高等数学强化指导

余 术 编著

上海交通大学出版社

内容提要

本书根据国家教育部最新修订的考研数学考试大纲编写，共分十二章，每章由考试要求、内容提要、典型题型与例题解析及综合训练四部分内容组成。本书体例简明、科学，选题经典、原创，解析权威、详尽。相信考生通过本书系统的强化训练，一定能将高等数学相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸，达到理解题型本质、举一反三、触类旁通之效。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学强化指导 / 余术编著. —上海：上海交通大学出版社，2018

ISBN 978-7-313-20246-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①余… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第226461号

高等数学强化指导

编　　著：余　术
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：谈　毅
印　　制：江阴市华力印务有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：24
字　　数：440千字
版　　次：2018年11月第1版　　印　　次：2018年11月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-20246-8/O
定　　价：68.00元

前 言

本书根据国家教育部最新修订的考研数学考试大纲编写，共分十二章，每章由考试要求、内容提要、典型题型与例题解析及综合训练四部分内容组成。“考试要求”部分列出了考研数学大纲对本章的具体要求；“内容提要”部分对考纲所要求的相关概念、性质、定理、法则及公式做了归纳、总结、提升；“典型题型与例题解析”部分是本书的重点，也是本书的特色部分，是国家1992年实行统考以来考试真题的归类、总结与拓展，具有很强的实战意义；选题也颇为讲究，约有35%～40%的例题选自考研数学最有代表性的真题，60%～65%的例题是作者原创或长期积累的难度与考研数学真题相当，具有较高灵活性、综合性的题目；每章最后配有难度与真题相当的综合训练，期望考生在强化训练中逐步提高解题能力，掌握解题方法与技巧，所附的解答或提示还可进一步引导考生理顺思路、开拓思维。

撰写本书的宗旨是使学生考研数学的复习从这里再上新台阶。依据“导、讲、练”的特点设置布局，本书体例简明、科学，选题经典、原创，解析权威、详尽。相信考生通过本书系统的强化训练，一定能将高等数学相关考点的解题方法和解题技巧娴熟于胸，达到理解题型本质、举一反三、触类旁通之效。

限于水平和时间，书中存在的疏漏或不当之处，敬请读者不吝赐教，以利本书今后的修正和完善。

余 术

二○ 一八年三月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数、极限与连续是整个高等数学的基础, 尤其是导数、定积分、级数的敛散性等重要概念均是直接建立在极限理论上. 本章概念众多, 仅函数极限定义就有二十四种之别, 故深刻理解、领会极限概念的内涵显得尤为重要, 惟有如此, 才能真正做到融会贯通, 举一反三, 切忌死记硬背.

1.1 考试要求

（1）理解函数的概念, 掌握函数的表示法, 会建立应用问题的函数关系.

（2）了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

（3）理解复合函数及分段函数的概念, 了解反函数及隐函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形, 了解初等函数的概念.

（5）理解极限的概念, 理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

（6）掌握极限的性质及四则运算法则.

（7）掌握极限存在的两个准则, 并会利用它们求极限, 掌握利用两个重要极限求极限的方法.

（8）理解无穷小量、无穷大量的概念, 掌握无穷小量的比较方法, 会用等价无穷小量求极限.

（9）理解函数连续性的概念（含左连续与右连续）, 会判断函数间断点的类型.

（10）了解连续函数的性质和初等函数的连续性.

1.2 内容提要

1. 函数

（1） 函数概念及常用特性（有界性、单调性、奇偶性、周期性）.

（2） 函数的运算（和、差、积、商函数，反函数及复合函数）.

（3） 基本初等函数及初等函数.

2. 数列的极限

1） 定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数$N$，当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$.

2） 收敛数列的性质

极限的唯一性：收敛数列的极限是唯一的.

收敛数列的有界性：收敛数列必有界.

收敛数列的保号性：若数列$\{x_n\}$收敛于a，且$a > 0$（或$a < 0$），则存在正整数N，当$n > N$时，有$x_n > 0$（或$x_n < 0$）.

收敛数列与其子数列间的关系：收敛数列的任意子数列也收敛，且收敛于原数列之极限.

3） 数列极限的四则运算法则

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = A \cdot B.$$

又若$B \neq 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}.$$

4） 数列极限的存在准则

定理 1.1 （夹逼准则） 对数列$\{x_n\}$，如果存在两数列$\{y_n\}$及$\{z_n\}$，满足：$\exists N_0 \in \mathbf{N}$，当$n > N_0$时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定理 1.2 （单调有界性准则） 单调增加（或减少）且有上界（或下界）的数列必有极限.

3. 函数的极限

1） 定义

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > M$；

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) < -M$；

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > M$；

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x)| > M$.

左右极限：

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，有 $f(x) < -M$；

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$；

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0$，$\exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，有 $f(x) > M$.

2） 性质

函数极限的唯一性：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

函数极限的局部有界性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

函数极限的局部保号性：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在常数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

进一步，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$，那么存在常数 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

3） 函数极限的四则运算法则及复合法则

设对某极限过程，如 $x\to x_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B,$$
$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B,$$

又若 $B\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}.$$

设函数 $y=f[g(x)]$ 由函数 $u=g(x)$ 及函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，且 $\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

4） 函数极限的四个定理

定理 1.3 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和右极限

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 均存在且相等.

定理 1.4 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 1.5（夹逼准则）对函数 $f(x)$，如果存在两函数 $g(x)$ 及 $h(x)$，满足：存在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

函数极限与数列极限间有下列联系：

定理 1.6（海涅定理（也称归结原则））$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是对 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ 均存在且相等.

4. 无穷小量及其比较

1） 定义

无穷小量是指以“0”为极限的量.

无穷大量实际上是极限不存在的一种形式, 即

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，有 $|f(x)| > M$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > M$.

无穷大量与无穷小量之间的联系：

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大量, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量; 反之, 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

2） 无穷小量的运算法则

有限个无穷小量的和仍是无穷小量.

有界量与无穷小量的乘积仍是无穷小量.

特别地，常数与无穷小量的乘积仍是无穷小量；有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

3）　无穷小量的比较

设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同一极限过程中的无穷小量，即 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$.

若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小量，记作 $\beta(x)=o(\alpha(x))$；

若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小量，或称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量;

若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c\neq 0$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶的无穷小量，记作 $\beta(x)=O(\alpha(x))$；

若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小量，记作 $\beta(x)\sim\alpha(x)$；

若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=c\neq 0$，则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小量.

4）　常用的等价无穷小量

当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ \ \mathrm{e}^x-1\sim x,$$

$$a^x-1=\mathrm{e}^{x\ln a}-1\sim x\ln a,\ \ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \ (1+x)^a-1\sim ax,$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3,\ \ x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2.$$

特别注意：加减运算不能用等价无穷小替换，乘除运算才能用等价无穷小替换.

5. 函数的连续性及间断点分类

1）　函数在一点连续的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，给自变量以增量 Δx，相应地有函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

也可等价叙述为：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某左邻域（或右邻域）内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$），则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续（或右连续）.

2） 函数在区间连续的概念

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内任意一点处都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续.

3） 函数间断点的分类

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果函数 $y=f(x)$ 发生下列三种情形之一：

（1） 在点 $x=x_0$ 处无定义；

（2） 在点 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

（3） 在点 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不连续，点 x_0 称为函数 $y=f(x)$ 的不连续点或间断点.

间断点通常分成两大类：

如果 x_0 是 $y=f(x)$ 的间断点，但函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的第一类间断点.

进一步细分，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的跳跃间断点；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq f(x_0)$，则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的可去间断点. 此时，只要补充定义或重新定义 $f(x_0)$ 的值，$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则函数 $y=f(x)$ 就在点

$x = x_0$ 处连续了.

如果 x_0 是 $y = f(x)$ 的间断点，且函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在，则称 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的第二类间断点. 第二类间断点包括无穷间断点和振荡间断点.

1.3 典型题型与例题解析

题型 1 数列极限及函数极限的定义

例 1.1 用数列极限的 $\varepsilon - N$ 语言证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+6}{3n^3-\sqrt{2}}=\frac{1}{3}.$$

分析 由于 $x_n = \dfrac{n^3-n^2+6}{3n^3-\sqrt{2}}$ 较复杂，故应对 $|x_n - 3|$ 适当放大处理，以便求得 N.

证明

$$|x_n-a|=\left|\frac{n^3-n^2+6}{3n^3-\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-3n^2+18+\sqrt{2}}{3(3n^3-\sqrt{2})}\right|\leqslant\frac{3n^2}{3\cdot 2n^3}=\frac{1}{2n}\quad（n\geqslant 2\text{时}）.$$

$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-a|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$，解得 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$，取 $N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]\right\}$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\max\left\{2,\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]\right\}>0$.

当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^3-n^2+6}{3n^3-\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+6}{3n^3-\sqrt{2}}=\frac{1}{3}.$$

例 1.2 用函数极限定义证明：

（1） $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\quad(x_0>0)$；

（2） $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3}{2x-1}=\infty$.

证明 （1） $\forall\varepsilon>0$，由

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

解得 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$.

注意到 $x\geqslant0$ 时 $\sqrt{x}$ 才有意义，而 $x\geqslant0$ 可用 $|x-x_0|<x_0$ 来保证，故取 $\delta=\max\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\max\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}\ .$$

（2） $\forall M>0$，由

$$\left|\frac{3}{2x-1}\right|=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left|x-\frac{1}{2}\right|}>M,$$

解得 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2M}$，取 $\delta=\frac{3}{2M}$，则 $\forall M>0$，$\exists\delta=\frac{3}{2M}>0$，当 $0<\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta$ 时，有 $\left|\frac{3}{2x-1}\right|>M$，所以

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3}{2x-1}=\infty .$$

例 1.3 （单项选择题）设函数 $f(x)$ 处处可导，则（ ）.

（A） 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

（B） 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

（C） 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

（D） 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

详解 举反例排除选项.

（A） 取 $f(x)=x^3$，则 $f'(x)=3x^2$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=+\infty$，故排除选项（A）；

（B） 取 $f(x)=x^2$，则 $f'(x)=2x$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$，但 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，故排除选项（B）；

（C） 取 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，故排除选项（C）；

故选（D）.

（D）证明：由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 及函数极限定义知，$\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，有 $f'(x)>M$．特别地，对 $M=1$，$\exists X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，有 $f'(x)>1$．对函数 $f(x)$ 在闭区间 $[X_0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理知，$\exists\xi\in(X_0,x)$，使得

$$f(x)-f(X_0)=f'(\xi)(x-X_0)>x-X_0,$$

即 $f(x)>f(X_0)+x-X_0$，从而有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

题型 2 未定式的定值法

思路：

$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 型：等价无穷小替换+洛必达法则；

$\infty-\infty$ 型：有分母直接通分，没有分母设置分母再通分，转化为 $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$ 型；

$0\cdot\infty$ 型：简单元素下放变为分母，转化为$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$型；

$0^0,1^\infty,\infty^0$ 型：借助于 $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$ 转化为 $0\cdot\infty$ 型，其中 1^∞ 型优先考虑使用第二个重要极限.

例 1.4 试求下列函数极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\mathrm{e}^x-1}$；（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

详解

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x^{100}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{\mathrm{e}^t}$ （令 $t=\dfrac{1}{x^2}$）

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{50\cdot 49t^{48}}{\mathrm{e}^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{\mathrm{e}^t}=0.$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot[x-\ln(1+\tan x)]}{x^4}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\tan^2 x}{x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\tan x)}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}(1-\tan x)=\frac{1}{4}.$$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\sin x+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$（分母根式有理化）

$$=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$=2\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}$$

$$=2\times\frac{1}{\dfrac{1}{2}+1}=\frac{4}{3}.$$