

普通高等教育规划教材

# 高等数学

上册

GAODENG SHUXUE

吴明科 唐定云 主编



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育规划教材

# 高等数学

上册

主 编 吴明科 唐定云  
副主编 郑金梅 文华艳  
参 编 张媛媛



机械工业出版社

本书分上、下两册,上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用.在体系安排上,注重贯彻循序渐进的原则,精心配备了各章节的例题和习题,满足教学内容多样化、难度梯度化需求.为了体现微积分在专业领域的应用,在部分章的最后还设有知识点的应用模块,帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题.

本书适合作为高等院校理工类、经管类专业的教材,也可作为其他学科学生学习高等数学的参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/吴明科主编. —北京:机械工业出版社,2015.8

普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-111-50850-2

I. ①高… II. ①吴… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第168536号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:王玉鑫 责任编辑:王玉鑫 王芳

责任校对:张薇 封面设计:张静

责任印制:刘岚

涿州市京南印刷厂印刷

2015年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·11.25印张·266千字

0 001—0 000册

标准书号:ISBN 978-7-111-50850-2

定价:28.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88379833

读者购书热线:010-88379649

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

金书网:www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

## 前 言

本书是根据高等应用型工科院校的教学要求，在作者多年教学实践的基础上，为满足高等数学课程模块化教学改革要求而编写的。本书在编写上突出了数学知识的系统性、实用性，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识。

本书分上、下两册，上册内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分以及定积分的应用。在体系安排上，注重贯彻循序渐进的原则，精心配备了各章节的例题和习题，满足教学内容多样化、难度梯度化需求。为了体现微积分在专业领域的应用，在部分章的最后还设有知识点的应用模块，帮助读者理解并应用高等数学相关知识解决实际问题。

本书由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，吴明科、唐定云为主编，郑金梅、文华艳为副主编，张媛媛参加编写。

由于编者水平有限，且各专业对高等数学的要求不尽相同，因而本书在内容上存在的不妥之处，希望广大读者批评指正。

编 者

2015. 6

# 目 录

前言

## 第一章 函数与极限

### 第一节 映射与函数 / 1

- 一、集合 / 1
- 二、映射 / 2
- 三、函数 / 3
- 习题 1-1 / 8

### 第二节 数列的极限 / 8

- 一、数列极限的定义 / 8
- 二、收敛数列的性质 / 12
- 习题 1-2 / 14

### 第三节 函数的极限 / 14

- 一、函数极限的定义 / 14
- 二、函数极限的性质 / 18
- 习题 1-3 / 19

### 第四节 无穷小与无穷大 / 20

- 一、无穷小 / 20
- 二、无穷大 / 21
- 习题 1-4 / 22

### 第五节 极限运算法则 / 23

- 习题 1-5 / 26

### 第六节 极限存在准则 两个重要极限 / 27

- 习题 1-6 / 30

### 第七节 无穷小的比较 / 31

- 习题 1-7 / 33

### 第八节 函数的连续性和间断点 / 33

- 一、函数的连续性 / 33
- 二、函数的间断点 / 35
- 习题 1-8 / 37

### 第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 / 37

- 一、连续函数的和、差、积、商的连续性 / 37

二、反函数与复合函数的连续性 / 37

三、初等函数的连续性 / 38

习题 1-9 / 39

### 第十节 闭区间上连续函数的性质 / 40

- 一、有界性与最大值最小值定理 / 40
- 二、零点定理与介值定理 / 41
- 习题 1-10 / 42

### 第十一节 函数与极限应用模块 / 42

- 一、函数模块 / 42
- 二、极限模块 / 44

## 第二章 导数与微分

### 第一节 导数的概念 / 47

- 一、引 例 / 47
- 二、导数的定义 / 48
- 三、求导数举例 / 50
- 四、导数的几何意义 / 51
- 五、函数的可导性与连续性的关系 / 51
- 习题 2-1 / 53

### 第二节 函数的求导法则 / 54

- 一、导数的四则运算 / 54
- 二、复合函数求导法则 / 55
- 三、反函数的导数 / 57
- 四、基本求导法则与求导公式 / 58
- 习题 2-2 / 59

### 第三节 高阶导数 / 60

- 习题 2-3 / 62

### 第四节 隐函数与参数方程所确定的函数的求导法 / 62

- 一、隐函数的求导法则 / 62

二、对数求导法 / 63	
三、参数式函数的求导 / 64	
习题 2-4 / 66	
第五节 微分 / 67	
一、微分的概念 / 67	
二、微分的运算 / 68	
习题 2-5 / 70	
第六节 导数与微分应用模块 / 70	
一、土木应用模块 / 71	
二、机电应用模块 / 71	
三、经济应用模块 / 73	
<b>第三章 导数的应用</b>	
第一节 中值定理 / 77	
一、罗尔 (Rolle) 定理 / 77	
二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 / 78	
三、柯西 (Cauchy) 中值定理 / 80	
习题 3-1 / 81	
第二节 洛必达法则 / 82	
习题 3-2 / 85	
第三节 泰勒公式 / 86	
习题 3-3 / 88	
第四节 函数单调性的判定 / 88	
习题 3-4 / 90	
第五节 函数的极值与最值 / 91	
一、极值 / 91	
二、最值 / 94	
习题 3-5 / 95	
第六节 曲线的凹凸性与拐点 函数图形的描绘 / 95	
一、曲线的凹凸性与拐点 / 95	
二、函数图形的描绘 / 97	
习题 3-6 / 98	
第七节 曲率 / 99	
一、弧微分 / 99	
二、曲率及其计算公式 / 99	
三、曲率圆与曲率半径 / 101	

习题 3-7 / 102	
第八节 极值应用模块 / 103	
一、土木应用模块 / 103	
二、机电应用模块 / 104	
三、经济应用模块 / 107	

## 第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念与性质 / 109	
一、原函数与不定积分的概念 / 109	
二、不定积分的几何意义 / 110	
三、不定积分的性质 / 111	
四、基本积分表 / 111	
习题 4-1 / 113	
第二节 换元积分法 / 113	
一、第一类换元法应用举例 / 113	
二、第二类换元法应用举例 / 119	
习题 4-2 / 125	
第三节 分部积分法 / 126	
一、类型 I / 126	
二、类型 II / 127	
习题 4-3 / 129	
第四节 有理函数的积分和简单无理函数的积分 / 130	
一、有理函数的积分 / 130	
二、简单无理函数的积分 / 131	
习题 4-4 / 132	

## 第五章 定积分

第一节 定积分的概念和性质 / 133	
一、引例 / 133	
二、定积分的定义 / 134	
三、定积分的性质 / 135	
习题 5-1 / 138	
第二节 微积分基本公式 / 138	
一、引例 / 138	
二、变动上限积分 / 139	

三、牛顿-莱布尼茨公式 / 140

习题 5-2 / 141

### 第三节 定积分的计算 / 141

一、定积分的换元法 / 142

二、定积分的分部积分法 / 144

习题 5-3 / 145

### 第四节 反常积分 / 145

一、无穷限的反常积分 / 145

二、无界函数的反常积分 / 146

\* 三、 $\Gamma$ 函数 / 148

习题 5-4 / 148

## 第六章 定积分的应用

### 第一节 元素法 / 150

一、引例 / 150

二、元素法 / 151

### 第二节 平面区域的面积 / 151

一、在直角坐标系中的计算 / 151

二、在极坐标系中的计算 / 153

习题 6-2 / 154

### 第三节 空间立体的体积 / 154

一、用截面面积求体积 / 154

二、旋转体的体积 / 155

习题 6-3 / 157

### 第四节 曲线的弧长 / 157

一、曲线弧长的概念 / 157

二、曲线弧长的计算 / 158

习题 6-4 / 159

### 第五节 定积分在物理学中的应用 / 160

一、变速直线运动的路程 / 160

二、变力沿直线做的功 / 160

三、水的压力 / 161

四、引力 / 162

习题 6-5 / 162

### 第六节 定积分在专业领域的应用模块 / 163

一、土木应用模块 / 163

二、分布荷载的力矩问题 / 163

三、立交桥桥墩的体积 / 164

四、机电应用模块 / 165

五、经济应用模块 / 167

参考文献 / 171

初等数学的研究对象基本上是不变量，因此初等数学又叫作常量数学。而高等数学是以极限为工具，研究变动的量，因此高等数学又称为变量数学。本章将要介绍映射、函数、极限、函数的连续等基本概念以及它们的一些性质。

## 第一节 映射与函数

### 一、集合

集合在中学数学中已有介绍，本节主要从以下几个方面来理解。

#### 1. 集合的概念

下面这些内容与中学数学一致，在此不再叙述。它们是：集合的描述性定义、集合的表示、元素与集合的关系、集合与集合之间的关系、常用数集的表示符号等。

#### 2. 集合的运算

集合的运算有并、交、差、补以及直积。

$$(1) A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

$$(2) A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

$$(3) A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\};$$

$$(4) \complement_I A = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}, \text{ 其中 } I \text{ 称为全集或基本集};$$

$$(5) A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\};$$

集合运算满足以下运算律：

$$(1) \text{ 交换律: } A \cup B = B \cup A;$$

$$(2) \text{ 结合律: } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$(3) \text{ 分配律: } (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

$$(4) \text{ 对偶律: } \complement_I(A \cup B) = \complement_I A \cap \complement_I B, \complement_I(A \cap B) = \complement_I A \cup \complement_I B.$$

### 3. 区间和邻域

(1) 区间:

$$\{x \mid a < x < b\} = (a, b);$$

$$\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a, b];$$

$$\{x \mid a \leq x < b\} = [a, b);$$

$$\{x \mid a < x \leq b\} = (a, b].$$

(2) 邻域:

① 以点  $a$  为中心的任何开区间称为点  $a$  的邻域, 记为  $U(a)$ .

② 设  $\delta$  是任意正数, 则开区间  $(a - \delta, a + \delta)$  就是点  $a$  的一个邻域, 这个邻域称为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(a, \delta)$ , 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$$

其中  $a$  称为邻域的中心,  $\delta$  称为邻域的半径.

由于  $a - \delta < x < a + \delta$  也可表示为  $|x - a| < \delta$ , 因此

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

③ 去心邻域, 即去掉邻域的中心  $a$ , 记为  $\dot{U}(a, \delta)$ , 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$$

④ 左右邻域. 我们把开区间  $(a - \delta, a)$  称为点  $a$  的左  $\delta$  邻域, 把开区间  $(a, a + \delta)$  称为点  $a$  的右  $\delta$  邻域.

另外, 两个闭区间的直积表示  $Oxy$  平面上的矩形区域. 例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

## 二、映射

### 1. 映射概念

**定义 1** 设  $X, Y$  是两个非空集合, 如果存在一个法则  $f$ , 使得对  $X$  中的每一个元素  $x$ , 按法则  $f$ , 在  $Y$  中有唯一确定的元素  $y$  与之对应, 则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的映射, 记作

$$f: X \rightarrow Y$$

其中  $y$  称为元素  $x$  (在映射  $f$  下) 的象, 记作  $f(x)$ , 即

$$y = f(x)$$

而元素  $x$  称为元素  $y$  (在映射  $f$  下) 的一个原象, 集合  $X$  称为映射  $f$  的定义域, 记为  $D_f$ ;  $X$  中所有元素的象所组成的集合称为映射  $f$  的值域, 记作  $R_f$  或  $f(X)$ , 即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

### 2. 满射

设  $f$  是从集合  $X$  到集合  $Y$  的映射, 若

$$R_f = Y$$

即  $Y$  中的每一个元素  $y$  都是  $X$  中某元素的象, 则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的**满射**.

### 3. 单射

若对  $X$  的任意两个不同的元素  $x_1, x_2$ , 即  $x_1 \neq x_2$ , 它们的象也不同, 即

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

则称  $f$  为  $X$  到  $Y$  的**单射**.

### 4. 一一映射 (单满射)

若映射  $f$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为**一一映射**, 也称为**单满射**.

### 5. 逆映射

如果  $f$  为  $X$  到  $Y$  的单满射, 则对于每一个  $y \in Y$ , 有唯一的  $x \in X$ , 使  $f(x) = y$ , 从而定义了一个从  $Y$  到  $X$  的映射  $g$ , 即

$$g: Y \rightarrow X$$

这个映射  $g$  称为  $f$  的**逆映射**, 记作  $f^{-1}$ , 其定义域  $D_{f^{-1}} = Y$ , 值域  $R_{f^{-1}} = X$ .

### 6. 复合映射

设两个映射

$$g: X \rightarrow Y_1, f: Y_2 \rightarrow Z$$

其中  $Y_1 \subseteq Y_2$ , 则由映射  $g$  和  $f$  可以定义一个从  $X$  到  $Z$  的对应法则, 它将每一个  $x \in X$  映成

$$f[g(x)] \in Z$$

这个法则确定了一个从  $X$  到  $Z$  的映射, 这个映射称为  $g$  和  $f$  构成的**复合映射**, 记为  $f \circ g: X \rightarrow Z$ , 其中  $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ ,  $x \in X$ .

## 三、函数

### 1. 函数的概念

**定义 2** 设有数集  $D \subseteq R$ , 则映射  $f: D \rightarrow R$  为定义在  $D$  上的**函数**, 记为

$$y = f(x), x \in D$$

其中  $x$  为自变量,  $y$  为因变量,  $D$  称为**定义域**,  $f(D) \subseteq R$  称为**值域**.

函数的三要素: 定义域  $D$ 、对应法则  $f$ 、值域  $f(D)$ .

函数的表示法: 表格法、图像法、解析法.

函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $f(D) = [0, +\infty)$ , 它的图像如图 1-1 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $f(D) = \{-1, 0, 1\}$ , 它的图像如图 1-2 所示. 这个函数称为符号函数. 对任意实数  $x$ , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

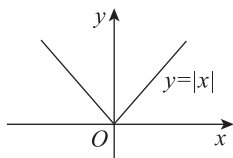


图 1-1

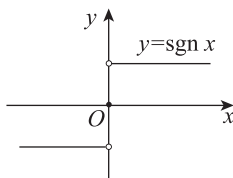


图 1-2

设  $x$  为任意实数, 不超过  $x$  的最大整数称为  $x$  的整数部分, 记为  $[x]$ . 例如

$$\left[ \frac{2}{3} \right] = 0, [\sqrt{3}] = 1, [\pi] = 3, [-1] = -1, [-2.5] = -3$$

把  $x$  看作变量, 则函数

$$y = [x]$$

的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域  $f(D) = \mathbf{Z}$ , 它的图像如图 1-3 所示. 其图像称为阶梯曲线, 这个函数称为取整函数.

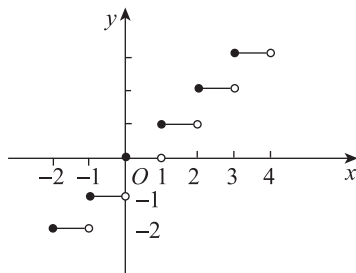


图 1-3

2. 具有特殊性质的函数

(1) 有界函数

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个数  $K$ , 对于所有的  $x \in D$ , 恒有

$$f(x) \leq K \quad (\text{或} \quad f(x) \geq K)$$

则称函数  $f(x)$  在  $D$  上是有上界 (或下界) 的. 如果  $f(x)$  在  $D$  上既有上界又有下界, 则称函数  $f(x)$  在  $D$  上有界, 否则称它为在  $D$  上无界.

(2) 单调函数

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I \subseteq D$ , 如果对于任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 满足

① 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称  $f(x)$  在  $I$  上是单调增加的;

② 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称  $f(x)$  在  $I$  上是单调减少的.

### (3) 奇偶函数

设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  是关于原点对称的, 如果对于任意  $x \in D$ , 有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为偶函数; 如果对于任意  $x \in D$ , 有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为奇函数.

### (4) 函数的周期性

设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个  $l > 0$ , 使对于任意  $x \in D$ , 有  $x \pm l \in D$ , 且

$$f(x+l) = f(x)$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数.  $l$  称为  $f(x)$  的周期, 通常说函数的周期指的是最小正周期.

## 3. 反函数

设函数  $f: D \rightarrow f(D)$  是单射, 则它的逆映射  $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$  称为函数  $f$  的反函数. 一般地, 函数  $y = f(x)$  的反函数记为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in f(D)$$

## 4. 复合函数

设函数  $y = f(u)$  的定义域为  $D_1$ , 函数  $u = g(x)$  在  $D$  上有定义, 且  $g(D) \subseteq D_1$ , 则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由函数  $u = g(x)$  和函数  $y = f(u)$  构成的复合函数. 它的定义域为  $D$ , 变量  $u$  称为中间变量.

## 5. 函数的运算

假设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的定义域分别为  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ , 则可以定义这两个函数的运算:

和、差的运算  $f \pm g: (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \quad x \in D;$

积的运算  $f \cdot g: (f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad x \in D;$

商的运算  $\frac{f}{g}: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}.$

## 6. 初等函数

### (1) 基本初等函数

幂函数:  $y = x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbf{R}$ , 常数).

指数函数:  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

对数函数:  $y = \log_a x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ). 特别地, 当  $a = 10$  时, 记为  $y = \lg x$ ; 当  $a = e$  时, 记为  $y = \ln x$ .

三角函数:  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  等.

反三角函数:  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctan x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$  等.

### (2) 初等函数

常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合构成, 并可以用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

### (3) 双曲函数

$$\text{双曲正弦函数: } \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\text{双曲余弦函数: } \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\text{双曲正切函数: } \operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

显然, 双曲正弦函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 它是奇函数, 在定义域内它是单调增加的, 它的图像在第一象限内随着  $x$  的增大接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^x$ , 如图 1-4 所示.

双曲余弦函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ . 它是偶函数, 其图像经过点  $(0, 1)$ , 且关于  $y$  轴对称. 在区间  $(-\infty, 0)$  内它是单调减少的, 在区间  $(0, +\infty)$  内它是单调增加的. 它的图像随着  $x$  的增大, 在第一象限内接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^x$ , 而在第二象限内接近于曲线  $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ , 如图 1-4 所示,  $\operatorname{ch}0 = 1$  是这个函数的最小值.

双曲正切函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ . 它是奇函数, 其图像通过原点, 且关于原点对称. 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内它是单调增加的, 其图像在水平直线  $y = 1$  及  $y = -1$  之间, 且当  $|x|$  很大时, 在第一象限内接近于直线  $y = 1$ , 在第三象限内接近于直线  $y = -1$ , 如图 1-5 所示.

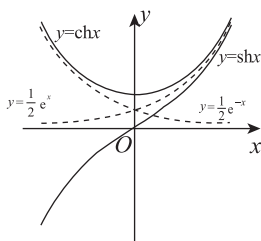


图 1-4

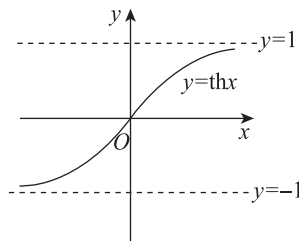


图 1-5

根据双曲函数的定义, 有下列公式:

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y;$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

以上公式与三角函数的有关公式类似, 把它们进行对比记忆.

反双曲函数, 我们进行以下讨论.

反双曲正弦函数:  $y = \operatorname{arsh} x$ ;

反双曲余弦函数:  $y = \operatorname{arch} x$ ;

反双曲正切函数:  $y = \operatorname{arth} x$ .

因为 
$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

则 
$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

所以 
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

又因为  $e^x > 0$ , 所以

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

则 
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

故得 
$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

显然  $y = \operatorname{arsh} x$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 它是奇函数, 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增加的. 由  $y = \operatorname{sh} x$  可画  $y = \operatorname{arsh} x$  的图像, 如图 1-6 所示.

下面讨论双曲余弦函数  $y = \operatorname{ch} x (x \geq 0)$  的反函数. 由  $\operatorname{ch} x = y$ , 有

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (y \geq 1)$$

由此得 
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

故有 
$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

所以 
$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

其定义域为  $[1, +\infty)$ , 在区间  $[1, +\infty)$  上是单调增函数, 如图 1-7 所示.

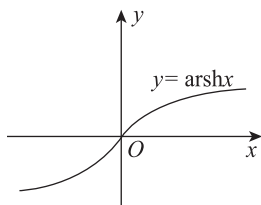


图 1-6

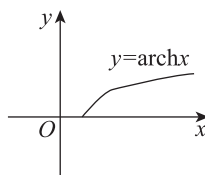


图 1-7

同理可得

$$y = \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

它的定义域为 $(-1, 1)$ ，在区间 $(-1, 1)$ 内是单调增函数，且是奇函数，其图像关于原点对称，如图 1-8 所示.

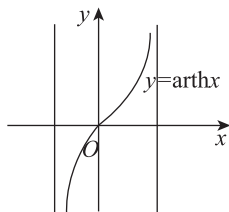


图 1-8

### 习 题 1-1

① 设

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

求  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ,  $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ,  $f(-1)$ ，并画出图像.

② 设  $y = x^2$ ，当  $x \in U(0, \delta)$  时，要使  $y \in U(0, 2)$ ， $\delta$  应该取多少？

## 第二节 数列的极限

### 一、数列极限的定义

为了掌握变量的变化规律，有时不仅要考虑变量的变化过程，还要判断它的变化趋势.

例如，有一个变量，开始是 1，然后变为  $\frac{1}{2}$ ，接着变为  $\frac{1}{3}$ ，然后是  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{5}$ ， $\dots$ ， $\frac{1}{n}$ ， $\dots$  如此一直无尽地变下去. 虽然它是无尽的，但它的变化却有一个趋势，就是越来越接近于 0. 此时，我们就说这个变量的极限是 0. 高等数学中有很多重要的概念和方法都和极限有关，因此可以说极限是高等数学的一个重要的工具. 在实际问题中，极限也占有重要地位，如求圆的面积和周长. 我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何上的应用.

设有一圆，首先构建内接正六边形，面积记为  $A_1$ ；然后构建正十二边形，面积记为  $A_2$ ；再构建内接正二十四边形，面积记为  $A_3$ ……如此下去，每次边数增加一倍. 一般地，

把内接正  $6 \times 2^{n-1}$  边形的面积记为  $A_n$ , 这样就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

它们构成一列有次序的数, 当  $n$  越大时, 内接正多边形的面积与圆的面积差别就越小, 从而以  $A_n$  作为圆面积的近似值也越精确. 但无论  $n$  取如何大, 只要  $n$  取定了,  $A_n$  也只是多边形的面积, 而不是圆的面积. 如果  $n$  无限增大(记为  $n \rightarrow \infty$ , 读作  $n$  趋于无穷大)时, 内接正多边形的边数也无限增加, 而在这个过程中, 内接正多边形无限接近于圆. 这个“无限接近”的过程就是一个极限过程. 这时,  $A_n$  也无限接近某一确定的数值, 这个确定的数值可理解为圆的面积.

我们首先说明数列的概念. 如果按照某一法则, 对于每一个  $n \in \mathbf{N}^*$ , 都对对应着一个确定的实数  $x_n$ . 这些实数  $x_n$  按照下标  $n$  从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

叫作数列, 简记为  $\{x_n\}$ .

数列中的每一个数叫作数列的项, 第  $n$  项叫作数列的一般项.

一些简单数列的例子:

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}, \text{具体写出来就是: } -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}, \text{具体写出来就是: } 2, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots$$

$$\{n^2\}, \text{具体写出来就是: } 1, 4, 9, 16, \dots$$

$$\{1 + (-1)^n\}, \text{具体写出来就是: } 0, 2, 0, 2, \dots$$

数列  $\{x_n\}$  可看作自变量为正整数  $n$  的函数

$$x_n = f(n), n \in \mathbf{N}^*$$

当自变量  $n$  依次取  $1, 2, 3, \dots$  所有正整数时, 对应的函数就排列成数列  $\{x_n\}$ .

现在我们关心的是: 当  $n$  无限增大时(即  $n \rightarrow \infty$  时), 对应的  $x_n = f(n)$  是否能无限接近于某个确定的数值. 如果能, 这个数值又等于什么?

从直观上容易看出, 数列  $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$  随着  $n$  的增大, 越来越接近于 1. 但我们还是要进一步分析, 如何用数学语言来表达. 所谓数列  $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$  越来越接近 1, 是指随着项数  $n$  的增加,  $1 + \frac{1}{n}$  越来越接近于 1. 换句话说, 当  $n$  不断增大时,  $1 + \frac{1}{n}$  与 1 的差不断接近于 0.

进一步说, 随便给定一个无论多么小的正数  $\varepsilon$ ,  $1 + \frac{1}{n}$  与 1 之差的绝对值总会小于这个  $\varepsilon$ , 条件是  $n$  必须充分大. 但究竟  $n$  要多大呢? 只要按照下面的方法去做就可以了, 即为了使得

$$\left| 1 + \frac{1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \left( 1 + \frac{1}{n} \text{ 与 } 1 \text{ 之差的绝对值比 } \varepsilon \text{ 小} \right)$$

解此不等式, 可得

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

把上面的话连接起来就是: 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 只要  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , 就能证明  $1 + \frac{1}{n}$  与 1 之差的绝对值小于  $\varepsilon$ , 这就意味着  $1 + \frac{1}{n}$  越来越接近 1. 把这句话抽象化, 可得到数列极限的定义.

**定义 1** (数列极限的定义) 设  $\{x_n\}$  为一数列, 如果存在正常数  $a$ , 对于任意给定的正数  $\varepsilon$  (无论它多么小), 总存在一个正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 我们就称常数  $a$  是数列  $\{x_n\}$  的极限, 或称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

或

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

如果不存在这样的常数  $a$ , 就说数列  $\{x_n\}$  没有极限, 或者说数列  $\{x_n\}$  是发散的, 习惯上说  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在.

上面定义中的正数可以任意给定是很重要的. 只有这样, 不等式  $|x_n - a| < \varepsilon$  才能表达出  $x_n$  与  $a$  无限接近的意思. 此外, 还应注意到, 定义中的正整数  $N$  与任意给定的正数  $\varepsilon$  有关, 它随着  $\varepsilon$  的给定而选定.

现在, 我们给出数列极限的几何解释. 在定义中不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

就是

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

它表示  $x_n$  在开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内. 因此  $\{x_n\}$  以  $a$  为极限就是对于任意给定的一个开区间  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , 第  $N$  项以后的一切数  $x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$  全部落在这个区间内 (见图 1-9), 而只有有限个 (至多  $N$  个) 在区间以外.

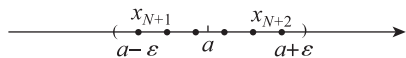


图 1-9

为了表达方便, 引入记号 “ $\forall$ ”, 它表示 “对于任意给定的” 或 “对于每一个”; 记号 “ $\exists$ ” 表示 “存在”. 于是 “对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ ” 可写成 “ $\forall \varepsilon > 0$ ”; “存在正整数  $N$ ” 可写成 “ $\exists N$ ”, 而数列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  的定义表达为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

数列极限的定义并没有直接提供求数列极限的方法, 关于极限的求法后面再讲. 现在举几个例子说明极限的概念以及如何用定义来考察数列的极限.