普通高等教育规划教材

高等数学

上册

GAODENG SHUXUE

吴明科　唐定云　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

高等数学

上册

主　编　吴明科　唐定云
副主编　郑金梅　文华艳
参　编　张媛媛

机械工业出版社

本书分上、下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用. 在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求. 为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题.

本书适合作为高等院校理工类、经管类专业的教材，也可作为其他学科学生学习高等数学的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/吴明科主编. —北京：机械工业出版社，2015.8

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-50850-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 168536 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：王玉鑫　　责任编辑：王玉鑫　王　芳

责任校对：张　薇　　封面设计：张　静

责任印制：刘　岚

涿州市京南印刷厂印刷

2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 11.25 印张 · 266 千字

0 001—0 000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-50850-2

定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

前　　言

本书是根据高等应用型工科院校的教学要求，在作者多年教学实践的基础上，为满足高等数学课程模块化教学改革要求而编写的. 本书在编写上突出了数学知识的系统性、实用性，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识.

本书分上、下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用. 在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求. 为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题.

本书由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，吴明科、唐定云为主编，郑金梅、文华艳为副主编，张媛媛参加编写.

由于编者水平有限，且各专业对高等数学的要求不尽相同，因而本书在内容上存在的不妥之处，希望广大读者批评指正.

编　者

2015. 6

目　录

第三章　导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变量，因此初等数学又叫作常量数学．而高等数学是以极限为工具，研究变动的量，因此高等数学又称为变量数学．本章将要介绍映射、函数、极限、函数的连续等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　映射与函数

一、集合

集合在中学数学中已有介绍，本节主要从以下几个方面来理解.

1. 集合的概念

下面这些内容与中学数学一致，在此不再叙述. 它们是：集合的描述性定义、集合的表示、元素与集合的关系、集合与集合之间的关系、常用数集的表示符号等.

2. 集合的运算

集合的运算有并、交、差、补以及直积.

（1）$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$；

（2）$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$；

（3）$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$；

（4）$\complement_I A=\{x\mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}$，其中 I 称为全集或基本集；

（5）$A\times B=\{(x,\ y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$；

集合运算满足以下运算律：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$；

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律：$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$，$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

3. 区间和邻域

(1) 区间：

$\{x \mid a<x<b\}=(a, b)$；

$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}=[a, b]$；

$\{x \mid a \leqslant x<b\}=[a, b)$；

$\{x \mid a<x \leqslant b\}=(a, b]$.

(2) 邻域：

① 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记为 $U(a)$.

② 设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 也可表示为 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

③ 去心邻域，即去掉邻域的中心 a，记为 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

④ 左右邻域. 我们把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

另外，两个闭区间的直积表示 Oxy 平面上的矩形区域. 例如

$$[a, b] \times[c, d]=\{(x, y) \mid x \in[a, b], y \in[c, d]\}$$

二、映射

1. 映射概念

定义 1 设 X，Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中的每一个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的象，记作 $f(x)$，即

$$y=f(x)$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原象，集合 X 称为映射 f 的定义域，记为 D_f；X 中所有元素的象所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}$$

2. 满射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若

$$R_f=Y$$

即 Y 中的每一个元素 y 都是 X 中某元素的象，则称 f 为 X 到 Y 的**满射**.

3. 单射

若对 X 的任意两个不同的元素 x_1，x_2，即 $x_1 \neq x_2$，它们的象也不同，即

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称 f 为 X 到 Y 的**单射**.

4. 一一映射（单满射）

若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为**一一映射**，也称为**单满射**.

5. 逆映射

如果 f 为 X 到 Y 的单满射，则对于每一个 $y \in Y$，有唯一的 $x \in X$，使 $f(x) = y$，从而定义了一个从 Y 到 X 的映射 g，即

$$g: Y \to X$$

这个映射 g 称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = Y$，值域 $R_{f^{-1}} = X$.

6. 复合映射

设两个映射

$$g: X \to Y_1,\ f: Y_2 \to Z$$

其中 $Y_1 \subseteq Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定义一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每一个 $x \in X$ 映成

$$f[g(x)] \in Z$$

这个法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为 g 和 f 构成的复合映射，记为 $f \circ g: X \to Z$，其中 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$，$x \in X$.

三、函数

1. 函数的概念

定义 2　设有数集 $D \subseteq R$，则映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的**函数**，记为

$$y = f(x),\ x \in D$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，D 称为定义域，$f(D) \subseteq R$ 称为值域.

函数的三要素：定义域 D、对应法则 f、值域 $f(D)$.

函数的表示法：表格法、图像法、解析法.

函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $f(D) = [0, +\infty)$，它的图像如图 1－1 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\{-1,0,1\}$，它的图像如图 1－2 所示. 这个函数称为**符号函数**. 对任意实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$$

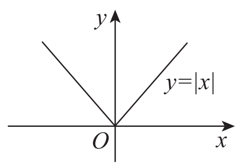

图 1－1

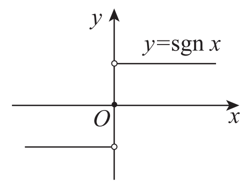

图 1－2

设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$. 例如

$$\left[\frac{2}{3}\right]=0,\ [\sqrt{3}]=1,\ [\pi]=3,\ [-1]=-1,\ [-2.5]=-3$$

把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $f(D)=\mathbf{Z}$，它的图像如图 1－3 所示. 其图像称为阶梯曲线，这个函数称为**取整函数**.

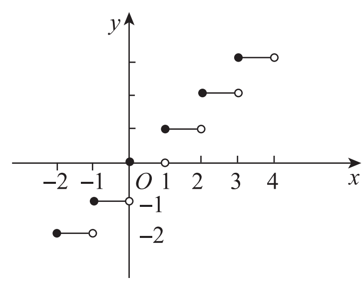

图 1－3

2. 具有特殊性质的函数

（1）有界函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个数 K，对于所有的 $x\in D$，恒有

$$f(x)\leqslant K\ （或 f(x)\geqslant K）$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有**上界**（或**下界**）的. 如果 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称它为在 D 上**无界**.

（2）单调函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$，如果对于任意的 x_1，$x_2\in I$，满足

① 当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加**的；

② 当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**单调减少**的.

（3）奇偶函数

设函数$f(x)$的定义域D是关于原点对称的，如果对于任意$x\in D$，有

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为**偶函数**；如果对于任意$x\in D$，有

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为**奇函数**.

（4）函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个$l>0$，使对于任意$x\in D$，有$x\pm l\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为**周期函数**. l称为$f(x)$的**周期**，通常说函数的周期指的是**最小正周期**.

3. 反函数

设函数$f:D\to f(D)$是单射，则它的逆映射f^{-1}：$f(D)\to D$称为函数f的**反函数**. 一般地，函数$y=f(x)$的反函数记为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D)$$

4. 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g(x)$在D上有定义，且$g(D)\subseteq D_1$，则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

称为由函数$u=g(x)$ 和函数$y=f(u)$构成的**复合函数**. 它的定义域为D，变量u称为中间变量.

5. 函数的运算

假设函数$f(x)$，$g(x)$的定义域分别为D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则可以定义这两个函数的运算：

和、差的运算$f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积的运算$f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$，$x\in D$；

商的运算$\frac{f}{g}$：$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0\}$.

6. 初等函数

（1）基本初等函数

幂函数：$y=x^{\alpha}$（$\alpha\in\mathbf{R}$，常数）.

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$且$a\neq1$）.

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）. 特别地，当$a=10$时，记为$y=\lg x$；当$a=\mathrm{e}$时，记为$y=\ln x$.

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等.

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

（2）初等函数

常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合构成，并可以用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

（3）双曲函数

双曲正弦函数：$\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

双曲余弦函数：$\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数：$\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

显然，双曲正弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，在定义域内它是单调增加的，它的图像在第一象限内随着 x 的增大接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$，如图 1－4 所示.

双曲余弦函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 它是偶函数，其图像经过点$(0,1)$，且关于 y 轴对称. 在区间$(-\infty,0)$内它是单调减少的，在区间$(0,+\infty)$内它是单调增加的. 它的图像随着 x 的增大，在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$，而在第二象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$，如图 1－4 所示，$\operatorname{ch}0=1$ 是这个函数的最小值.

双曲正切函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 它是奇函数，其图像通过原点，且关于原点对称. 在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的，其图像在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间，且当$|x|$很大时，在第一象限内接近于直线 $y=1$，在第三象限内接近于直线 $y=-1$，如图 1－5 所示 .

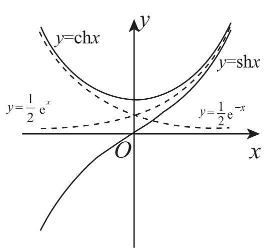

图 1－4

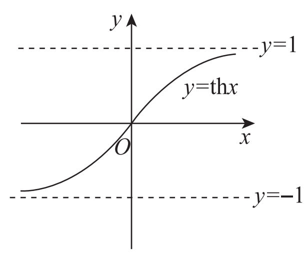

图 1－5

根据双曲函数的定义，有下列公式：

$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$；

$\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$；

$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$；

$\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$；

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;

$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}x$;

$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

以上公式与三角函数的有关公式类似，把它们进行对比记忆.

反双曲函数，我们进行以下讨论.

反双曲正弦函数：$y=\mathrm{arsh}x$;

反双曲余弦函数：$y=\mathrm{arch}x$;

反双曲正切函数：$y=\mathrm{arth}x$.

因为
$$y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
则
$$e^{2x}-2ye^x-1=0$$
所以
$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$$
又因为 $e^x>0$，所以
$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$
则
$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$
故得
$$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

显然 $y=\mathrm{arsh}x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的. 由 $y=\mathrm{sh}x$ 可画 $y=\mathrm{arsh}x$ 的图像，如图 1－6 所示.

下面讨论双曲余弦函数 $y=\mathrm{ch}x(x\geqslant0)$的反函数. 由 $\mathrm{ch}x=y$，有
$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(y\geqslant1)$$
由此得
$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$$
故有
$$x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$$
所以
$$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

其定义域为$[1,+\infty)$，在区间$[1,+\infty)$上是单调增函数，如图 1－7 所示.

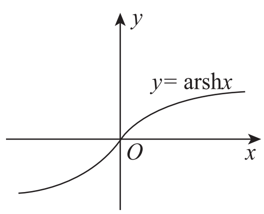

图 1－6

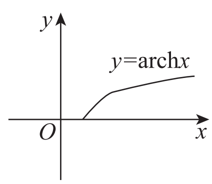

图 1－7

同理可得
$$y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

它的定义域为$(-1, 1)$，在区间$(-1, 1)$内是单调增函数，且是奇函数，其图像关于原点对称，如图 1-8 所示.

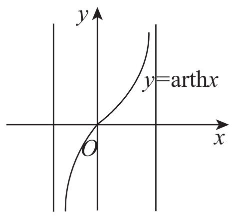

图 1-8

习　题 1-1

❶ 设

$$f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

求$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$f(-1)$，并画出图像.

❷ 设 $y=x^2$，当 $x\in U(0, \delta)$时，要使 $y\in U(0, 2)$，δ 应该取多少？

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

为了掌握变量的变化规律，有时不仅要考虑变量的变化过程，还要判断它的变化趋势. 例如，有一个变量，开始是 1，然后变为$\dfrac{1}{2}$，接着变为$\dfrac{1}{3}$，然后是$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，…，$\dfrac{1}{n}$，…如此一直无尽地变下去．虽然它是无尽的，但它的变化却有一个趋势，就是越来越接近于 0. 此时，我们就说这个变量的极限是 0. 高等数学中有很多重要的概念和方法都和极限有关，因此可以说极限是高等数学的一个重要的工具. 在实际问题中，极限也占有重要地位，如求圆的面积和周长．我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何上的应用.

设有一圆，首先构建内接正六边形，面积记为 A_1；然后构建正十二边形，面积记为 A_2；再构建内接正二十四边形，面积记为 A_3……如此下去，每次边数增加一倍. 一般地，

把内接正 $6\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，这样就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

它们构成一列有次序的数，当 n 越大时，内接正多边形的面积与圆的面积差别就越小，从而以 A_n 作为圆面积的近似值也越精确. 但无论 n 取如何大，只要 n 取定了，A_n 也只是多边形的面积，而不是圆的面积. 如果 n 无限增大(记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大)时，内接正多边形的边数也无限增加，而在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆. 这个“无限接近”的过程就是一个极限过程. 这时，A_n 也无限接近某一确定的数值，这个确定的数值可理解为圆的面积.

我们首先说明数列的概念. 如果按照某一法则，对于每一个 $n\in\mathbf{N}^*$，都对应着一个确定的实数 x_n. 这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

叫作数列，简记为 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项叫作数列的一般项.

一些简单数列的例子：

$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$，具体写出来就是：$-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$

$\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$，具体写出来就是：$2, 1+\dfrac{1}{2}, 1+\dfrac{1}{3}, 1+\dfrac{1}{4}, \cdots$

$\{n^2\}$，具体写出来就是：$1, 4, 9, 16, \cdots$

$\{1+(-1)^n\}$，具体写出来就是：$0, 2, 0, 2, \cdots$

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n=f(n),\quad n\in\mathbf{N}^*$$

当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 所有正整数时，对应的函数就排列成数列 $\{x_n\}$.

现在我们关心的是：当 n 无限增大时(即 $n\to\infty$ 时)，对应的 $x_n=f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值. 如果能，这个数值又等于什么？

从直观上容易看出，数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 随着 n 的增大，越来越接近于 1. 但我们还是要进一步分析，如何用数学语言来表达. 所谓数列 $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$ 越来越接近 1，是指随着项数 n 的增加，$1+\dfrac{1}{n}$ 越来越接近于 1. 换句话说，当 n 不断增大时，$1+\dfrac{1}{n}$ 与 1 的差不断接近于 0.

进一步说，随便给定一个无论多么小的正数 ε，$1+\dfrac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值总会小于这个 ε，条件是 n 必须充分大. 但究竟 n 要多大呢？只要按照下面的方法去做就可以了，即为了使得

$$\left|1+\frac{1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\quad\left(1+\frac{1}{n}\text{与 1 之差的绝对值比 }\varepsilon\text{ 小}\right)$$

解此不等式，可得

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

把上面的话连接起来就是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，就能证明 $1+\frac{1}{n}$ 与 1 之差的绝对值小于 ε，这就意味着 $1+\frac{1}{n}$ 越来越接近 1. 把这句话抽象化，可得到数列极限的定义.

定义 1 （数列极限的定义）设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在正常数 a，对于任意给定的正数 ε（无论它多么小），总存在一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，我们就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

或

$$x_n\to a\ (n\to\infty)$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的，习惯上说 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在.

上面定义中的正数可以任意给定是很重要的. 只有这样，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 此外，还应注意到，定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 有关，它随着 ε 的给定而选定.

现在，我们给出数列极限的几何解释. 在定义中不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

就是

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

它表示 x_n 在开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内. 因此 $\{x_n\}$ 以 a 为极限就是对于任意给定的一个开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$，第 N 项以后的一切数 x_{N+1}，x_{N+2}，…全部落在这个区间内（见图 1－9），而只有有限个（至多 N 个）在区间以外.

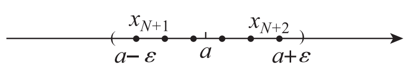

图 1－9

为了表达方便，引入记号"∀"，它表示"对于任意给定的"或"对于每一个"；记号"∃"表示"存在". 于是"对于任意给定的 $\varepsilon>0$"可写成"$\forall\varepsilon>0$"；"存在正整数 N"可写成"$\exists N$"，而数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的定义表达为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ 当\ n>N\ 时，有\ |x_n-a|<\varepsilon$$

数列极限的定义并没有直接提供求数列极限的方法，关于极限的求法后面再讲. 现在举几个例子说明极限的概念以及如何用定义来考察数列的极限.