易错题

丛书主编 申招斌

湘教考苑

易错考点

高考 数学

XIANGJIAOKAOYUAN
GAOKAO SHUXUE YICUOTI

- 汇集名师备考经验。
- 一网打尽**高考易错考点**。
- 轻松避开陷阱，突破高分不是难题！

湖南教育出版社

易错题

易错考点

湘教考苑

高考

数学

XIANGJIAOKAOYUAN
GAOKAO SHUXUE YICUOTI

丛书主编：申招斌
本册主编：万星教研所数学组
编　　委：周　樱　李瑶琳　刘红艳

湖南教育出版社

记"易错题"和"易错考点"是一种学习策略

同学们是否遇到过这样的情况：以前做错了的题目，考试时仍然不会做。造成这种现象的原因其实很简单：同学们平时做题时，没有养成认真对待和处理错题的习惯。要知道，每一个错误的背后，都隐藏着自己在知识和能力方面的漏洞。如果同学们能及时把错题、难点和重点问题整理到错题集上，并不时翻阅，查漏补缺，就能够有效地防止错误再次发生。

考入复旦大学的杨仪捷同学说："通过研究错题可以整合出重要的知识点，重新对摘录的难题进行思考，也能够帮助自己拓宽解题思路。考试前，我曾经对各科错题和难题进行分类积累并不时翻阅，发现从中获取的信息虽然简练，但含金量十足。"

毫无疑问，记"易错题"是一种非常有效的学习策略，原因有三：

1 建立错题集能够使复习更具针对性。复习时，当我们面对堆积如山的试卷、练习题难免会无从下手，而且各科的考点庞大而琐碎。然而，我们的时间和精力又是有限的，因此，提高复习的针对性对考生来说尤为重要。实际上，考试、练习中最有价值的就是做错了的题目。同学们平时把错题整理汇集到笔记本上，这样就可以有针对性地改正错误，解决问题。

2 建立错题集能够使学习重点更突出。错题反映出的是同学们的薄弱环节，往往是导致同学们丢分的"隐形杀手"。重视、研究错题，也就抓住了学习的重点，从而避免了做无用功。

3 建立错题集能够使学习更高效。如果一个学生在考试中常犯同样的错误，那么学习起来就相当被动，很容易被大考、小考牵着鼻子走。错题集将会促使其主动地反省自己的失误，减少错误率。

我想悄悄地对你说

错题集不仅仅是简单地将题目和答案抄录下来，更重要的是要分析出现错误的原因，预防类似错误出现。这是一个自我逐步修正和完善的过程，会让同学们对这一类错题的认识逐步加深。对于一些文字量比较大的错题，大家可以采取以下简单有效的做法，比如：将有关试卷复印，然后剪裁下错误的题目，粘贴在错题集上。这样可以节省时间，提高效率。

丛书编写特色简介

本书特色

易错题解读
精选典型试题并指出可能出现的变化形式，帮助学生明确哪些地方容易出错，哪些题容易出错。

我的错题
自己动手粘贴错题，自己总结错误原因，自主学习，提高效率。

错因分析
分析错误原因，点明出错根源。明确解题思路，抓住考点关键，掌握答题技巧。

易错题实战
检验纠错成果，举一反三，最大限度地挖掘考生的认题、解题能力。

易错考点链接
归纳知识点，认知该考点的内容方法、能力层次、角度变化及其测试手段与规律。

抢先关注
知识重点，提前预警。

误区警示
误区辨析，避开陷阱。

方法突破
方法总结，巧妙解题。

纠错心得
认清自我，提升自己。

目录

Contents

专题一　集合与常用逻辑用语

易错题解读

易错点 1　集合中元素的意义

典例　(山东高考)设集合 $A=\{x||x-1|<2\}$,$B=\{y|y=2^x,x\in[0,2]\}$,则 $A\cap B=$　　(　　)

A. $[0,2]$　　B. $(1,3)$　　C. $[1,3)$　　D. $(1,4)$

【解析】　$\because |x-1|<2$,$\therefore -2<x-1<2$,即 $-1<x<3$,

$\because y=2^x$,$0\leqslant x\leqslant 2$,$\therefore 2^0\leqslant y\leqslant 2^2$,即 $1\leqslant y\leqslant 4$,

$\therefore A\cap B=[1,3)$.

【答案】　C

错因分析　解决集合问题的关键是确定集合中的元素是什么.对于用描述法给出的集合$\{x|x\in P\}$,要先明确集合中的代表元素是什么,再确定元素 x 所满足的条件.特别要分清是数集还是点集(有序实数对),明确两者之间的差异.

易错考点链接

研究集合问题,一定要理解集合的意义,抓住集合的代表元素.例如,$\{x|y=x^2\}$表示满足 $y=x^2$ 的所有 x 组成的集合,即$\{x|y=x^2\}=\mathbf{R}$;$\{y|y=x^2\}$表示满足 $y=x^2$ 的所有 y 组成的集合,即$\{y|y=x^2\}=\{y|y\geqslant 0\}$;$\{(x,y)|y=x^2\}$表示满足 $y=x^2$ 的 x 和 y 所形成的实数对组成的集合,也可以认为是由方程$y=x^2$ 的解组成的集合,还可以认为是由抛物线 $y=x^2$ 上的点组成的集合.

抢先关注

数集可以用区间、数轴表示,点集可以用图象、图形来表示.

误区警示

集合 A、B 是同一种对象的集合,只是代表元素字母不同,但要清楚这两个集合中代表元素的实际含义——都是数集,因此可以进行交集运算.

纠错心得

易错点 2　集合中元素的互异性

典例　(全国高考)已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,$A\cup B=A$,则 $m=$　　(　　)

A. 0 或$\sqrt{3}$　　B. 0 或 3　　C. 1 或$\sqrt{3}$　　D. 1 或 3

【解析】　$A=\{1,3,\sqrt{m}\}$,$B=\{1,m\}$,$A\cup B=A$,故 $B\subseteq A$,所以 $m=3$ 或 $m=\sqrt{m}$,即 $m=3$ 或 $m=0$ 或 $m=1$,其中 $m=1$ 不符合题意,所以 $m=0$ 或 $m=3$.故选 B.

【答案】　B

错因分析　该题容易出现的问题是误以为方程的解就是

误区警示

集合中元素的三个特征中互异性对解题的影响最大，特别是类似[典例]这种带有参数的集合，实际上就隐含着对参数的一些要求．如根据集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，可知 $\sqrt{m}\neq1$，$\sqrt{m}\neq3$，由 $B=\{1,m\}$，可知 1 与 m 互不相等，然后根据集合 A，B 之间的关系建立方程，最后代入集合 B 中检验两个元素是否相等，所以解题时一定要注意含字母参数的有关问题．

m 的取值而忽视对集合中元素互异性的检验．

易错考点链接

集合中元素的特征

(1)确定性：给定的集合，它的元素必须是确定的．就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了．例如，“著名的科学家”“较大的数”等，都不能组成集合．

(2)互异性：一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的)．也就是说，集合中的元素是不能重复出现的．例如，$\{-1,1,a^2\}$表示一个集合，则 $a\neq\pm1$．

(3)无序性：在一个集合中，不考虑元素之间的顺序，只要元素完全相同，就认为是同一个集合．例如，$\{a,b,c\}$与$\{c,a,b\}$表示同一个集合．

易错点 3　空集的特殊性

典例　已知集合 $A=\{x|ax-1=0\}$，$B=\{x|1<\log_2x\leqslant2,x\in\mathbf{N}\}$，且 $A\cap B=A$，则 a 的所有可能值组成的集合是(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

C. $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$　　D. $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{4},0\right\}$

【解析】　由 $A\cap B=A$，得 $A\subseteq B$.

因为 $B=\{x|1<\log_2x\leqslant2,x\in\mathbf{N}\}=\{x|2<x\leqslant4,x\in\mathbf{N}\}=\{3,4\}$，

当 $A=\varnothing$ 时，则方程 $ax-1=0$ 无实数解，所以 $a=0$，此时显然有 $A\subseteq B$，符合题意．

当 $A\neq\varnothing$ 时，则由方程 $ax-1=0$，得 $x=\frac{1}{a}$.

要使 $A\subseteq B$，则 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=4$，即 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{4}$.

综上所述，a 的所有可能取值组成的集合是 $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$．故选 D.

【答案】　D

错因分析　集合 A 为方程 $ax-1=0$ 的实数解构成的集合，由 $A\cap B=A$，知 $A\subseteq B$，A 可以为非空集合，也可以是空集．在解题中，很容易漏掉对 $A=\varnothing$ 的讨论，导致误选 C.

误区警示

解决有关 $A\cap B=A$，$A\cap B=\varnothing$，$A\subseteq B$ 等集合的运算问题时，易忽视空集的情况而出现漏解，这需要在解题过程中全方位、多角度审视问题．

易错考点链接

1. 空集

空集是一个非常特殊的集合，它不包含任何元素，是任意一个集合的子集，是任意一个非空集合的真子集．$\varnothing$有两个独特的性质：(1)对于任意集合 A，都有 $A\cap\varnothing=\varnothing$；(2)对于任意集合

A，都有 $A\cup\varnothing=A$. 因此，如果 $A\cap B=\varnothing$，就要考虑集合 A 或 B 可能是 $\varnothing$；如果 $A\cup B=A$，就要考虑集合 B 可能是 $\varnothing$.

2. $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的区别

$\{0\}$ 是含有一个元素的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合，因此，$\varnothing\subseteq\{0\}$，而不能写成 $\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$ 等.

易错点 4　子集个数的求法

典例　（江苏高考）集合 $\{-1,0,1\}$ 共有________个子集.

【解析】　集合 $\{-1,0,1\}$ 的子集有 $\varnothing$，$\{-1\}$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{-1,0\}$，$\{-1,1\}$，$\{0,1\}$，$\{-1,0,1\}$，共 8 个.

【答案】　8

错因分析　本题容易因为记错公式或者误认为是求真子集、非空子集等情况而得到错误的结果：$2^3-1=7$.

易错考点链接

子集的个数问题

由 $n(n>0)$ 个元素组成的集合 A，则有：

(1) A 的子集个数是 2^n；

(2) A 的真子集个数是 2^n-1；

(3) A 的非空子集个数是 2^n-1；

(4) A 的非空真子集个数是 2^n-2.

误区警示

在求解一个集合的子集的个数问题时，要注意问的是“子集的个数”“真子集的个数”，还是“非空真子集的个数”. 注意空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集；一个集合是其自身的子集.

易错点 5　集合运算中端点值的取舍

典例1　设 U 为实数集，集合 $M=\{x|0<x<2\}$，$N=\{y|y=x^2\}$，则 $(\complement_U M)\cap N=$________.

【解析】　$N=\{y|y=x^2\}=[0,+\infty)$，$\complement_U M=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$，则 $(\complement_U M)\cap N=\{0\}\cup[2,+\infty)$.

【答案】　$\{0\}\cup[2,+\infty)$

典例2　（上海高考）设常数 $a\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|(x-1)\cdot(x-a)\geqslant 0\}$，$B=\{x|x\geqslant a-1\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,2)$　B. $(-\infty,2]$　C. $(2,+\infty)$　D. $[2,+\infty)$

【解析】　用数轴分类讨论可得 $\begin{cases}a\geqslant 1,\\ a-1\leqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<1,\\ a-1\leqslant a,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant 2$，故选 B.

【答案】　B

错因分析　典例 1 易产生的错解是在进行集合的交集运算时，遗漏了 0 这个端点值. 由于集合变成了单元素集，所以常常会出现遗漏的情况.

典例 2 在分类讨论时，有些同学不清楚不等式是否可取等

方法突破

(1) 在进行集合的基本运算时，往往先利用数轴或韦恩图表示出相应的集合，然后进行运算. 对于集合运算中端点值的取舍，应单独代入进行检验，否则易造成增解或漏解.

(2) 当遇到有关集合的关系运算求解参数的取值范围时，往往需要对参数进行分类讨论，因此，在求解过程中，建立不等关系时的等号是否可取，是一个难点，也是我们常常需要关注的问题. 这里需要注意几个问题：①分类的标准要做到不重不漏；②端点值的取舍，常用的方法是假设法：先假设取端点值，再来看已知或推理的集合关系是否成立？若成立，则可以取端点值；若不成立，则不可以取端点值.

号，即端点值是否可取，容易出现错误.

易错考点链接

1. 集合的交集、并集、补集的概念

(1)交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2)并集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3)补集：若 $B\subseteq U$，则 $\complement_U B=\{x|x\in U$ 且 $x\notin B\}$.

2. 常用结论

对于任意集合 A,B，有

(1)$A\cap A=A$，$A\cap B=B\cap A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2)$A\cup A=A$，$A\cup B=B\cup A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3)$(A\cap B)\subseteq A$(或 B)$\subseteq(A\cup B)$.

(4)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(5)$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$，$\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$.

(6)$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

易错点 6 四种命题真假的判断

典例 (陕西高考)原命题为“若 z_1,z_2 互为共轭复数，则 $|z_1|=|z_2|$”，关于其逆命题、否命题、逆否命题真假性的判断依次如下，正确的是 ( )

A. 真、假、真　　B. 假、假、真

C. 真、真、假　　D. 假、假、假

【解析】 若 $z_1=a+b\mathrm{i}$，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$.

∴$|z_1|=|z_2|$，故原命题正确、逆否命题正确.

其逆命题为：若 $|z_1|=|z_2|$，则 z_1,z_2 互为共轭复数，

若 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=-a+b\mathrm{i}$，则 $|z_1|=|z_2|$，而 z_1,z_2 不为共轭复数.

∴逆命题为假，否命题也为假. 故选 B.

根据四种命题的关系，只需判断两个命题的真假.

【答案】 B

错因分析 对四种命题的构成不明确，不知道如何构造一个命题的否命题、逆命题和逆否命题. 本题的基本解题思路是先写出各个命题的其他形式的命题，再判断其真假，或者根据四种命题之间的等价关系进行判断.

易错考点链接

1. 判断命题真假的方法

(1)直接判断：判断一个命题为真命题，要给出严格的推理证明；说明一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

(2)间接判断：判断所给命题的逆否命题的真假，若逆否命题为真，则所需判断的命题为真；若逆否命题为假，则所需判断

抢先关注

(1)四种命题

原命题：若 p，则 q；

逆命题：若 q，则 p；

否命题：若 $\neg p$，则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$，则 $\neg p$.

(2)四种命题中的等价关系：原命题与逆否命题是等价命题，它们具有相同的真假性；否命题与逆命题也是等价命题，它们也具有相同的真假性.

方法突破

(1)写出命题的四种形式中的其中一种时，要注意先分清原命题的条件和结论，再比较每个命题的条件和结论与原命题之间的关系.

(2)判断命题真假的关键：一是识别命题的构成形式；二是将命题简化，对等价的简化命题进行判断. 要判断一个命题是假命题，只需举出反例.

的命题为假.

2. 四种命题的相互关系

(1)在判断四种命题的关系时,①要分清命题的条件与结论;②把其中的关键词搞清楚,进一步写出关键词的否定.

(2)当一个命题有大前提时,若要写出其他三种命题,大前提需保持不变.

(3)一些词语及其否定如下表所示:

词语	是	都是	都不是	等于	大于
否定	不是	不都是	至少一个是	不等于	不大于
词语	小于	至少有一个	至多有一个	至少有 n 个	至多有 n 个
否定	不小于	一个都没有	至少有两个	至多有 $(n-1)$ 个	至少有 $(n+1)$ 个

易错点 7　充分条件、必要条件的判定

典例　(湖北高考)设 U 为全集,A,B 是集合,则"存在集合 C 使得 $A\subseteq C,B\subseteq \complement_U C$"是"$A\cap B=\varnothing$"的　(　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解析】　若存在集合 C 使得 $A\subseteq C,B\subseteq \complement_U C$,则可以推出 $A\cap B=\varnothing$;若 $A\cap B=\varnothing$,由 Venn 图可知,一定存在 $A=C$,同时满足 $A\subseteq C,B\subseteq \complement_U C$,故"存在集合 C 使得 $A\subseteq C,B\subseteq \complement_U C$"是"$A\cap B=\varnothing$"的充要条件.

【答案】　C

错因分析　本题在集合间的关系转化时易出现颠倒充分条件和必要条件,若不结合 Venn 图从而很容易误认为是充分而不必要条件.

易错考点链接

充分条件、必要条件、充要条件的判定

(1)定义法:①分清条件和结论:分清哪个是条件,哪个是结论;②找推式:判断"$p\Rightarrow q$"及"$q\Rightarrow p$"的真假;③下结论:根据推式及定义下结论.

(2)等价法:将命题转化为另一个等价的便于判断真假的命题. 利用原命题与逆否命题等价,逆命题与其否命题等价来判断.

对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题,一般运用等价法.

(3)集合法:若从命题的条件和结论之间的关系来判断有困难时,有时可以从集合的角度来考虑. 把命题的条件和结论视为

抢先关注

对于 p 和 q,若 $p\Rightarrow q$,则 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件,若再有 $q\Rightarrow p$,则称 p 是 q 的充要条件,即当 $p\Leftrightarrow q$ 时,p 与 q 互为充要条件;若 $p\Rightarrow q$,而 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件,q 是 p 的必要不充分条件;若 $p\nRightarrow q$,且 $p\nRightarrow q$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

误区警示

充分条件、必要条件、充要条件是重要的数学概念,在判断时需注意:(1)确定条件是什么,结论是什么;(2)尝试从条件推导结论,从结论推导条件. 抓住"以小推大"的技巧,即小范围推得大范围,可快速解决充分、必要条件问题,否则就易掉进充分、必要条件判断的陷阱.

集合(尤其是在条件和结论为实数时),集合与条件的对应关系情况如下所示:

设满足条件 p 的元素构成集合 A,满足条件 q 的元素构成集合 B,则

①若 $A\subseteq B$,则 p 是 q 的充分条件;

②若 $A\subsetneqq B$,则 p 是 q 的充分而不必要条件;

③若 $B\subseteq A$,则 p 是 q 的必要条件;

④若 $B\subsetneqq A$,则 p 是 q 的必要而不充分条件;

⑤若 $A=B$,则 p 是 q 的充要条件;

⑥若 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$,则 p 既不是 q 的充分条件,也不是 q 的必要条件.

易错点 8 复合命题的真假判断

典例 (湖南高考)已知命题 p:若 $x>y$,则 $-x<-y$;命题 q:若 $x>y$,则 $x^2>y^2$. 在命题:① $p\wedge q$;② $p\vee q$;③ $p\wedge(\neg q)$;④ $(\neg p)\vee q$ 中,真命题是 ( )

A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

【解析】 当 $x>y$ 时,两边乘以 -1 可得 $-x<-y$,∴命题 p 为真命题,当 $x=1,y=-2$ 时,$x^2<y^2$,∴命题 q 为假命题,∴②③为真命题,故选 C. 复合命题真假的判断应严格按照真值表进行判断.

【答案】 C

错因分析 对逻辑联结词“或”“且”“非”的含义理解不准确,从而导致错选. 日常用语中的“或”,具有两者选择其一的意思,逻辑联结词“或”有三层含义,以“p 或 q 为真”为例:一是 p 成立但 q 不成立,二是 p 不成立但 q 成立,三是 p 成立且 q 成立.

抢先关注

命题 $p\wedge q$,$p\vee q$,$\neg p$ 的真值表如下表所示:

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$
真	真	假	真	真
真	假	假	假	真
假	真	真	假	真
假	假	真	假	假

纠错心得

易错考点链接

1. 逻辑联结词

在数学中,有时会使用一些联结词,如“且”“或”“非”. 在生活用语中,我们也使用这些联结词,但表达的含义和用法与在数学中的含义和用法不尽相同.

(1)且:一般地,用联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来,就得到一个新命题,记作 $p\wedge q$,读作“p 且 q”.

(2)或:一般地,用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来,就得到一个新命题,记作 $p\vee q$,读作“p 或 q”.

(3)非:一般地,对一个命题 p 全盘否定,就得到一个新命题,记作 $\neg p$,读作“非 p”或“p 的否定”.

2. 判断含有逻辑联结词命题的真假的方法

(1)直接法:①确定这个命题的结构及组成这个命题的每个

简单命题;②判断每个简单命题的真假;③根据真值表判断原命题的真假.

(2)间接法:根据原命题与逆否命题的等价性,判断原命题的逆否命题的真假性.此法适用于原命题的真假性不易判断的情况.

易错点 9　全(特)称命题真假的判断

典例　(全国高考)不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的解集记为 D,有下面四个命题:

p_1:$\forall(x,y)\in D,x+2y\geqslant -2$,

p_2:$\exists(x,y)\in D,x+2y\geqslant 2$,

p_3:$\forall(x,y)\in D,x+2y\leqslant 3$,

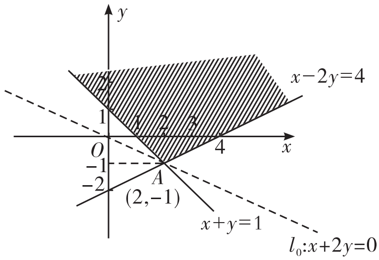
p_4:$\exists(x,y)\in D,x+2y\leqslant -1$,

其中的真命题是　(　　)

A. p_2,p_3　　B. p_1,p_4

C. p_1,p_2　　D. p_1,p_3

【解析】　画出不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant 1,\\x-2y\leqslant 4\end{cases}$ 的可行域 D 如图阴影部分;两直线交点 $A(2,-1)$,设直线 l_0 的方程为 $x+2y=0$.由图象可知,$\forall(x,y)\in D,x+2y\geqslant 0$.



故 p_1 为真命题,p_2 为真命题,p_3,p_4 为假命题.

【答案】　C

错因分析　对于这类试题要注意问题的设问是什么,如“下列命题中真命题是”“下列命题中假命题是”,如果不注意这点就会出现错误.有时命题中可能省略了具有全称或存在意义的量词,要注意判断.

易错考点链接

1. 全称命题与特称命题真假的判断方法

命题名称	真假性	判断方法1	判断方法2
全称命题	真	所有对象命题真	否定为假
	假	存在一个对象命题假	否定为真
特称命题	真	存在一个对象命题真	否定为假
	假	所有对象命题假	否定为真

2. 全称命题的判断方法

(1)要证明“$\forall x\in M,p(x)$”为真,①直接法:需要经过严格推理来证明 $\forall x\in M$,都有 $p(x)$成立;

抢先关注

全称命题和特称命题

命题名称	命题结构	命题简记
全称命题	对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$成立	$\forall x\in M,p(x)$
特称命题	存在 M 中的一个 x_0,使 $p(x_0)$成立	$\exists x_0\in M,p(x_0)$

方法突破

全称命题其实就是一个一般结论,要说明这个结论的正确性,需要根据相关的知识进行证明,要否定这个结论只要找到一个反例即可;特称命题是一个局部性的结论,要说明这个局部性结论正确,只要有具体的一个例子说明其正确即可,但是要否定这个结论就要对其中所有的对象进行一一否定,就是要证明这个命题的否定是一个正确命题,即证明一个全称命题是正确命题.

纠错心得

误区警示

“否命题”与命题的“否定”易混淆(如下表所示)

	否命题	命题的否定
区别	否命题是既否定其条件,又否定其结论	命题的否定只是否定命题的结论
	否命题与原命题的真假无必然联系	命题的否定与原命题的真假总是相对立的,即一真一假

②间接法:证明“$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$”为假.

(2)要证明“$\forall x\in M,p(x)$”为假,①直接法:只需要举出一个反例,即$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$;

②间接法:证明“$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$”为真.

3. 特殊命题的判断方法

(1)要证明“$\exists x_0\in M,p(x_0)$”为真,①直接法:只需举出一个正例,即$\exists x_0\in M$,使$p(x_0)$成立;

②间接法:证明“$\forall x\in M,\neg p(x)$”为假.

(2)要证明“$\exists x_0\in M,p(x_0)$”为假,①直接法:需要经过严格推理来证明$\forall x\in M$,都有$\neg p(x)$成立;

②间接法:证明“$\forall x\in M,\neg p(x)$”为真.

易错点10 含有一个量词的命题的否定

典例 (四川高考)设$x\in \mathbf{Z}$,集合A是奇数集,集合B是偶数集,若命题$p:\forall x\in A,2x\in B$,则 ( )

A. $\neg p:\ \forall x\in A,2x\notin B$

B. $\neg p:\ \forall x\notin A,2x\notin B$

C. $\neg p:\ \exists x\notin A,2x\in B$

D. $\neg p:\ \exists x\in A,2x\notin B$

【解析】 $\because p:\forall x\in A,2x\in B.\ \therefore \neg p:\exists x\in A,2x\notin B$. 故选D. 此类命题的否定的写法为改量词,变否定.

【答案】 D

错因分析 对含有存在(全称)量词的命题进行否定需两步操作:(1)将存在(全称)量词改写成全称(存在)量词;(2)将结论加以否定. 这类问题常见的错误是没有变换量词,或者对于结论没给予否定. 有些命题中的量词不明显,应注意挖掘其隐含的量词.

易错考点链接

1. 全称命题的否定是特称命题,特称命题的否定是全称命题. 其结构如下表所示:

命题	命题的否定
$\forall x\in M,p(x)$	$\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$
$\exists x_0\in M,p(x_0)$	$\forall x\in M,\neg p(x)$

2. 非全称(或特称)命题的否定是直接否定其结论.

3. 有些命题虽然没有全称(或存在)量词,但是全称(或特称)命题,应先把它改写成含有全称(或存在)量词的命题,再进行否定.

易错题实战

1.(全国高考)已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $[-2,-1]$ B. $[-1,2)$

C. $[-1,1]$ D. $[1,2)$

2.(浙江高考)设全集 $U=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geqslant 2\}$,集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2\geqslant 5\}$,则 $\complement_U A=$ ( )

A. $\varnothing$ B. $\{2\}$

C. $\{5\}$ D. $\{2,5\}$

3.(辽宁高考)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是非零向量. 已知命题 p:若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$;命题 q:若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$. 则下列命题中真命题是 ( )

A. $p\vee q$ B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$ D. $p\vee(\neg q)$

4.(重庆高考)已知命题 p:对任意 $x\in\mathbf{R}$,总有 $2^x>0$;q:“$x>1$”是“$x>2$”的充分不必要条件,则下列命题为真命题的是 ( )

A. $p\wedge q$ B. $\neg p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$ D. $p\wedge\neg q$

5.(北京高考)设$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列. 则“$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6.(天津高考)设 $a,b\in\mathbf{R}$,则“$a>b$”是“$a|a|>b|b|$”的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7.(湖北高考)在一次跳伞训练中,甲、乙两位学员各跳一次. 设命题 p 是“甲降落在指定范围”,q 是“乙降落在指定范围”,则命题“至少有一位学员没有降落在指定范围”可表示为 ( )

A. $(\neg p)\vee(\neg q)$ B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$ D. $p\vee q$

8.(重庆高考)命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2\geqslant 0$”的否定为 ( )

A. 对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2<0$

B. 不存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2<0$

C. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2\geqslant 0$

D. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2<0$

9.(重庆高考)设全集 $U=\{n\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant n\leqslant 10\}$,$A=\{1,2,3,5,8\}$,$B=\{1,3,5,7,9\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$________.

10.(福建高考)若集合$\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$,且下列四个关系:① $a=1$;② $b\neq 1$;③ $c=2$;④ $d\neq 4$ 有且只有一个是正确的,则符合条件的有序数组(a,b,c,d)的个数是________.