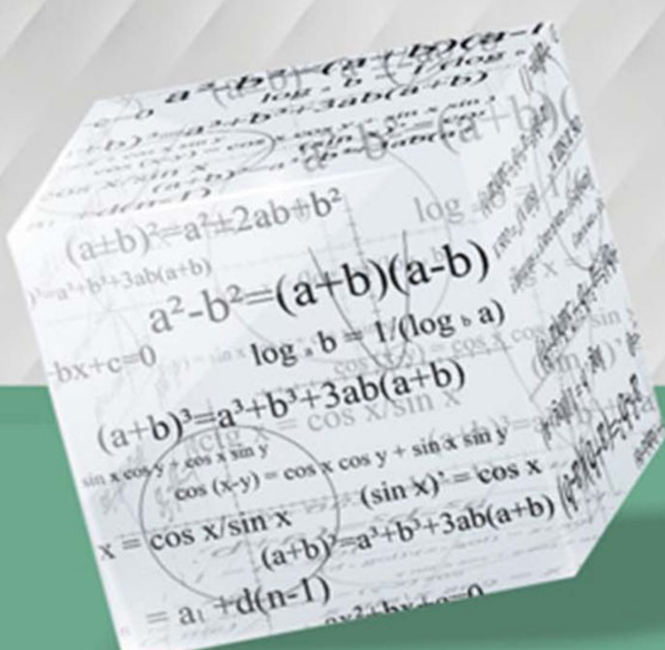
纪念MM教育方式贯彻三十周年

数学思想方法选讲

马俊华　黄　荣　吴明飞　编著



苏州大学出版社
Soochow University Press

数学思想方法选讲

马俊华　黄　荣　吴明飞　编著

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法选讲/马俊华,黄荣,吴明飞编著
.—苏州:苏州大学出版社,2019.9
ISBN 978-7-5672-2834-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①马… ②黄… ③吴… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第165270号

数学思想方法选讲
马俊华　黄　荣　吴明飞　编著
责任编辑　肖　荣

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号　邮编:215006)
镇江文苑制版印刷有限责任公司印装
(地址:镇江市黄山南路18号润州花园6-1号　邮编:212000)

开本700 mm×1 000 mm　1/16　印张14　字数237千
2019年9月第1版　2019年9月第1次印刷
ISBN 978-7-5672-2834-4　定价:39.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话:0512-67481020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com
苏州大学出版社邮箱　sdcbs@suda.edu.cn

目　录

第一篇　数学思想篇

第二篇　数学方法篇

第一篇

数学思想篇

第一讲　函数与方程的思想

【知识概要】

函数描述了客观世界中相互关联的变量之间的依存关系，是反映客观事物及其运动变化的一种重要形式，也是解决实际问题的有力工具．函数思想，就是通过分析问题的数学特征，建立函数关系的数学模型或者构造函数，利用函数的概念、性质和图象的一些特点去分析问题、转化问题和解决问题．经常用到的函数性质包括：函数的对称性、单调性、奇偶性、周期性、极值、最值、有界性、图象变换等，这就要求我们熟练掌握一次函数、二次函数、正比例函数与反比例函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等基本初等函数的具体特性．

法国数学家勒内·笛卡尔（1596—1650）在他的哲学著作《指导思维的法则》一书中提出了一个大胆的设想，即任何问题→数学问题→代数问题→方程求解，称之为“万能代数模型”．说它“万能”，其实是有些夸张的，但是，它却揭示了一种重要的数学思想——方程思想，就是把对数学问题的认识归结为对方程或方程组的认识，运用方程的知识和理论去分析问题和解决问题的思想．方程思想是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型（方程、不等式或方程与不等式的组合），然后通过解方程（组）或不等式（组）来使问题获解．

函数思想和方程思想是两种常用的重要数学思想方法，在数学中的应用十分广泛，它们相互依赖，相辅相成，有时候还可以实现函数与方程的互相转化，以达到解决问题的目的．其实从某种意义上说，函数和多元方程没有本质的区别，如函数 $y=f(x)$，就可以看作关于 x，y 的二元方程 $f(x)-y=0$．也可以说，函数的研究离不开方程，而列方程、解方程和研究方程的特性，又大多可以通过函数的思想去加以分析研究．

函数知识涉及的知识点多、面广，在解题中，善于挖掘题目中的隐含条件，构造出函数解析式和妙用函数的性质，是应用函数思想的关键．对所给的问题观察、分析、判断得比较深入、充分、全面时，才能产生由此及彼的联系，并构造

出函数原型.另外,方程问题、不等式问题和某些代数问题也可以转化为与其相关的函数问题,即用函数思想解答非函数问题.比如:遇到变量,构造函数关系解题;对有关的不等式、方程、最小值和最大值之类的问题,利用函数观点加以分析;在含有多个变量的数学问题中,选定合适的主变量,从而揭示其中的函数关系;对于实际应用问题,翻译成数学语言,建立数学模型和函数关系式,应用函数性质或不等式等知识解答;在等差、等比数列中,通项公式、前 n 项和的公式都可以看成 n 的函数,数列问题也可以用函数方法解决;解方程 $f(x)=0$ 就是求函数 $y=f(x)$ 当函数值为零时自变量 x 的值(函数的零点);用函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 图象的“交轨”方法,可以讨论方程 $f(x)=g(x)$ 的根的个数;参数方程是一种“函数组”化的方程;等等.

【方法指导】

运用函数观点解决问题主要从以下四个方面着手:一是根据方程与函数的关系,可将二元方程转化为函数来解决;二是根据不等式与函数的联系,常将不等式问题转化为函数问题,利用函数的图象和性质进行处理;三是在解决实际问题中,常涉及最值问题,通常是通过建立目标函数,利用求函数最值的方法加以解决;四是中学数学中的某些数学模型(如数列的通项或前 n 项和等)可转化为函数问题,利用函数的相关知识或借助处理函数问题的方法来加以解决.

运用方程观点解决问题主要从以下四个方面着手:一是把问题中对立的已知量与未知量通过建立相等关系统一在方程中,借助解方程解决;二是从分析问题的结构入手,找出主要矛盾,抓住某一个关键变元,将等式看成关于这个主变元(常称为主元)的方程,利用方程的特征解决;三是根据几个变量间的关系符合某些方程的性质和特征(如利用根与系数的关系构造方程等),通过研究方程所具有的性质和特征解决;四是在中学数学中常见的数学模型(如函数、曲线等),经常转化为方程问题去解决.

【例题剖析】

例 1 已知对于满足 $-2\leqslant p\leqslant 2$ 的所有实数 p,不等式 $x^2+px+1>2x+p$ 恒成立,求实数 x 的取值范围.

【分析】 按常规思路,需对关于 x 的不等式进行分类讨论,较为烦琐.若变换角度,运用函数的思想来分析问题,引入辅助函数 $f(p)=(x-1)p+x^2-2x+1$,则问题转化为关于 p 的函数 $f(p)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的函数值恒大于零,借助函数的图象,问题的解决将易如反掌.

【解答】 设 $f(p)=(x-1)p+(x-1)^2$，则问题转化为关于 p 的函数 $f(p)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的函数值恒大于零. 又函数 $f(p)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的图象是一段线段，则由 $\begin{cases} f(-2)>0, \\ f(2)>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-1>0, \end{cases}$ 解得 $x<-1$ 或 $x>3$. 因此，所求实数 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

【评注】 方程、不等式与函数之间存在着紧密的联系，比较大小、证明不等式、求不等式中参数的取值范围等问题，常常可以运用函数的知识获得简捷而巧妙的解决，而确定函数的关键是选择好自变量，特别是解决带参数的不等式和方程问题.

例 2 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1) 若 $a>b>c$，且 $f(1)=0$，证明：$f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点.

(2) 在(1)的条件下，是否存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $f(m)=-a$ 成立时，$f(m+3)$ 为正数？若存在，证明你的结论；若不存在，请说明理由.

(3) 若对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有两个不等实根，证明 $f(x)$ 必有一个根属于 (x_1,x_2).

【分析】 (1) 对于二次函数的图象与 x 轴的交点个数问题，考虑由这个二次函数确定的方程，利用方程判别式的符号解决.

(2) 因为方程 $f(x)=0$ 的一个根为 1，利用韦达定理，通过考虑一元二次方程根与系数的关系来解决问题.

(3) 构造二次函数，用函数的思想研究函数的图象与 x 轴交点的情况，分析由该函数确定的方程的根的分布情况.

【解答】 (1) $\because f(1)=a+b+c=0$ 且 $a>b>c$，$\therefore a>0$ 且 $c<0$，$\therefore \Delta=b^2-4ac>0$，$\therefore f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点.

(2) $\because f(1)=0$，$\therefore 1$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根. 由韦达定理知另一根为 $\frac{c}{a}$. $\because a>0$ 且 $c<0$，$\therefore \frac{c}{a}<0<1$.

又 $a>b>c$，$b=-a-c$，则 $a\left(m-\frac{c}{a}\right)(m-1)=-a<0$，$\therefore \frac{c}{a}<m<1$，$\therefore m+3>\frac{c}{a}+3>-2+3=1$. $\because f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增，$\therefore f(m+3)>f(1)=0$，即存在这样的 m 使 $f(m+3)>0$.

(3) 令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则 $g(x)$ 是二次函数.

$\because\ g(x_1)g(x_2)=\left[f(x_1)-\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]\left[f(x_2)-\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]=-\dfrac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2\leqslant 0$，又$\because\ f(x_1)\neq f(x_2)$，$\therefore\ g(x_1)g(x_2)<0$，$\therefore\ g(x)=0$的根必有一个属于$(x_1,x_2)$.

【评注】 一元二次方程、一元二次不等式和一元二次函数之间有着密切的联系，无论是利用方程的思想还是函数的思想，都可以把它们紧紧联系在一起. 利用一元二次函数的图象和性质，可以较方便地研究一元二次方程和一元二次不等式.

例 3 已知$x,y,z\in\mathbf{Z}$，且$x+y+z=1$，证明：$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

【分析】 由条件$x+y+z=1$出发，利用分析法，在需要证明的不等式$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$中，消去一个变量，留下两个变量，运用方程的思想，从方程(一元二次方程)的角度研究不等式成立的条件.

【解答】 因为$x+y+z=1$，所以要证明不等式$x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$，只要证明$x^2+y^2+(1-x-y)^2\geqslant\dfrac{1}{3}$，即证明$3x^2+(3y-3)x+3y^2-3y+1\geqslant 0$.

因为$x\in\mathbf{R}$，所以只要证明$\Delta=(3y-3)^2-4\times 3(3y^2-3y+1)\leqslant 0$，即证明$9y^2-6y+1\geqslant 0$，即证明$(3y-1)^2\geqslant 0(*)$，而$(*)$式显然成立，所以原不等式得证.

【评注】 本题运用分析法证明不等式，在消去z以后要证明的是关于x,y的不等式，从函数与方程的思想出发，只要证明关于x的一元二次方程的判别式$\Delta\leqslant 0$，进而要证明的不等式是关于y的一元二次不等式，从一元二次函数的角度进行配方，问题迎刃而解.

例 4 已知函数$f(x)=\log_m\dfrac{x-3}{x+3}$，$x\in[\alpha,\beta]$(其中$\alpha>0$).

(1) 证明：$\alpha>3$.

(2) 是否存在实数m，使得自变量x在定义域$[\alpha,\beta]$上取值时，该函数的值域恰好为$[\log_m(m\beta-m),\log_m(m\alpha-m)]$？若存在，求出实数$m$的取值范围；若不存在，请说明理由.

【分析】 (1) 要证明的问题涉及函数的定义域，所以干脆把原来函数的自

然定义域求出来.

(2) 由题设条件出发,不难看出本题需要求函数的值域,而函数 $f(x)=\log_m\dfrac{x-3}{x+3}$ 可看成是由函数 $y=\log_m t$ 与函数 $t=\dfrac{x-3}{x+3}$ 复合而成的,且函数 $t=\dfrac{x-3}{x+3}=1-\dfrac{6}{x+3}$ 在 $x\in[\alpha,\beta]$ 上单调递增,因此可以考虑从函数的单调性入手.

【解答】 (1) $\dfrac{x-3}{x+3}>0\Leftrightarrow x<-3$ 或 $x>3$, $\because$ $f(x)$ 的定义域为 $[\alpha,\beta]$ 且 $\alpha>0$, $\therefore$ $\alpha>3$.

(2) $\because$ $3<\alpha<\beta, m>0$, $\therefore$ $m(\alpha-1)<m(\beta-1)$.

而 $\log_m m(\beta-1)<\log_m m(\alpha-1)$, $\therefore$ $0<m<1$.

设 $\beta\geqslant x_1>x_2\geqslant\alpha$, 有 $\dfrac{x_1-3}{x_1+3}-\dfrac{x_2-3}{x_2+3}=\dfrac{6(x_1-x_2)}{(x_1+3)(x_2+3)}>0$, $\therefore$ 当 $0<m<1$ 时, $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上单调递减.

又 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的值域为 $[\log_m(m\beta-m),\log_m(m\alpha-m)]$,

$$\therefore\begin{cases}f(\beta)=\log_m\dfrac{\beta-3}{\beta+3}=\log_m m(\beta-1),\\ f(\alpha)=\log_m\dfrac{\alpha-3}{\alpha+3}=\log_m m(\alpha-1),\end{cases}\text{即}\begin{cases}m\beta^2+(2m-1)\beta-3(m-1)=0,\\ m\alpha^2+(2m-1)\alpha-3(m-1)=0.\end{cases}$$

又 $\beta>\alpha>3$, 即 α,β 是方程 $mx^2+(2m-1)x-3(m-1)=0$ 的两个大于 3 且不相等的实数根. 设函数 $g(x)=mx^2+(2m-1)x-3(m-1)$,

$$\text{所以}\begin{cases}0<m<1,\\ \Delta=16m^2-16m+1>0,\\ -\dfrac{2m-1}{2m}>3,\\ g(3)>0\end{cases}\text{解之得 } 0<m<\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

因此,满足题意的实数 m 是存在的,其取值范围是 $\left(0,\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$.

【评注】 由解题过程中挖掘的隐含条件 $m(\alpha-1)<m(\beta-1)$, $\log_m m(\beta-1)<\log_m m(\alpha-1)$, 推导出 $0<m<1$, 使得问题的解答难度大大降低. 由 $\begin{cases}m\beta^2+(2m-1)\beta-3(m-1)=0,\\ m\alpha^2+(2m-1)\alpha-3(m-1)=0,\end{cases}$ 又 $\beta>\alpha>3$, 得出 α,β 是方程 $mx^2+(2m-1)x-3(m-1)=0$ 的两个大于 3 且不相等的实数根,运用方程的思想方法使问题进一步明朗. 构造函数 $g(x)=mx^2+(2m-1)x-3(m-1)$, 运用函数的思想方法,解决方程根的分布与系数的关系,这在一元二次方程根的分布问题中很常见.

例 5 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.

(1) 若 $f(2)=3$，求 $f(1)$；又若 $f(0)=a$，求 $f(a)$.

(2) 设有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

【分析】 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，且有单独的条件，如 $f(2)=3$，$f(0)=a$，$f(x_0)=x_0$，因此考虑在关于 x 的方程(恒等式)中分别赋值，分别令 $x=2$ 和 $x=0$，可以直接求出 $f(1)$ 和 $f(a)$ 的值. 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)-x^2+x=x_0$，此时再赋值，令 $x=x_0$，研究所得方程解的情况.

【解答】 (1) 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，令 $x=2$，得 $f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$. 又由 $f(2)=3$，得 $f(3-2^2+2)=3-2^2+2$，即 $f(1)=1$.

再令 $x=0$，得 $f(f(0)-0^2+0)=f(0)-0^2+0$，又由 $f(0)=a$，得 $f(a)=a$.

(2) 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)-x^2+x=x_0$.

在上式中令 $x=x_0$，得 $f(x_0)-x_0^2+x_0=x_0$，又因为 $f(x_0)=x_0$，所以 $x_0-x_0^2=0$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$.

若 $x_0=0$，则 $f(x)-x^2+x=0$，即 $f(x)=x^2-x$，此时由方程 $f(x)=x^2-x=x$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，即方程 $f(x)=x$ 有两个不同实根，与有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$ 相矛盾，故舍去；

若 $x_0=1$，则 $f(x)-x^2+x=1$，即 $f(x)=x^2-x+1$，由 $f(x)=x^2-x+1=x$，解得 $x=1$，所以该函数满足题设条件.

综上所述，所求函数为 $f(x)=x^2-x+1(x\in\mathbf{R})$.

【评注】 本题的解题过程中，突出对于任意 x 等式恒成立(即所有实数都是关于 x 的方程的解)，采取赋值的方法，这是在解决与函数和方程有关的问题时通常采取的方法. 第(2)小题在令 $x=x_0$ 解出 x_0 的值以后，需检验在一般情况下，是不是的确有且仅有一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，这一点非常重要.

例 6(2018・全国Ⅱ卷) 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$.

(1) 若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点，求 a 的值.

【分析】　(1) 要证明原不等式，只要证明函数 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时的最小值大于等于 1 即可，所以可通过导数研究函数 $f(x)$ 的最小值. 由于一阶导数依然是一个超越函数，可以再构造函数求导，利用二阶导数研究一阶导函数的性质，再利用一阶导函数的性质研究函数 $f(x)$ 的最值.

(2) 函数 $f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的解，从函数的角度出发，通过函数 $f(x)$ 的导数研究函数 $y=f(x)$ 的性质及其图象，考察函数图象与 x 轴的公共点的情况.

【解答】　(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 1$ 等价于 $(x^2+1)e^{-x}-1\leqslant 0$.

设 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$.

当 $x\neq 1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 1$.

(2) 设函数 $h(x)=1-ax^2e^{-x}$.

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点当且仅当 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点.

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$ 没有零点；

② 当 $a>0$ 时，$h'(x)=ax(x-2)e^{-x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内单调递减，在 $(2,+\infty)$ 内单调递增.

故 $h(2)=1-\dfrac{4a}{e^2}$ 是 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值.

若 $h(2)>0$，即 $a<\dfrac{e^2}{4}$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点；

若 $h(2)=0$，即 $a=\dfrac{e^2}{4}$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点；

若 $h(2)<0$，即 $a>\dfrac{e^2}{4}$，由于 $h(0)=1$，所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内有一个零点.

由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2$，所以

$$h(4a)=1-\frac{16a^3}{e^{4a}}=1-\frac{16a^3}{(e^{2a})^2}>1-\frac{16a^3}{(2a)^4}=1-\frac{1}{a}>0.$$

故 $h(x)$ 在 $(2,4a)$ 内有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点.

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有一个零点时，$a=\dfrac{e^2}{4}$.

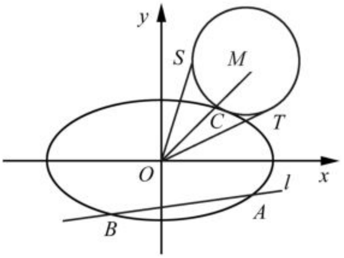
【评注】　函数零点虽说是方程 $f(x)=0$ 的解，但在处理函数零点问题时，通常运用函数的思想，借助函数的导数研究函数的性质，结合函数的图象，利用函数零点存在定理解决问题. 其实函数的零点、方程根的分布、零点的个数、方

程根的个数，都可以运用函数的数学方法，转化为函数图象与 x 轴交点的问题加以解决．只是有时遇到的是带有参数的函数或方程，这时候就需要根据参数的不同取值，讨论函数的零点或方程的解是否存在，如果存在多个零点或多个解，需进一步确定零点或解所在的区间．这在历年各省市高考命题中一直是个热点．

例 7（2017·山东卷） 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，焦距为 2．

（1）求椭圆 E 的方程．

（2）如图，动直线 l：$y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2}$交椭圆 E 于 A，B 两点，C 是椭圆 E 上一点，直线 OC 的斜率为 k_2，且 $k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$M$ 是线段 OC 延长线上一点，且 $MC:AB=2:3$，圆 M 的半径为 MC，OS，OT 是圆 M 的两条切线，切点分别为 S，T．求$\angle SOT$ 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率．



例 7 图

【分析】 为了求出$\angle SOT$ 的最大值，并求取得最大值时直线 l 的斜率，可以考虑把$\angle SOT$ 的某个三角函数值表示为自变量（直线 l 的斜率）的函数，运用函数的思想研究函数的最值，进而求得最大值，并求出取得最大值时直线 l 的斜率．

【解答】 （1）由题意知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$2c=2$，所以 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，因此，椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$．

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=k_1x-\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$得$(4k_1^2+2)x^2-4\sqrt{3}k_1x-1=0$，由题意知 $\Delta>0$，且 $x_1+x_2=\frac{2\sqrt{3}k_1}{2k_1^2+1}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2(2k_1^2+1)}$．

所以 $AB=\sqrt{1+k_1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{2}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{1+2k_1^2}$．

由题意可知圆 M 的半径 $r=\frac{2}{3}AB=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{2k_1^2+1}$.

由题设知 $k_1k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以 $k_2=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}$.因此直线 OC 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x$.

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{4k_1}x,\end{cases}$ 得 $x^2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}$,$y^2=\frac{1}{1+4k_1^2}$.

因此 $OC=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}$.由题意可知 $\sin\frac{\angle SOT}{2}=\frac{r}{r+OC}=\frac{1}{1+\frac{OC}{r}}$,

而 $\frac{OC}{r}=\frac{\sqrt{\frac{1+8k_1^2}{1+4k_1^2}}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+8k_1^2}}{2k_1^2+1}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{1+2k_1^2}{\sqrt{1+4k_1^2}\sqrt{1+k_1^2}}$.

令 $t=1+2k_1^2$,则 $t>1$,$\frac{1}{t}\in(0,1)$.

因此,$\frac{OC}{r}=\frac{3}{2}\frac{t}{\sqrt{2t^2+t-1}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}}\geqslant 1$,

当且仅当 $\frac{1}{t}=\frac{1}{2}$,即 $t=2$ 时等号成立,此时 $k_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\sin\frac{\angle SOT}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,因此 $\frac{\angle SOT}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle SOT$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

综上所述,$\angle SOT$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$,取得最大值时直线 l 的斜率为 $k_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【评注】 对于求某些元素的最大值、最小值,或者是参数的取值范围,包括但不限于解析几何中的这些情况,解决这类问题一般有两种常用的途径:一是根据题设所给的条件,选择恰当的自变量和函数值建立目标函数,运用函数的思想,利用目标函数的性质,包括定义域、值域、单调性、最值以及函数的图象等知识解决问题;二是根据所提供的条件和要求解的结论,选择适当的未知数构建方程(或不等式),运用方程的思想研究问题、解决问题.

例 8 设 $A=\{(n,b_n)\mid b_n=3^n+k^n,n\in\mathbf{N}^*\}$,其中 k 为常数,且 $k\in\mathbf{N}^*$,$B=\{(n,c_n)\mid c_n=5^n,n\in\mathbf{N}^*\}$,求 $A\cap B$.

【分析】 考虑到求 $A\cap B$,从方程的角度入手,研究不定方程 $3^n+k^n=5^n$ 的

正整数解.由于方程的右边是奇数,分 k 是奇数和偶数讨论,进行奇偶性分析.当 $k=2$ 或 4 时,将方程变形,通过构造函数,运用函数的思想进行思考,可使问题的解决干脆利落,简捷明了.

【解答】 由题意可知,要求 $A\cap B$,只需要求集合 A 和 B 的公共元素,即求出使得 $b_n=c_n$ 成立的 n,k 的取值.由 $b_n=c_n$ 得到关于 n,k 的方程 $3^n+k^n=5^n$,其中 n,k 都是正整数.

当 k 为奇数时,方程 $3^n+k^n=5^n$ 的左边为偶数,右边为奇数,方程无解;

当 k 为偶数时,若 $k\geqslant5$,有 $3^n+k^n>5^n$,方程无解.又 $k\in\mathbf{N}^*$,所以 $k=2$ 或 4.

当 $k=2$ 时,方程 $3^n+k^n=5^n$ 可变形为 $\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n=1$,构造函数 $f(n)=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$.因为函数 $y=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 和 $y=\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 都单调递减,所以函数 $f(n)=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n$ 单调递减,且 $f(1)=1$.当 $n\geqslant2$ 时,总有 $f(n)\leqslant f(2)=\frac{13}{25}<1$,所以关于 n 的方程 $\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{5}\right)^n=1$ 只有唯一的解 $n=1$.

当 $k=4$ 时,方程 $3^n+k^n=5^n$ 可变形为 $\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n=1$,构造函数 $f(n)=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$.因为函数 $y=\left(\frac{3}{5}\right)^n$ 和 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 都单调递减,所以函数 $f(n)=\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 单调递减,且 $f(1)=\frac{7}{5}>1$,$f(2)=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$,当 $n\geqslant3$ 时,总有 $f(n)\leqslant f(3)=\frac{91}{125}<1$,所以关于 n 的方程 $\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n=1$ 只有唯一的解 $n=2$.

综上所述,$A\cap B=\{(1,5),(2,25)\}$.

【评注】 函数是高中数学的重要内容之一,函数的思想和方法是高中数学的基本思想,它渗透在高中数学的各个方面.在处理方程问题的时候,巧妙变形,构造函数,把方程问题转化为函数问题,运用函数的观点考查和分析问题,学会运用函数的知识来处理,常常可以化难为易、变繁为简.

例 9 如图,为处理含有某种杂质的污水,要制造一底宽为 2 m 的无盖长方体沉淀箱,污水从 A 孔处流入,经沉淀后从 B 孔处流出.设箱体的长度为 a m,高度为 b m.已知流出的水中该杂质的质量分数与 a,b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料 60 m^2.当 a,b 各为多少米时,经沉淀后流出的水中该杂质的质量