· 高水平高等职业院校规划教材

GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

刘宝利　朱丽平　肖　帆　主编

西北大学出版社

高水平高等职业院校规划教材

GAODENG YINGYONG SHUXUE

高等应用数学

主　编/刘宝利　朱丽平　肖　帆
副主编/李喜罕　雷育红　余　航

西北大学出版社
NORTHWEST UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学 / 刘宝利，朱丽平，肖帆主编.—西安：西北大学出版社，2019.9

ISBN 978-7-5604-4400-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… ②朱… ③肖… Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆CIP数据核字（2019）第157999号

高等应用数学

主　　编：刘宝利　朱丽平　肖帆
出版发行：西北大学出版社
地　　址：西安市太白北路229号
邮　　编：710069
电　　话：029-88303313
经　　销：全国新华书店
印　　装：陕西奇彩印务有限责任公司
开　　本：787毫米×1092毫米　1/16
印　　张：21
字　　数：447千字
版　　次：2019年9月第1版　2019年9月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5604-4400-0
定　　价：45.00元

前　言

为落实高职高专院校培养高素质技能型人才的需要，在总结全国高职高专院校数学课程教学改革经验的基础上，我们编写了适应高职高专院校各专业的《高等应用数学》教材。

一、编写原则

(1)依据教育部《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》编写此教材，内容覆盖各专业对高等数学的需求，对超出基本要求的内容在相应的章节前加“*”号标明。

(2)注重贯彻“轻理论、重应用”的教学原则。轻理论是对概念、原理以基本了解为要求，不重论证；强化应用要落实到：一是使学生能方便地用所学数学方法求解简单的数学模型，二是整本教材能根据不同专业以相关实例引入各类知识点。

(3)在注意数学自身的系统性与逻辑性的基础上，对难度较大的基础理论不追求严格的论证，只作简单的几何说明，以够用为度。

(4)特别注意与实际应用联系，注重对基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换。

(5)在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。

二、编写特色

1.从专业需求出发，优化教学内容

信息化的背景下，多媒体技术能够将高等数学教学内容以更加清晰、简洁的方式展示出来，我们应及时优化教学内容，使教学内容能够与现代化教学手段和模式相适应，使复杂的时间和空间表达更加符合其实际特点。

2.利用互联网实现资源共享

教师利用信息技术将教学内容制作成课件、微课、视频，上传到教学资源平台。教师或学生可以利用个人电脑、手机或平板等进入平台，便于学生和教师进行上传或下载与高等数学相关的教学资源，拓宽学生的学习时间和空间。

3.建设与信息化时代相适应的数学文化

在信息化教学中，将数学文化充分展现给学生，并且加深他们对数学的理解。数学文化在当今信息化时代当中，能够有效地将社会实践的内容与数学抽象的理论知识结合

起来，因此本教材采用数学文化与二维码结合的编写方式。

4.增加数学软件的内容，将数学建模、数学实验的思想和方法融入教材

学生在学好学院开设的计算机应用基础和办公自动化以外，能够使用MathType编辑高等数学习题和作业中的公式，应用其他软件验证高等数学中涉及的复杂计算和图形的性质，也可以进行简单编程解决实际问题。

5.强化数学实践

传统的高等数学教学模式只注重数学理论的教学，而忽视了数学实践能力的教学。这就需要高等数学在教学的过程中，引进大量的与教学内容相关的实例，使学生在学习数学知识的过程中体会到数学的魅力。

三、适用范围

本书可作为高职高专院校各专业高等数学教材，也可供经济管理类专业选用。本书的整个编写和出版过程得到了西安航空职业技术学院通识教育学院领导和数学教研室全体同仁的支持和帮助。本书由西安航空职业技术学院刘宝利、朱丽平、肖帆担任主编，李喜罕、雷育红、余航担任副主编。刘宝利、朱丽平负责整本书的策划，全书的统稿由朱丽平完成。

具体编写分工如下：

(1)教材内容：第1、2、7、13章由刘宝利编写，第3、10章由朱丽平编写，第8、11章由肖帆编写，第4、5章由李喜罕编写，第6、9章由雷育红编写，第12章由余航编写。

(2)数学文化：第1、2、7章由刘宝利编写，第3～6章、第8～12章由余航编写。

(3)建模专题：第1、2、7章由刘宝利编写，第3、10章由朱丽平编写，第8、11章由肖帆编写，第4、5、6、9、12章由余航编写。

由于水平有限，时间也比较仓促，本书难免有不足之处，敬请读者指正。

编者

2019年春

目　录

上　册

第一章　基础知识 …… (1)
第一节　高等数学思想及方法 …… (1)
第二节　函数 …… (3)
数学文化 …… (7)
建模专题 …… (7)
本章小结 …… (8)
复习题一 …… (8)
第二章　极限与连续 …… (9)
第一节　极限 …… (9)
第二节　无穷小量与无穷大量 …… (13)
第三节　极限的运算与两个重要的极限 …… (14)
第四节　函数的连续性 …… (18)
数学文化 …… (21)
建模专题 …… (21)
本章小结 …… (21)
复习题二 …… (22)
第三章　导数与微分 …… (24)
第一节　导数的概念 …… (24)
第二节　导数的运算 …… (29)
第三节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… (34)
第四节　函数的微分 …… (40)
数学文化 …… (47)
建模专题 …… (47)
本章小结 …… (47)

复习题三 …………………………………………………………………… (48)
第四章 导数的应用 ………………………………………………………… (50)
第一节 微分中值定理 ……………………………………………………… (50)
第二节 洛必达法则 ………………………………………………………… (53)
第三节 导数在研究函数性态方面的应用 ………………………………… (57)
数学文化 ……………………………………………………………………… (63)
建模专题 ……………………………………………………………………… (63)
本章小结 ……………………………………………………………………… (64)
复习题四 ……………………………………………………………………… (65)
第五章 向量代数与空间解析几何 ………………………………………… (67)
第一节 空间向量及空间直角坐标系 ……………………………………… (67)
第二节 向量的坐标表示 …………………………………………………… (70)
第三节 向量的数量积与向量积 …………………………………………… (73)
第四节 平面与空间直线 …………………………………………………… (76)
第五节 曲面与空间曲线 …………………………………………………… (83)
数学文化 ……………………………………………………………………… (90)
建模专题 ……………………………………………………………………… (90)
本章小结 ……………………………………………………………………… (90)
复习题五 ……………………………………………………………………… (91)
第六章 多元函数的微分学 ………………………………………………… (92)
第一节 多元函数的概念、极限与连续 …………………………………… (92)
第二节 多元函数的偏导数与全微分 ……………………………………… (96)
第三节 多元复合函数与隐函数的导数 ………………………………… (103)
第四节 偏导数的几何应用 ……………………………………………… (108)
第五节 多元函数的极值 ………………………………………………… (111)
数学文化 …………………………………………………………………… (117)
建模专题 …………………………………………………………………… (117)
本章小结 …………………………………………………………………… (117)
复习题六 …………………………………………………………………… (118)
第七章 矩阵代数 ………………………………………………………… (120)
第一节 矩阵的概念 ……………………………………………………… (120)
第二节 矩阵的运算 ……………………………………………………… (124)
第三节 矩阵的初等变换 ………………………………………………… (136)

第四节 线性方程组的解 …… (144)
数学文化 …… (154)
建模专题 …… (154)
本章小结 …… (154)
复习题七 …… (155)

下 册

第八章 不定积分 …… (157)
第一节 不定积分的概念与性质 …… (157)
第二节 不定积分的换元积分法 …… (162)
第三节 不定积分的分部积分法 …… (173)
数学文化 …… (177)
建模专题 …… (177)
本章小结 …… (177)
复习题八 …… (177)
第九章 定积分及其应用 …… (180)
第一节 定积分的概念与性质 …… (180)
第二节 微积分学基本定理 …… (186)
第三节 定积分的计算方法 …… (191)
第四节 定积分的几何应用 …… (196)
第五节 广义积分 …… (200)
数学文化 …… (204)
建模专题 …… (204)
本章小结 …… (204)
复习题九 …… (205)
第十章 常微分方程与拉氏变换 …… (207)
第一节 常微分方程的基本概念 …… (207)
第二节 一阶线性微分方程 …… (213)
第三节 二阶常系数线性微分方程 …… (216)
第四节 拉氏变换的概念与性质 …… (222)
第五节 拉氏逆变换及拉氏变换的应用 …… (218)
数学文化 …… (232)

建模专题 …… (232)
本章小结 …… (232)
复习题十 …… (235)
第十一章　无穷级数 …… (237)
第一节　常数项级数的概念与性质 …… (237)
第二节　常数项级数的收敛法则 …… (241)
第三节　幂级数 …… (246)
第四节　函数展开成幂级数 …… (251)
第五节　级数的应用 …… (256)
数学文化 …… (258)
建模专题 …… (258)
本章小结 …… (259)
复习题十一 …… (259)
第十二章　多元函数的积分学 …… (261)
第一节　二重积分的概念与性质 …… (261)
第二节　二重积分的计算 …… (263)
第三节　二重积分的应用 …… (268)
数学文化 …… (270)
建模专题 …… (270)
本章小结 …… (270)
复习题十二 …… (271)
第十三章　MATLAB 软件介绍 …… (274)
实验 1　矩阵的输入与特殊矩阵的生成 …… (277)
实验 2　矩阵的运算 …… (280)
实验 3　行列式与线性方程组的求解 …… (283)
实验 4　特征向量与二次型 …… (286)
实验 5　综合实验 …… (290)
附录 …… (294)
参考答案 …… (309)
参考文献 …… (326)

第一章　基础知识

第一节　高等数学思想及方法

自然界没有绝对静止或绝对孤立的事物.函数能准确地刻画各事物或各因素之间的相依关系,它提供了进行数量研究的方法.公元 1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet,1805—1859)提出了现今通用的函数定义,使函数关系更加明确.极限是一个最基本、最重要的概念.19 世纪以前,人们用朴素的极限思想计算了圆的面积、体积等.19 世纪之后,柯西(Cauchy,1789—1851)以物体运动为背景,结合几何直观,引入了极限概念.后来,魏尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897)给出了形式化的数学语言描述.有了极限概念,我们可以计算许多具体的量,如圆周长、圆面积、速度、加速度等.极限概念奠定了微积分学的基础.以后的微分和积分都将借助于极限来描述.

基本概念与基础知识是“载体”,解题方法是“手段”,数学思想才是“深化与核心”,是分析与解决问题的“灵魂”,深刻理解与熟练运用数学思想有助于我们锻炼与形成高层次的数学思维,高水平的数学素质.

数学思想是指人们对数学理论与内容的本质的认识,而数学方法则是数学思想的具体化形式,两者本质相同,因此通常混称为“数学思想方法”.

下面是七大基本的数学思想方法(前四个为常用的思想方法):

一、函数与方程思想

(1) 函数思想是对函数内容在更高层次的抽象,概括与提炼,它要求我们要用函数的概念与性质去分析问题,转化问题和解决问题;在实际问题中,函数思想通过提出该问题中的数学特征,建立与构造函数关系型的数学模型(方程、不等式或方程与不等式的混合组)并利用函数的性质,最后通过求解函数解析式来解决问题.

(2) 方程思想是解决各类计算问题的基本思想,也是运算能力的基础.

二、数形结合思想

(1) 数学研究的对象是数量关系与空间形式,即数与形两个方面.在高等数学中,关于空间解析几何的内容就是数形结合思想的体现.

(2) 数形结合思想的实质是将抽象的数学语言与直观的几何图形有机结合,关键在于代数问题与几何图形之间的转化,而代数问题几何化(数到形的转化)相对简便,几何问题代数化则需要严密的推理论证,考察的是我们的逻辑推理能力的高低.

(3) 运用数形结合思想分析与解决问题的三点注意　掌握相关概念与运算的几何意义及几何图形(曲线、曲面)的代数特征,对具体题目而言,要分析条件与结论的几何意

义和代数意义；恰当设参，合理用参，建立关系，由数思形，以形想数，完成数与形的转化；正确确定参数的取值范围.

三、分类讨论思想

（1）分类是自然科学研究中的一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零，积零为整的思想与归类整理的方法.

（2）分类讨论分为三种情形：问题涉及的数学概念是分类进行定义的，如绝对值问题，此为概念型分类讨论题型；问题所涉及的数学定理，公式与运算性质，法则有范围或有条件限制抑或是分类给出的，此为性质型分类讨论题型；问题中含字母参数，这需要根据参数的不同取值范围进行讨论，此为含参型分类讨论题型.

（3）进行科学划分（不漏不重）是解决问题的手段，分类研究才是根本目的.

（4）解决分类讨论问题的基本方法与步骤为：首先确定讨论对象及所要讨论对象的全体的范围；其次具体问题具体分析，选取适当的分类标准，合理分类；对所分类逐步进行讨论，分级进行，获得阶段性结果；最后进行归纳总结，综合得出结论.

四、化归与转化思想

（1）化归与转化的目的：将复杂问题化归为简单问题，将较难问题化为较易问题，将未解决的新背景下的陌生问题转化为已解决的熟悉问题.

（2）此数学思想灵活度高，具有多样性，无统一模式，我们要用动态思维来寻找有利于解决问题的变换（转化）途径与方法.

（3）常用的变换方法：一般与特殊的转化，繁与简的转化，灵活巧妙地构造转化，命题的等价转化.

（4）等价转化思想方法：它可以实现数与数、形与形、数与形的相互转换；在分析与解决实际问题的过程中，实现普通语言向数学语言的翻译；函数、方程、不等式之间的恒等变形.消去法、换元法、数形结合法，求值求范围问题都体现了等价转化思想.

五、特殊与一般思想

（1）特殊到一般的本质：通过对个例的认识与研究，形成对事物本质的认知；这是一个由浅入深，由现象到本质，由局部到整体，由实践到理论的过程.

（2）该思想的具体应用：构造特殊函数、特殊数列；寻找特殊点，确立特殊位置；利用特殊值、特殊方程.

六、有限与无限的思想

（1）解决无限问题：将无限问题转化为有限问题.

（2）实例：利用定积分的定义求曲边梯形的面积，先进行有限次分割，再取近似，最后求和取极限，这是典型的有限与无限这一数学思想的应用.

七、或然与必然的思想

（1）随机现象两个最基本的特征：结果的随机性和频率的稳定性.

(2) 从偶然中寻找必然,再用必然规律解决偶然.

(3) 等可能性事件的概率;互斥事件中有一个发生的概率;相互独立事件同时发生的概率;独立重复试验＋随机事件的分布列＋数学期望.

第二节　函　数

一、常量与变量

1. 变量的定义

我们在观察某一现象的过程时,常常会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中不起变化,我们把其称之为**常量**;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,我们则把其称之为**变量**.

注意　在过程中还有一种量,它虽然是变化的,但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的,我们则把它看作常量.

2. 变量的表示

如果变量的变化是连续的,则常用区间来表示其变化范围. 在数轴上来说,区间是指介于某两点之间的线段上点的全体,见表1－1.

表1－1　区间分类

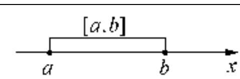
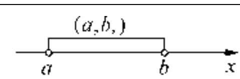
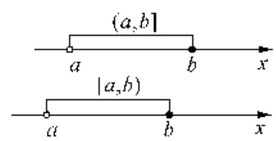
区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	
半开区间	$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	

表1－1所述的都是有限区间,除此之外,还有无限区间:

$[a,+\infty)$:表示不小于 a 的实数的全体,也可记为:$a \leqslant x < +\infty$;

$(-\infty,b)$:表示小于 b 的实数的全体,也可记为:$-\infty \leqslant x < b$;

$(-\infty,+\infty)$:表示全体实数,也可记为:$-\infty < x < +\infty$.

注意　$-\infty$ 和 $+\infty$,分别读作"负无穷大"和"正无穷大",它们不是数,仅仅是记号.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$. 满足不等式 $|x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ **邻域**,点 a 称为此**邻域的中心**,δ 称为此**邻域的半径**.

二、函数的概念

实例1　汽车租赁

某汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每千米收费 15 元.

(1) 试建立租用一辆该种汽车一天的租车费(单位:元) 与行车路程 (单位:千米) 之间的函数关系;

(2) 若某人某天付了 400 元租车费,问他开了多少千米?

解 (1) 设租用一辆该种汽车一天的租车费为 y,则 y 为每天的基本租金 200 元和当天行车 x 千米所收费用 $15x$ 之和,即

$$y = 200 + 15x.$$

(2) 将 400 代入上式,得

$$400 = 200 + 15x.$$

解之,得 $x \approx 13.3$,即他开了约 13.3 千米.

实例 2 电压波

考察脉冲发生器所产生的一个单三角脉冲电压波(图 1－1),其电压 U(伏) 与时间 t (微秒) 之间的关系为:

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{\tau}{2}, U = \frac{2E}{\tau}t;$$

$$\frac{\tau}{2} < t \leqslant \tau, U = -\frac{2E}{\tau}(t - \tau).$$

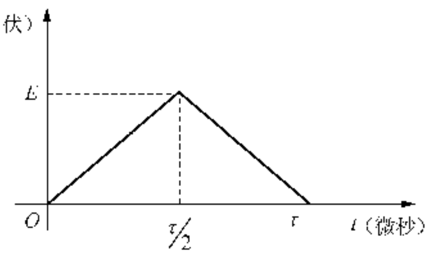


图 1－1

当 $t \geqslant \tau$ 时,$U = 0$. 这一波形的数学表达式可统一写为

$$U = \begin{cases} \dfrac{2E}{\tau}t, & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ -\dfrac{2E}{\tau}(t - \tau), & \dfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}. \tag{1}$$

在(1) 式中,t 的取值范围是数集 $D = \{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}$,对于每一个 $t \in D$,按(1) 所示规则,都有唯一确定的 U 与之对应.

函数的定义 如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**. 变量 x 的变化范围叫做这个函数的**定义域**. 通常 x 叫做**自变量**,y 叫做**函数值(或因变量)**,变量 y 的变化范围叫做这个函数的**值域**.

注意 为了表明 y 是 x 的函数,我们用记号 $y = f(x)$ 等来表示. 这里的字母“f”“F”表示 y 与 x 之间的对应法则即**函数关系**,它们是可以任意采用不同的字母来表示的. 如果自变量在定义域内任取一个确定的值时,函数只有一个确定的值和它对应,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**. 这里我们只讨论单值函数.

1. 函数相等

由函数的定义可知,一个函数的构成要素为:定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的. 所以,如果两个函数的定义域和对应关系完全一致,我们就

称两个函数相等.

2. 函数的表示方法

(1) 解析法:用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法.例如直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆的方程是:$x^2+y^2=r^2$.

(2) 表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法.例如在实际应用中,我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(3) 图示法:用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法.一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.

注意　(1) 实例2是用解析法表示的一个函数,但在其定义域的不同区间内,所对应 U 的值是用不同的解析式来表示的,这种在其定义域的不同区间上用不同的解析式来表示的函数称为分段函数.在实际生活与工程实践中,这是一类常见函数.

(2) 在函数的定义中,并没有要求自变量变化时,其函数值一定要变,因此 $Y=C$(为常数)也符合函数的定义,称 $Y=C$(为常数)为**常数函数**.

三、函数的简单性态

1. 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 无关的常数,那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界,否则便称无界.

注意　一个函数,如果在其整个定义域内有界,则称为有界函数.

例1　函数 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而增大,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加**的.如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 增大而减小,即对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调减少**的.

例2　函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减小的,在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 叫做**偶函数**;如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$ 叫做**奇函数**.

注意　偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 I,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$ 叫做**周期函数**,I 是 $f(x)$ 的**周期**.

注意　我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例3　函数 $\sin x$,$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

四、反函数

1. 反函数的定义

设有函数 $y = f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取值 y_0 时，变量在函数的定义域内必有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0) = y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x = \varphi(y)$ 来表示，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**.

注意　由此定义可知，函数 $y = f(x)$ 也是函数 $x = \varphi(x)$ 的反函数.

2. 反函数的存在定理

若 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上严格增(减)，其值域为 R，则它的反函数必然在 R 上确定，且严格增(减).

注意　严格增(减)即是单调增(减).

例 4　$y = x^2$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x = \pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上，函数不是严格增(减)，故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求 $x \geqslant 0$，则对 $y \geqslant 0$、$x = \sqrt{y}$ 就是 $y = x^2$ 在要求 $x \geqslant 0$ 时的反函数，即函数在此要求下严格增(减).

3. 反函数的性质

在同一坐标平面内，$y = f(x)$ 与 $x = \varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.

例 5　函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = \log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y = x$ 对称的. 如图 1－2 所示。

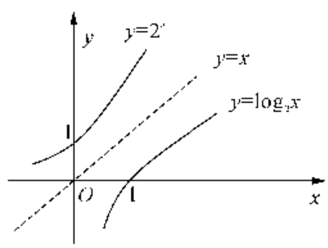


图 1－2

五、复合函数

复合函数的定义　若 y 是 u 的函数：$y = f(u)$，而 u 又是的函数：$u = \varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内. 那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，简称**复合函数**，记作 $y = f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做**中间变量**.

注意　并不是任意两个函数就能复合；复合函数还可以由更多函数构成.

例 6　函数 $y = \arcsin u$ 与函数 $u = 2 + x^2$ 是不能复合成一个函数的.

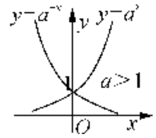
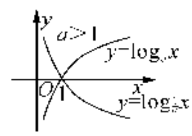
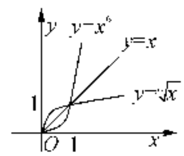
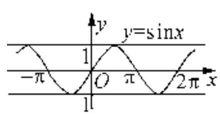
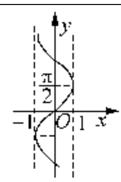
解　因为对于 $u = 2 + x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 中的任何 x 值所对应的 u 值(都大于或等于 2)，使 $y = \arcsin u$ 都没有定义.

六、初等函数

1. 基本初等函数

我们最常用的有五种基本初等函数，分别是指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数. 下面我们用表格来把它们总结一下：

表 1－2

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$		(1) 不论 x 为何值，y 总为正数 (2) 当 $x=0$ 时，$y=1$
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$		(1) 其图形总位于 y 轴右侧，并过(1,0)点 (2) 当 $a>1$ 时，在区间(0,1)的值为负；在区间$(-\infty,+\infty)$的值为正；在定义域内单调增
幂函数	$y=x^a,a\in\mathbf{R}$	这里只画出部分函数图形的一部分	令 $a=m/n$ (1) 当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数 (2) 当 m,n 都是奇数时，y 是奇函数 (3) 当 m 奇 n 偶时，y 在$(-\infty,0)$无意义
三角函数	$y=\sin x$(正弦函数) (这里只写出了正弦函数)		(1) 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 (2) 正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
反三角函数	$y=\arcsin x$(反正弦函数) (这里只写出了反正弦函数)		由于此函数为多值函数，因此我们此函数值限制在$[-\pi/2,\pi/2]$上，并称其为反正弦函数的主值

2. 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为**初等函数**.

例 7　$y=2^{\cos x}+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 8x)$ 是初等函数. $y=\lvert x\rvert$ 不是初等函数.

函数概念的发展史

数学文化

数学模型与数学建模简介

建模专题

本章小结

一、基本概念

函数,基本初等函数,初等函数,反函数,复合函数.

二、基本方法

高等数学的七大思想方法.

三、要点解析

1. 确定函数的两个要素:定义域和对应法则.
2. 函数的性质:单调性、奇偶性、周期性、有界性.
3. 基本初等函数.

复习题一

1. 填空题.

(1) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于________对称.

(2) 若 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,则 $f(x^2+1)$ 的定义域是________.

(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是________.

(4) $f(x)=x+1,\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,则 $f[\varphi(x)+1]=$ ________,$\varphi[f(x)+1]=$ ________.

(5) $y=\log_2(\sin x+2)$ 是由简单函数________和________复合而成.

(6) $f(x)=x^2+1,\varphi(x)=\sin 2x$,则 $f(0)=$ ________,$f(\dfrac{1}{a})=$ ________,$f[\varphi(x)]=$ ________.

2. 选择题.

(1) 下列函数中既是奇函数又是单调增加的函数是(　　).

A. $\sin^3 x$　　B. x^3+1　　C. x^3+x　　D. x^3-x

(2) 设 $f(x)=4x^2+bx+5$,若 $f(x+1)-f(x)=8x+3$,则 b 应为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

(3) $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是(　　).

A. 有界函数　　B. 周期函数　　C. 奇函数　　D. 偶函数

3. 求定义域 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$.

4. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

(3) $y=\lg(x+2)+1$.　　(4) $y=\lg\sin x$.

5. 设 $f(x)=x^2,g(x)=e^x$,求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)],g[g(x)]$.