则有 （　　）

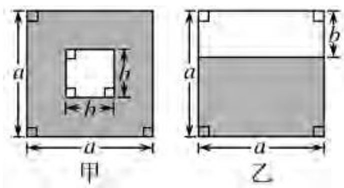


图 1-1

A. $k>2$　　B. $1<k<2$　　C. $\frac{1}{2}<k<1$　　D. $0<k<\frac{1}{2}$

3. 化简$\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$等于　　(　　)

A. $\frac{b}{a}$　　B. $\frac{a}{b}$　　C. $-\frac{b}{a}$　　D. $-\frac{a}{b}$

4. 化简$\frac{x}{x^2+2x+1}\div\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$的结果是　　(　　)

A. $\frac{1}{x+1}$　　B. $\frac{x+1}{x}$　　C. $x+1$　　D. $x-1$

5. 计算$\frac{1-4a^2}{2a+1}$的结果是__________.

6. 先化简，再求值：$\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\div\frac{x-1}{x^2+2x}-\frac{x}{x+1}$，其中 x 满足 $x^2-x-1=0$.

7. 先化简：$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\frac{x+1}{x}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$，然后 x 在-1，0，1，2 四个数中选一个你认为合适的数代入求值.

8. 对于分式$\frac{x-m-n}{m-2n+7x}$，已知当 $x=5$ 时，分式的值为 0；当 $x=1$ 时，分式的值不存在. 试求 m，n 的值.

培优提升

9. (江苏省竞赛题)如果$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}$，那么$\frac{5x^4-15x^2+5}{3x^2}=$__________.

10. (“希望杯”竞赛题)若$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}$，则$\frac{a-b+c-d}{a+b-c+d}$的值是__________.

11. (“五羊杯”竞赛题)已知$\frac{3x^2-7x+2}{(x-1)(x+1)}=3+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$，其中 A，B 为常数，则 $4A-2B=$__________.

12. 计算：$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^2}$.

13. 已知$\frac{a+b}{c}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=k$，求$\frac{k}{k^2+1}$的值.

14. (全国初中数学联赛试题)已知实数 a，b，c 满足 $abc=-1$，$a+b+c=4$，$\frac{a}{a^2-3a-1}+\frac{b}{b^2-3b-1}+\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{4}{9}$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

1.2 分式方程及其应用

知识精要

1. 分式方程的解法

(1)去分母，即把分式方程两边都同乘分式方程各分母的最简公分母，化为整式方程.

(2)解所得整式方程.

(3)验根，作结论. 验根的方法是把所得整式方程的根代入最简公分母，使最简公分母为 0 的根是原分式方程的增根，应舍去；使最简公分母不为 0 的根是原分式方程的根.

2. 增根

把分式方程化为整式方程后求得的根，代入最简公分母中，能使最简公分母为 0 的根是原分式方程的增根.

3. 分式方程的应用

列分式方程解应用题与运用整式方程解应用题的方法和步骤是类似的，但要注意分式方程求出的未知数的解要双重检验，一是检验是否是增根，二是检验是否符合实际意义.

典例剖析

例 1 解方程：

(1)$\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{3}{x}=1$；　　(2)$\dfrac{2+x}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}=-1$.

分析　先找出各分式的最简公分母，然后方程两边同乘最简公分母，去掉分母，化成整式方程. 方程(1)的公分母是 $x(x-1)$，方程(2)的公分母是 x^2-4.

解 (1)去分母得 $x^2-3x+3=x^2-x$，

移项合并得 $2x=3$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$，

经检验，$x=\dfrac{3}{2}$是分式方程的解；

(2)去分母得$-(x+2)^2+16=4-x^2$，

去括号得$-x^2-4x-4+16=4-x^2$，解得 $x=2$，

经检验，$x=2$ 是增根，分式方程无解.

方法归纳

解分式方程和解一元一次方程类似，但在解分式方程时易犯两个错误：一是忘记验根，二是漏乘不含分母的项.

例 2 小明 7：20 离开家步行去上学，走到距离家 500 m 的商店时，买学习用品用了 5 min. 从商店出来，小明发现按原来的速度还要用 30 min 才能到校. 为了在 8:00 之前赶到学校，小明加快了速度，平均每分钟比原来多走 25 m，最后他到校的时间是7:55. 求小明从商店到学校的平均速度.

分析 本题主要考查行程问题，由题意知小明从家到学校步行的时间为(55−20−5)min，从而利用时间找到等量关系.

解 设小明从家走到商店的平均速度为 x m/min，则他从商店到学校的平均速度为 $(x+25)$m/min，根据题意列方程得

$$\frac{500}{x}+\frac{30x}{x+25}=55-20-5.$$

解这个方程得 $x=50$，

经检验 $x=50$ 是所列方程的根，

$50+25=75$(m/min)，

答：小明从商店到学校的平均速度为 75 m/min.

方法归纳

本题的解题关键在于将时刻转化为时间，从路程、速度、时间三方面找到一个能反映题目全部含义的等量关系列方程.

例 3 当 m 取何值时，分式方程 $\frac{3}{x}+\frac{6}{x-1}-\frac{x+m}{x(x-1)}=0$ 无解？

分析 要使分式方程无解，即 x 的取值使方程的公分母为零，可先将分式方程转化为整式方程并求出其解；然后使最简公分母等于 0，求出增根 x，再将增根代入到所求的解中，从含 m 的等式中就能求出 m 的值.

解 去分母，得 $3(x-1)+6x-(x+m)=0$.

整理，得 $8x=m+3$. 所以 $x=\frac{m+3}{8}$.

因为分式方程无解，所以 $x=\frac{m+3}{8}$是原方程的增根，故能使公分母 $x(x-1)$的值为零，即 $x=0$ 或 $x=1$，所以$\frac{m+3}{8}=0$ 或$\frac{m+3}{8}=1$，所以 $m=-3$ 或 $m=5$.

因此，当 $m=-3$ 或 $m=5$ 时，分式方程无解.

方法归纳

若分式方程无解，则说明方程去分母后解出来的未知数的值是分式方程的增根，即要使公分母为零．解此类题应先求出方程的解(用字母表示)，然后根据此解使公分母为零，从而求出字母的值．

培优竞赛

例 4 (浙江省竞赛题)解方程：$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+6}$.

分析 若在方程两边直接乘$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$，计算比较麻烦，故可先将方程进行化简，再去分母．

解 (方法 1) 方程两边分别通分，得$\frac{(x+7)+(x+4)}{(x+4)(x+7)}=\frac{(x+6)+(x+5)}{(x+5)(x+6)}$，

即$\frac{2x+11}{(x+4)(x+7)}=\frac{2x+11}{(x+5)(x+6)}$.

方程两边同时乘$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)$，得

$(2x+11)(x+5)(x+6)=(2x+11)(x+4)(x+7)$.

移项、合并同类项，得$(2x+11)\cdot 2=0$.

所以 $2x+11=0$. 解得 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：$x=-\frac{11}{2}$时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

因此 $x=-\frac{11}{2}$是原分式方程的解．

(方法 2) 移项，得$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$.

两边分别通分，得$\frac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}=\frac{(x+7)-(x+6)}{(x+6)(x+7)}$.

即$\frac{1}{(x+4)(x+5)}=\frac{1}{(x+6)(x+7)}$.

因为两个分式分子相同，分式值相同，则分式分母相同．

所以$(x+4)(x+5)=(x+6)(x+7)$.

化简，得 $x^2+9x+20=x^2+13x+42$，

即$-4x-22=0$. 解得 $x=-\frac{11}{2}$.

检验：$x=-\frac{11}{2}$时，$(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)\neq 0$，

因此 $x=-\frac{11}{2}$是原分式方程的解．