

弹箭飞行原理与应用

Principle and application of Projectile Flight

高旭东 编著

本书由“武器系统与工程”江苏省品牌专业建设经费资助出版。

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前言

弹箭飞行原理与应用是武器系统特别是枪、炮、弹、箭等军事工程领域的一门基础理论和实用学科，涉及武器系统的论证、设计、加工、试验、作战指挥、战斗使用等各个环节。

本书特色是在侧重弹箭飞行原理概念理解的基础上，兼顾弹药与武器系统工程设计与分析的实用性。内容体系包括：介绍弹箭飞行的基础知识，包括地球和大气的相关知识以及弹箭飞行的标准气象条件；从空气动力学的概念解释弹箭飞行阻力的形成机理；在建立标准条件下的弹箭飞行的质点弹道方程基础上，进一步给出弹道、气象以及地形等非标准条件下的质点弹道方程；从加深对弹箭飞行弹道特性理解的角度，分析射角、弹道系数、初速、气象条件、地形条件等因素对弹箭飞行的影响；基于坐标转换和受力分析，建立弹箭飞行的刚体弹道方程，并基于物理概念的理解讨论陀螺稳定、尾翼稳定、动态稳定和追随稳定的原理；讨论弹箭飞行落点散布的影响因素；介绍智能、灵巧弹药及制导炮弹的飞行力学模型；介绍弹箭射表编拟和使用方法；简单介绍了几种弹箭飞行弹道的典型试验及测试方法。

由于时间仓促、水平有限，书中疏漏和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 著 者

2018年10月

目 录

CONTENTS

第 1 章 基础知识	001
1.1 弹箭飞行原理的研究范畴与发展历史	001
1.2 弹箭飞行原理在弹箭研制中的作用	003
1.2.1 弹箭飞行弹道的计算与射表编制	003
1.2.2 弹箭及武器系统设计	003
1.2.3 弹箭及武器系统测试与试验	004
1.3 重力与科氏惯性力	004
1.4 大气的特性	005
1.4.1 大气状态方程与虚拟温度	005
1.4.2 气压随高度的变化	006
1.4.3 气温随高度的变化	007
1.4.4 声速随高度的变化	007
1.5 标准气象条件	008
1.5.1 标准大气	008
1.5.2 我国炮兵标准气象条件	009
1.5.3 我国空军标准气象条件	010
1.5.4 我国海军标准气象条件	011
1.6 弹箭飞行原理中的部分术语和符号	011
第 2 章 弹箭飞行的质点弹道理论	013
2.1 弹箭的气动外形	013
2.2 空气阻力的组成	014
2.2.1 旋转弹的零升阻力	015
2.2.2 尾翼弹的零升阻力	024
2.3 阻力系数、阻力定律、弹形系数	025
2.3.1 阻力系数曲线的特点	025
2.3.2 阻力定律和弹形系数	025
2.3.3 弹形系数的计算方法	027
2.4 阻力加速度、弹道系数和阻力函数	029

2.5	弹箭质心运动矢量方程	030
2.6	笛卡儿坐标系的弹箭质心运动方程	031
2.7	自然坐标系的弹箭质心运动方程组	032
2.8	以水平射程为自变量的弹箭质心运动方程组	033
2.9	火箭弹主动段的质心运动方程组	034
第3章 弹箭质点弹道的一般特性及解法		035
3.1	抛物线弹道的特点	035
3.1.1	抛物线弹道诸元公式	035
3.1.2	抛物线弹道的特点	036
3.2	空气弹道的一般特性	038
3.2.1	速度沿全弹道的变化	038
3.2.2	空气弹道的不对称性	041
3.2.3	空气弹道基本参数及外弹道表	041
3.3	直射弹道特性	044
3.3.1	弹道刚性原理及炮-目高低角对瞄准角的影响	044
3.3.2	直射射程与有效射程	045
3.4	外弹道解法	046
3.4.1	弹道表解法	046
3.4.2	弹道方程的数值解法	047
第4章 非标准条件时的弹箭质点弹道		049
4.1	非标准弹道条件时的弹箭质心运动微分方程	049
4.2	非标准气象条件时的弹箭质心运动微分方程	049
4.2.1	非标准条件时气温和气压的处理	049
4.2.2	纵风、横风和垂直风的处理	050
4.2.3	非标准气象条件时的弹箭质心运动微分方程	051
4.3	非标准地形条件时的弹箭质心运动微分方程	052
4.3.1	考虑科氏效应时的弹箭质心运动微分方程	052
4.3.2	考虑地球表面曲率和重力加速度变化时的弹箭质心运动微分方程	054
4.4	考虑所有非标准条件时的弹箭质心运动微分方程	056
第5章 非标准条件对弹箭飞行的影响		057
5.1	概述	057
5.2	射角对弹箭飞行的影响	057
5.2.1	射角对射程的影响及最大射程角	057
5.2.2	射程对射角的敏感程度	059
5.3	弹道系数对弹箭飞行的影响	059
5.4	初速对弹箭飞行的影响	060
5.5	气象条件对弹箭飞行的影响	061
5.6	地形条件对弹箭飞行的影响	063

第 6 章 弹箭有攻角飞行时的气动力特性	065
6.1 概述	065
6.2 弹箭有攻角飞行时的空气动力和空气动力矩	065
6.3 与自转和角运动有关的弹箭空气动力和力矩	067
6.4 推力、喷管导转力矩和推力偏心力矩	070
第 7 章 弹箭飞行的刚体弹道理论	074
7.1 坐标系及坐标系的转换	074
7.1.1 坐标系	074
7.1.2 各坐标系间的转换关系	076
7.2 弹箭运动方程的一般形式	080
7.2.1 速度坐标系上的弹箭质心运动方程	080
7.2.2 弹轴坐标系上弹箭绕质心转动的动量矩方程	081
7.2.3 弹箭绕质心转动的动量矩计算	082
7.2.4 有动不平衡时的惯性张量和动量矩	083
7.2.5 弹箭绕质心转动的方程组	086
7.2.6 弹箭刚体运动方程组的一般形式	086
7.3 有风情况下的气动力和力矩分量的表达式	086
7.3.1 相对气流速度和相对攻角	087
7.3.2 有风时的空气动力	087
7.3.3 有风时的空气动力矩	089
7.4 弹箭的六自由度刚体弹道方程	092
第 8 章 弹箭飞行的稳定性原理	095
8.1 概述	095
8.2 尾翼弹飞行稳定的原理及必要条件	096
8.3 高速旋转弹飞行稳定的原理及陀螺稳定条件	097
8.4 弹箭飞行的动态稳定条件	100
8.5 动力平衡角、偏流和追随稳定条件	101
8.5.1 动力平衡角和偏流产生的原因	101
8.5.2 追随稳定条件	102
8.6 低速旋转尾翼弹的共振不稳定性	103
第 9 章 弹箭飞行的散布特性	105
9.1 概述	105
9.2 弹箭飞行散布的主要影响因素	106
9.2.1 射角对散布的影响	106
9.2.2 弹道系数对散布的影响	107
9.2.3 初速对散布的影响	108
9.2.4 气象条件对散布的影响	108
9.3 射程散布的计算方法与特性	109

9.4	方向散布的计算方法与特性	110
9.5	立靶散布的特性	112
9.6	射击误差及其与散布的相互关系	113
第 10 章	智能/灵巧弹药飞行原理	115
10.1	弹道修正弹的概念	115
10.2	一维弹道修正弹飞行力学模型	116
10.3	固定鸭舵式二维弹道修正弹飞行力学模型	118
10.3.1	固定鸭舵式二维弹道修正弹	118
10.3.2	弹箭受力分析	118
10.3.3	二体运动分析	121
10.3.4	飞行力学建模	121
10.4	末制导脉冲二维弹道修正尾翼弹飞行力学模型	122
10.4.1	脉冲发动机弹道修正原理	122
10.4.2	弹箭有控飞行弹道模型	123
10.4.3	脉冲推力控制仿真算法	124
10.5	滑翔增程弹飞行力学模型	125
第 11 章	制导弹箭飞行原理	129
11.1	制导弹箭常用坐标系及其转换	129
11.1.1	坐标系定义	129
11.1.2	坐标系的转换关系	130
11.2	作用在制导弹箭上的力和力矩	133
11.2.1	作用在制导弹箭上的力	133
11.2.2	作用在制导弹箭上的力矩	134
11.3	制导弹箭的控制力和控制力矩	136
11.3.1	控制力	136
11.3.2	控制力矩	137
11.3.3	滚转弹体的等效控制	137
11.4	制导弹箭飞行动力学模型	139
11.4.1	动力学方程	139
11.4.2	运动学方程	140
11.4.3	质量变化方程	140
11.4.4	控制关系方程	141
11.4.5	制导弹箭刚体外弹道方程组	141
11.4.6	纵向平面内的质点弹道方程组	142
第 12 章	弹箭射表的编拟与使用	143
12.1	射表的基本知识	143
12.1.1	射表的作用与用途	143
12.1.2	标准射击条件	143

12.1.3 射表的内容与格式	145
12.1.4 射表体系	148
12.2 射表的编拟方法	149
12.2.1 概述	149
12.2.2 数学模型与试验方案	150
12.2.3 射表编拟过程	151
12.2.4 射表编拟的一般程序	152
12.3 射表使用方法	154
12.4 射表误差分析	156
第 13 章 弹箭飞行试验及测试方法	159
13.1 弹箭飞行速度的测量	159
13.2 阻力系数的试验测量	161
13.3 弹箭空间坐标与飞行时间的测量	162
13.4 弹箭转速的测量	163
13.5 立靶密集度试验与地面密集度试验	164
附表	166
附表 1 饱和水蒸汽气压表	166
附表 2 虚拟温度随高度变化表	167
附表 3 气压函数表	167
附表 4 空气密度函数表	168
附表 5 声速随高度数值表	169
附表 6 43 年阻力定律 $c_{xon}(Ma)$	170
附表 7 $F(v)$ 函数表 (43 年阻力定律)	171
附表 8 $G(v)$ 函数表 (43 年阻力定律)	171
附表 9 火炮直射距离表 (43 年阻力定律)	172
附表 10 火炮直射射角表 (43 年阻力定律)	173
附表 11 最大射程表 (43 年阻力定律)	174
附表 12 最大射角表 (43 年阻力定律)	175
习题	176
参考文献	182

第 1 章

基础知识

1.1 弹箭飞行原理的研究范畴与发展历史

弹箭飞行原理是研究弹箭在空气中运动规律、飞行特性、相关现象及其应用的一门学科，这里的弹箭一般泛指无控的子弹、炮弹、炸弹、火箭弹以及各种发射投掷类的弹药等，近些年来又发展出以弹道修正弹、制导炮弹、末敏弹等为代表的灵巧/智能弹药。

从飞行力学和弹箭飞行的空间自由度维数来看，弹箭飞行的基本理论可分为以质点飞行弹道和刚体飞行弹道为基础理论的两大部分。

弹箭飞行的质点弹道理论就是在一定的假设下，略去对弹箭运动影响较小的一些力和全部力矩，把弹箭当成一个质点，研究其在重力、空气阻力以及火箭推力作用下的运动规律。质点弹道学的作用在于研究在此简化条件下的飞行弹道计算问题，分析影响飞行弹道的诸因素，并初步分析形成散布和产生射击误差的原因。

弹箭飞行的刚体弹道理论就是考虑弹箭所受的一切力和力矩，把弹箭当作刚体，研究其围绕质心的运动（也称角运动），及其对质心运动的影响。刚体弹道学的作用在于解释飞行中出现的各种复杂现象，研究稳定飞行的条件、形成散布的机理及减小散布的途径，还可以用来精确计算飞行弹道。

早在 17 世纪初叶，弹箭的飞行弹道研究开始形成一门学科，著名的意大利物理学家伽利略（Galileo, 1564—1642）发现了投掷体运动的某些规律，他在威泥汀（Venetian）兵工厂曾经担任顾问，推导出了弹箭运动的抛物线方程，同时他指出存在与空气密度及弹形等有关的空气阻力。著名的英国物理学家牛顿在其《自然哲学的数学原理》一书的第 2 卷（共 9 章）中，有 4 章全部讨论了外弹道学理论。牛顿所确立的力学定律和微分学，是解决外弹道学问题的理论基础。他还发现了空气阻力与速度平方成比例的定律。牛顿在弹道学上的继承人是瑞士数学家欧拉（Leonhard Euler, 1707—1783），他建立了比较完整的弹箭质心运动方程，并给出了著名的弹道欧拉分弧解法。

在此时期内，出现了一些飞行弹道的修正计算公式以及用试验的方法研究了阻力与速度的关系。如弹道摆的发明，对空气阻力的进一步研究具有重大意义。由于当时的弹速大都在亚声速范围内，对阻力的形成原因尚无全面的认识。

1851 年，军事上开始使用线膛枪炮发射的长圆形弹箭以提高射程，同时还必须保证射弹能够足够精确地命中目标。枪炮射击的准确性、射程和威力等技术要求，以及编制高

精度的射表等都是飞行弹道学必须研究解决的主要课题。同时，由于航空技术，特别是跨声速条件下关于空气阻力的研究、气象学的成就等，给外弹道学发展创造了有利的条件，并取得了相当巨大的成就。首先是火箭质心运动问题的解法，此时期内的研究已达完善成熟的阶段。风洞、火花照相、阴影照相、纹影照相及测速雷达等设备仪器，在外弹道测试中被相继使用，使人们深刻地认识了火箭空气阻力的形成原因，对阻力的处理和计算日益完善准确，各种近似的弹道解法不断出现。19世纪末，意大利弹道学者西亚切（Siacchi）提出的西亚切近似分析解法，至今仍有一定的实用价值。在我国，清代数学家李善兰（1811—1882）首先应用数学理论研究外弹道学。20世纪30年代末，我国外弹道学家张述祖教授，在弹道解法上进行了比较深入的研究。

世界上第一台电子计算机于1946年在美国马里兰州阿伯汀试验场（Aberdeen Proving Ground）弹道研究所研制成功，并首先为弹道计算服务，弹道修正理论及计算方面的研究日益完善。由于数值积分法可达到理想的精度，因而认为该方法是精确解法，此解法中的龙格-库塔（Runge-Kutta）法是目前应用计算机求解弹道的主要数学基础。

关于刚体火箭的角运动问题，21世纪初俄国弹道学家马也夫斯基（Маиевский）研究了小章动角时的情况，导出了具有较大实用价值的膛线缠度公式。德国外弹道学家克朗茨（Cranz），英国的福勒（Fowler）、盖洛卜（Gallop）、利彻蒙（Richmond）和劳克（Leek）等弹道学家，对刚体火箭角运动方程的研究和应用，均做出了较大的贡献。

美国弹道学肯特（Kent）在第二次世界大战后领导设计、发展并完善了美国弹道研究所靶道，由射击试验获得了火箭全飞行过程中的闪光照片。英、法、德、瑞典及苏联等国家也都建立了较完善的靶道，由试验得出火箭的飞行姿态以及测定作用在飞行火箭上的全部空气动力和力矩，特别是对马格努斯（Magnus）力及力矩的研究不断深入。美国弹道学戴维斯（Davis）、福林（Follin）及布利哲（Blitzer）等确定了新的空气阻力定律。

自20世纪50年代初，美国弹道学家麦克沙恩（McShane）在考虑全部空气动力及力矩的条件下，首先提出了动态稳定性的概念。戴维斯、墨菲（Murphy）、尼可拉狄斯（Nicolardes）及布加乔夫（Пугадев）等弹道学家，对大章动角条件下的非线性外弹道理论的研究都做出了一定的贡献。

在弹道测试中，各种类型的雷达、摄影经纬仪、电影经纬仪、高速摄影机及遥测装置等设备仪器被相继应用并不断更新。这些仪器加强了对全弹道的测试，它们可准确地测定火箭飞行时间、质心坐标、速度、转速、飞行姿态，对稳定性及密集度的研究具有十分重要的意义。

随着科学技术的飞速发展，新型兵器及飞行器不断出现，外弹道学的研究领域也日益广泛，出现了本学科的各种分支，如枪炮外弹道学、实验外弹道学、无控的火箭外弹道学、导弹飞行力学、灵巧与智能弹药弹道学等。

1.2 弹箭飞行原理在弹箭研制中的作用

1.2.1 弹箭飞行弹道的计算与射表编制

弹箭飞行弹道的计算是根据一定的已知条件, 计算描述弹箭在空中运动规律的有关参量。

以质点飞行弹道计算为例, 是指根据弹炮(枪)系统的有关特征参数和条件, 如弹箭质量、弹径、弹形、炮身仰角、初速(近似为弹箭质心在枪炮口的速度)以及气象条件等, 计算出描述弹箭质心在空中运动规律的参量——任意时刻质心坐标、速度大小和方向, 这是飞行弹道计算的正面问题。飞行弹道计算的反面问题, 是给定描述弹箭质心在空中运动规律的某些参量, 如坐标、飞行时间等, 再利用其他某些初始值, 如仰角、初速等, 反算出某些特征量, 如弹箭质量、弹形等。

弹箭飞行弹道计算在武器研制中有着广泛的应用。例如, 编制射表就需进行大量的弹道计算。在一定条件下, 枪炮发射仰角与射程或射高对应的数值表, 就是所谓射表的基本内容。射表是实施准确有效射击的必备资料。对于枪炮瞄准具、指挥仪或射击指挥计算器等火控系统的设计, 也必须有计算弹道的数学模型作为基本依据, 并使弹道计算结果与射击中的实际弹道足够准确地符合, 或使计算结果与射表一致。实际上, 早期的外弹道学曾经被称为射表编制学。射击中的一些系统偏差量, 如气温、气压的均匀变化, 平均风的影响以及地形条件的差异等, 都必须进行相应的弹道修正计算, 否则, 弹箭就难以命中目标。

采用计算机进行飞行弹道计算或修正计算, 能迅速地得到准确的结果。但是, 近似解析算法便于从中分析一些因素之间的关系, 对某些特定问题可能计算简便, 并可吸取一些简化和处理问题的方法, 不应忽视其重要性。

1.2.2 弹箭及武器系统设计

弹箭飞行原理在武器研制中的另一个应用, 是寻求武器系统设计与飞行弹道有关参数的最佳值问题, 使武器系统设计更加合理、先进。武器系统设计与飞行弹道有关的参数很多。例如, 弹形、弹箭质量及质量分布、初速、飞行稳定性及射击密集度等, 它们都直接地确定武器系统的优劣。所谓飞行稳定性, 就是弹箭在飞行中受到外界的干扰作用时, 引起运动状态变化, 当干扰去掉以后, 弹箭自身能够恢复到预期运动状态的能力。就物理意义而言, 保证弹箭飞行稳定性的必要条件, 就是由弹尾至弹顶的弹轴指向, 与弹箭质心速度矢量之间的夹角(攻角 δ , 对旋转弹又称为章动角), 必须在足够小的范围内变化。

保证弹箭稳定飞行的方法目前有两种: 使弹箭绕纵轴高速旋转(旋转法)或在弹上安装尾翼(尾翼法)。自20世纪50年代以来, 在同一发弹上兼用旋转法及尾翼法解决稳定问题的研究也用之于实际, 此种弹称为气动陀螺弹。

实质上, 寻求武器系统设计与飞行弹道有关参数的最佳值问题, 即飞行弹道设计

的全部内容，它直接或间接地确定了整个武器系统设计质量的优劣。

1.2.3 弹箭及武器系统测试与试验

关于武器系统飞行弹道性能的试验项目，均需要由弹箭飞行原理提供原理和方法。很多需要测量得出的参数，既是飞行弹道性能指标又是武器本身的性能指标。试验不仅是检验理论和获得某些必要数据的必备手段，而且是发展理论必不可少的重要环节。

研究弹箭飞行原理应用试验和理论相结合的方法。试验方法主要是射击法和风洞法。理论分析方法一般来说是按照弹箭在飞行中的受力情况，建立所取定坐标系中弹箭的运动方程并求解，然后研究解的实际应用。由此可见，力学及数学是弹箭飞行原理的基础理论，气象学知识也将会被用到。

1.3 重力与科氏惯性力

关于重力，人们自然会想起地心引力，有人还可能把二者误为等同。实际上二者是有差别的，此差别来自地球的旋转。

由于地球的自转和绕太阳的公转，它自然不是一个惯性参考系。研究弹箭的运动又是在地球上进行的，所观察的运动速度和加速度当然是相对于地球的，所以用牛顿第三定律直接研究弹箭相对于地球的运动就会产生误差。为此必须首先研究弹箭相对地球的加速度和其绝对加速度之间的关系。

忽略地球绕太阳的公转，地球可以近似看成是定轴转动的球体。设弹箭在地心引力 F 作用下产生的绝对加速度为 a ，它可以看作是由相对加速度、牵连加速度和科里奥利（简称科氏）加速度的合成，即

$$a = a_r + a_e + a_k \quad (1-1)$$

式中： a_r 为相对地球的加速度； a_e 为牵连加速度，即弹箭所在位置随同地球旋转时的向心加速度； a_k 为由地球旋转和弹箭相对地球运动产生的科氏加速度。

设弹箭质量为 m ，由牛顿第二定律可得

$$F = ma = ma_r + ma_e + ma_k \quad (1-2)$$

由于需要的是相对地球的加速度，故式 (1-2) 可改写为

$$ma_r = (F - ma_e) - ma_k = G + F_k \quad (1-3)$$

式中： G 为重力，它是地心引力 F 与离心惯性力 $-ma_e$ 的矢量和，即

$$G = F - ma_e = mg \quad (1-4)$$

在地球上用弹簧秤或其他设备所测的永远是地心引力与离心惯性力的合力，不可能将它们分别测出。重力 G 与质量的比值就是重力加速度 g 。

F_k 是科氏惯性力，当物体与地球的相对速度为零时此力为零，其表达式为

$$F_k = -ma_k \quad (1-5)$$

离心惯性力随地理纬度的不同而变化，重力加速度的地面值也是随纬度变化的，见

表 1-1。由于重力加速度变化不大，所以在弹道计算中可将其当作常数。重力加速度的国际标准值为 $9.806\ 65\ \text{m/s}^2$ 。

表 1-1 重力加速度地面值随纬度变化

纬度/(°)	0	15	30	45	60	75	90
$g/(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	9.780	9.784	9.793	9.806	9.819	9.829	9.833

重力加速度随高度也是变化的。由于地心引力远大于离心惯性力，而地心引力的大小是与物体距地心距离的平方成反比的，所以某高度处的重力加速度 g 与地面重力加速度 g_0 的关系为

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+y)^2} \quad (1-6)$$

式中： R 为地球半径，在计算中取 $R = 6\ 356\ 766\ \text{m}$ （相当于北纬 45° 的值）； g 为重力加速度，随高度的变化也是很小的，在 $30\ 000\ \text{m}$ 高处的 g 值比地面的 g 值只减小约 1%。所以只有在编拟远程火炮射表时才考虑 g 随高度的变化。

由式 (1-3) 知，只需要将地球旋转所产生的惯性力当作外力，即可将地球当作惯性参考系，应用牛顿第二定律研究弹箭运动，对地球的相对速度和相对加速度即可当作绝对速度和绝对加速度。后面所述绝对速度和绝对加速度，即指相对地球的速度和加速度。

1.4 大气的特性

包围在地球周围的空气就是一般所说的大气。弹箭在其中运动，大气的特性对弹箭的受力大小有重大影响，因此先研究大气特性。

空气密度是决定弹箭受力大小的主要因素，而空气密度又取决于空气的压强和温度等。必须首先研究空气密度与气压、气温的关系；然后研究气压和气温随高度的变化规律。此外，声音在空气中传播的速度反映空气的可压缩性，对弹箭的受力大小也有一定影响，所以还需要研究声速随高度的变化规律。

1.4.1 大气状态方程与虚拟温度

由物理学可知，对于理想气体来说，一定质量的气体，其压强 p 、体积 V 和热力学温度 T 三个状态参量之间满足以下关系：

$$\frac{pV}{T} = \text{常数}$$

对于单位质量的气体，其压强 p 与密度 ρ 的关系为倒数关系，由此可得

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1-7)$$

式中： T 为气体温度； R 为气体常数，与该气体的摩尔质量成反比。对于不同的气体， R

有不同的数值。

当密度不太大时，空气和水蒸汽都可看作理想气体。根据空气的平均摩尔质量可计算出气体常数 $R_1 = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ，水蒸汽的气体常数 $R_2 = 462 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $R_2 \approx 8/5 R_1$ 。

大气是干空气和少量水蒸汽组合而成的混合气体，设干空气和水蒸汽在温度 T 下单独存在时的密度和压强分别为 ρ_1 、 p_1 和 ρ_2 、 p_2 ，则由式 (1-7)，可得

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R_1 T}, \quad \rho_2 = \frac{p_2}{R_2 T} \quad (1-8)$$

式中： ρ_1 与 ρ_2 之和即为大气的密度 ρ 。

根据式 (1-8) 及 R_1 和 R_2 数值间的关系 $\left(R_2 = \frac{8}{5} R_1\right)$ ，可得

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \left(p_1 + \frac{5}{8} p_2\right) \frac{1}{R_1 T} = \left(p_1 + p_2 - \frac{3}{8} p_2\right) \frac{1}{R_1 T}$$

根据分压定理， $p_1 + p_2$ 即为大气压强 p ，由此可得

$$\rho = \left(p - \frac{3}{8} p_2\right) \frac{1}{R_1 T} = \frac{p}{R_1 T \left(1 - \frac{3}{8} \frac{p_2}{p}\right)}$$

定义虚拟温度（简称虚拟温度）

$$\tau = T / \left(1 - \frac{3}{8} \frac{p_2}{p}\right)$$

则

$$\rho = \frac{p}{R_1 \tau} \quad (1-9)$$

由式 (1-9) 可见，在引入虚拟温度 τ 以后，湿空气的状态方程具有与干空气相同的形式。式 (1-9) 就是大气状态方程，可用来计算弹箭运动中周围大气的密度。外弹道学中所用的都是虚拟温度，因而通常所讲的气温都是指虚拟温度。

空气中水蒸汽压强的表达式为 $p_2 = \varphi p_b$ ，其中， p_b 为某温度时的饱和水蒸汽压，也称为绝对湿度，其值见本书附表 1； φ 为相对湿度，定义为某温度时的水蒸汽压与该温度时的饱和水蒸汽压之比。

1.4.2 气压随高度的变化

气压随高度的变化取决于空气在铅直方向的受力情况。在空中任意高度 y 处取一个气体微团，其厚度为 dy （图 1-1），上、下底面积为 S ，则其体积为 Sdy ，其所受重力为 $\rho g S dy$ 。设其下底面处压强为 p ，上底面处压强为 $p + dp$ ，则该气体微团所受相邻大气压强的合力，下底面上为 $S p$ ，上底面上为 $S(p + dp)$ 。

由于大气在铅直方向运动的加速度很小，与重力

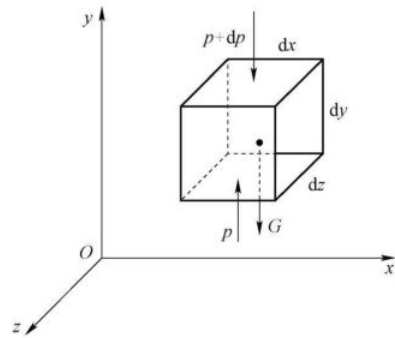


图 1-1 大气在铅直方向受力情况

加速度相比可以忽略不计，所以可以认为该微团在这些力作用下处于平衡状态。由此可以得到各力的关系为

$$Sp - S(p + dp) - \rho g S dy = 0$$

上式化简后可得

$$dp / dy = -\rho g \quad (1-10)$$

将式(1-9)代入式(1-10)，可得

$$dp / dy = -\frac{\rho g}{R_1 \tau} \quad (1-11)$$

式(1-10)、式(1-11)决定了气压对高度的变化率，称为大气铅直平衡方程。由式(1-11)，只要知道了虚拟温度 τ 随高度的变化规律，即可得到气压随高度的变化规律。

1.4.3 气温随高度的变化

根据温度变化规律的不同，大气可分为若干层。最下面一层称为对流层，在这一层中，气温随高度的升高而下降。气温与高度的关系可以近似认为是直线关系。

对流层形成的原因是由于大气直接吸收太阳辐射热量的能力小，太阳辐射的热量大部分被地球表面吸收，地球表面温度升高后反过来向大气辐射，因而使大气越靠近地表部分温度越高。下层空气受热上升，膨胀过程中温度逐渐降低；而上面冷空气逐渐下降，受压缩而温度逐渐升高。这样就形成了空气的上、下对流，此对流过程处于不停的动态平衡之中。对流层顶的高度随地理纬度和季节的不同而变化，在纬度 45° 左右的年平均高度为 $11 \sim 12$ km。

对流层之上为同温层，在同温层内气温不随高度而变化。在对流层与同温层之间有一个过渡区间，称为亚同温层。

在同温层内空气没有上、下的对流，只有水平方向流动，因而又称平流层。同温层顶的高度约为 80 km。一般炮弹和无控火箭的最大弹道高都不会超过这个高度。

1.4.4 声速随高度的变化

由物理学可知，声音在空气中传播的速度 c_s 与空气中压强对空气密度的导数有关，即

$$c_s = \sqrt{dp / d\rho} \quad (1-12)$$

由式(1-12)可以看出，声速的大小能反映出空气的可压缩性。声速大表示空气的可压缩性小，此时需要有较大的压强变化才能有很小的密度变化；相反，声速小表示空气的可压缩性大，此时只需很小的压强变化即可产生比较大的密度变化。

在声音的传播过程中，空气的压缩和膨胀是在很短的时间中进行的，来不及进行热量的传递，可以看作是绝热过程。因此，利用绝热过程状态方程，可得

$$p / \rho^k = p_0 / \rho_0^k \quad (1-13)$$

式中： k 为绝热指数，对于空气绝热指数取 1.404 。

对式 (1-13) 求导, 可得

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p_0}{\rho_0^k} \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho^k} \rho^{k-1} = k \frac{p}{\rho} \quad (1-14)$$

将式 (1-14) 代入式 (1-12), 可得

$$c_s = \sqrt{kp/\rho} \quad (1-15)$$

由式 (1-9) 和式 (1-15), 可得

$$c_s = \sqrt{kR_1\tau} \quad (1-16)$$

由式 (1-16) 可知, 声速是温度的函数。将 $k=1.404$ 、 $R_1=287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 和 $\tau_{0n}=288.9 \text{ K}$ 代入式 (1-16) 可得声速的地面标准值, 即

$$c_{s0n} = 341.1 \text{ m/s}$$

1.5 标准气象条件

各种火炮、火箭、炸弹等武器, 最重要的指标是射程和侧偏。但是弹箭在大气中飞行, 其射程的远近和侧偏的大小将随大气情况而变化, 而大气条件又是随地域、时间千变万化的。因此, 在武器的飞行弹道设计、弹道表和射表的编制中, 必须统一选定某一种标准气象条件计算弹道, 而在应用射表时, 必须对实际气象条件与标准气象条件的偏差进行修正。

世界气象组织 (World Meteorological Organization, WMO) 对标准大气的定义是: “所谓标准大气, 就是能够粗略地反映出周年、中纬度情况的, 得到国际上承认的假设大气温度、压力和密度的垂直分布。” 标准大气在气象、军事、航空和航天等部门中有着广泛的应用, 它的典型用途是作为压力高度计校准, 飞机性能计算, 火箭、导弹和弹箭的外弹道计算, 弹道表和射表编制, 以及一些气象制图的基准。标准气象条件是根据各地、各季节多年的气象观测资料统计分析得出的, 使用标准大气能使实际大气与它所形成的气象要素偏差平均而言比较小, 这将有利于对非标准气象条件进行修正。

所有的标准大气都规定风速为零。

1.5.1 标准大气

目前, 国际标准化组织 (International Organization for Standardization, ISO)、世界气象组织、国际民用航空组织及一些国家都采用 1976 年美国标准大气 (30 km 以下), 因而这一标准大气已经作为国际标准大气。

我国在 1980 年公布了 30 km 以下标准大气, 直接采用了 1976 年美国标准大气, 并作为国家标准使用, 即 GB/T 1920—1980。目前, 有些常规武器的飞行高度已经超过了 30 km, 如 150 km 和 300 km 火箭的最大弹道高度可达 50~100 km。目前, 尚未建立 30 km 以上的炮兵军用标准大气, 正在研究之中, 对这些武器的飞行弹道计算暂时可直接借用

国际标准大气，或暂用国家军用标准。

1.5.2 我国炮兵标准气象条件

我国现用的炮兵标准气象条件规定如下。

1. 地面（海平面）标准气象条件

气温 $t_{0n} = 15\text{ }^{\circ}\text{C}$ ，密度 $\rho_{0n} = 1.206\text{ }3\text{ kg/m}^3$

气压 $p_{0n} = 100\text{ kPa}$ ，地面虚拟温度 $\tau_{0n} = 288.9\text{ K}$

相对湿度 $\varphi = 50\%$ （水蒸汽分压 $(p_b)_{0n} = 846.6\text{ Pa}$ ）

声速 $c_{s0n} = 341.1\text{ m/s}$ ，无风

2. 空中标准气象条件（30 km 以下）

在所有高度上无风。

对流层 ($y < y_d = 9\text{ }300\text{ m}$ ， y_d 为对流层高度)，虚拟温度函数为

$$\tau = \tau_{0n} - G_1 y = 288.9 - 0.006\text{ }328y \quad (1-17)$$

式中，

$$G_1 = -6.328 \times 10^{-3}$$

亚同温层 ($9\text{ }300\text{ m} \leq y < 12\text{ }000\text{ m}$)，虚拟温度函数为

$$\tau = A_1 - G_1(y - 9\text{ }300) + B_1(y - 9\text{ }300)^2 \quad (1-18)$$

式中，

$$A_1 = 230.0, \quad B_1 = 1.172 \times 10^{-6}$$

同温层 ($30\text{ }000\text{ m} > y \geq y_T = 12\text{ }000\text{ m}$ ， y_T 为同温层起点高度)，虚拟温度函数为

$$\tau_T = 221.5 \quad (1-19)$$

虚拟温度函数 $\tau(y)$ 、气压函数 $\pi(y)$ 和密度函数 $H(y)$ 随高度变化的标准定律如图 1-2 所示。

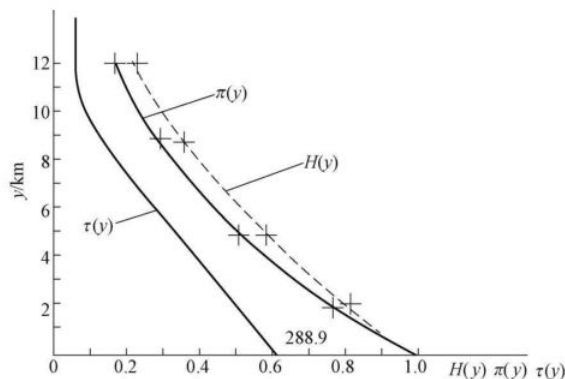


图 1-2 虚拟温度函数、气压函数和密度函数随高度变化的标准定律

在计算弹道时，为了方便，可事先将气压函数 $\pi(y)$ 计算出来。

在对流层内 ($y < 9\text{ }300\text{ m}$)，气压函数为

$$\pi(y) = (1 - 2.1904 \times 10^{-5} y)^{5.4} \quad (1-20)$$

在亚同温层 ($9\,300\text{ m} \leq y < 12\,000\text{ m}$), 气压函数为

$$\pi(y) = 0.292\,257\,5 \times \exp \left\{ -2.120\,642 \left(\arctan \frac{2.344(y - 9\,300) - 6\,328}{32\,221.057} + 0.193\,925\,20 \right) \right\} \quad (1-21)$$

在同温层内 ($y \geq 12\,000\text{ m}$), 气压函数为

$$\pi(y) = 0.193\,725\,4 \times \exp[-(y - 12\,000) / 6\,483.305] \quad (1-22)$$

对于密度函数 $H(y)$, 有时采用下列公式计算:

对于 $y < 9\,300\text{ m}$, 有

$$H(y) = (1 - 2.1904 \times 10^{-5} y)^{4.4} \quad (1-23)$$

对于 $y < 10\,000\text{ m}$, 有

$$H(y) = \exp(-1.059 \times 10^{-4} y) \quad (1-24)$$

对于 $y < 12\,000\text{ m}$, 有

$$H(y) = (20\,000 - y) / (20\,000 + y) \quad (1-25)$$

在一般情况下, 计算弹道时, 可以直接应用式(1-23), 但是一般不直接用式(1-24)和式(1-25)。

除了应用上述公式之外, 虚拟温度随高度的变化、气压函数、空气密度函数、声速随高度的变化都可以查阅本书的附表2~附表5。

1.5.3 我国空军标准气象条件

空军根据航弹和航空武器作战空区域的平均气象条件制定了空军标准气象条件。

1. 地面标准气象条件

气压 $p_{0n} = 101.333\text{ kPa}$, 气温 $t_{0n} = 15\text{ }^\circ\text{C}$, 空气密度 $\rho_{0n} = 1.225\text{ kg/m}^3$

虚拟温度 $\tau_{0n} = 288.34\text{ K}$, 相对湿度 70% (水蒸汽分压 $(p_b)_{0n} = 1\,123.719\text{ Pa}$)

声速 $c_{s0n} = 340.4\text{ m/s}$, 无风

2. 空中标准气象条件

在 $y < 13\,000\text{ m}$ 时, 有

$$\begin{cases} \tau = \tau_{0n} - 0.006y \\ \pi(y) = (1 - 2.032\,3 \times 10^{-5} y)^{5.830} \\ H(y) = \frac{\rho}{\rho_{0n}} = (1 - 2.032\,3 \times 10^{-5} y)^{4.830} \end{cases} \quad (1-26)$$

在 $y > 13\,000\text{ m}$ 以上的同温层内, 有

$$\tau = 212.2\text{ K} \quad (1-27)$$