

普通高等教育“十三五”规划教材

D A X U E S H U X U E

# 大学数学

主 编 黄德枝 刘 雪 周 雪



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

# 大学数学

主编 黄德枝 刘 雪 周 雪

## 内 容 提 要

本书是根据应用型高校人才培养方案编写而成的,内容包括微积分,线性代数,概率论与数理统计三个部分.教材编写注重应用性,不过分追求理论体系的完整性和计算的技巧性,内容多从实际问题出发,由具体到抽象,由特殊到一般,突出数学知识与专业知识的过渡自然,衔接合理,能联系经济管理和自然科学中的问题,列举实例丰富多样,学生通过学习能多角度、多方法理解所学知识,并利用所学数学知识处理实际问题,提高学生分析问题、处理问题、解决问题的能力,为后继专业课的学习打牢基础.

本书可作为高等院校应用型人才培养的教材,也可以作为高等工程技术教育的教材,以及自学者学习大学数学的参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

大学数学 / 黄德枝, 刘雪, 周雪主编. —上海:  
同济大学出版社, 2019. 8  
ISBN 978-7-5608-8705-0

I. ①大… II. ①黄… ②刘… ③周… III. ①高等数  
学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 178171 号

---

普通高等教育“十三五”规划教材

## 大学数学

主编 黄德枝 刘雪 周雪

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐逢乔 封面设计 潘向葵

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店  
排 版 南京月叶图文制作有限公司  
印 刷 江苏启东市人民印刷有限公司  
开 本 787 mm×1092 mm 1/16  
印 张 22.5  
印 数 1—2100  
字 数 562 000  
版 次 2019 年 8 月第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5608-8705-0

---

定 价 56.00 元

---

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学,也是自然科学的基本语言,是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段.大学数学的教育,其意义不仅仅是专业学习的工具,中外大量的教育实践事实充分显示,优秀的数学教育更是一种对人的理性思维品质和思辨能力的培育,是聪明智慧的启迪,是对潜在的能动性与创造力的开发,其价值远非一般的专业技术教育所能与之相提并论的.近年来,应用型院校大量涌现并快速发展,而适用于应用型大学的数学教材却并不多,其大学数学课程的教学效果也不尽如人意.目前,亟待解决的是应用型院校数学教材的建设问题.基于此,我们编写了这本《大学数学》教材,内容包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三个部分.本书以应用为目的,满足专业对数学的基本要求,侧重对学生应用型思维能力的培养,并力求将基本理论写得流畅自然,更侧重于数学知识和数学方法的实用性.本书有以下特点:

(1) 体现培养能力,强化应用的特点.对基本概念的叙述和所涉及的若干定理、推论及命题等,在遵循科学性、系统性、严谨性的前提下,不追求详细的证明又不失数学理论的严谨,适度淡化了难度较大的数学理论,强化了应用性较强的数学思想和数学方法的应用.

(2) 内容安排上紧密联系实际,服务专业课程.本书精选了一些只涉及数学基本知识并能体现数学建模思想、能吸引学生且可能接触的应用范例和数学建模问题.例如,函数模型的建立及其应用;作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学和医药学中的应用;最优化方法在工程、经济、农业、医药领域中的应用;常用概率模型及其应用;等等.这些实际应用范例既为学生理解数学的概念提供了很好的认知基础,也有助于加强与后继专业课程的联系.

(3) 本书配有大量例题、习题,每章还配有总习题.在例题和习题的难度方面循序渐进,并充分考虑知识的覆盖面以及题型的多样化.

本书由武汉东湖学院组织编写,第一部分微积分,共6章,由黄德枝编写;第二部分线性代数,共3章,由周雪编写;第三部分概率论与数理统计,共5章,由刘雪编写.各章节习题由黄德枝编写,全书由黄德枝统稿.

黄象鼎、罗毅平两位教授仔细审阅了书稿,提出了很多宝贵的意见和建议.同时,武汉东湖学院的领导、教务处以及同济大学出版社对本书的出版给予了大力的支持与指导,在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,如有错误和不妥之处,敬请广大读者批评指正.

编者  
2019.7

# 目 录

前言

## 第一部分 微积分

第 1 章 函数 极限 连续 .....	3
1.1 函数 .....	3
1.1.1 集合与区间 .....	3
1.1.2 函数的概念 .....	4
1.1.3 初等函数 .....	6
1.1.4 具有某些特性的函数 .....	7
1.1.5 经济学中的常用函数 .....	8
习题 1.1 .....	10
1.2 极限的概念 .....	11
1.2.1 数列的极限 .....	11
1.2.2 函数的极限 .....	13
习题 1.2 .....	15
1.3 极限的运算法则 .....	15
1.3.1 极限的四则运算法则 .....	15
1.3.2 极限的复合运算法则 .....	17
1.3.3 极限存在准则和两个重要极限 .....	17
习题 1.3 .....	20
1.4 无穷小(量)和无穷大(量) .....	21
1.4.1 无穷小(量) .....	21
1.4.2 无穷大(量) .....	22
1.4.3 无穷大量与无穷小量的关系 .....	22
1.4.4 无穷小的比较 .....	23
习题 1.4 .....	25
1.5 函数的连续性 .....	26
1.5.1 函数的连续性概念 .....	26
1.5.2 初等函数的连续性 .....	28
1.5.3 闭区间上连续函数的性质 .....	29

习题 1.5 .....	31
总习题一 .....	31
<b>第 2 章 微分学</b> .....	<b>33</b>
2.1 导数的概念 .....	33
2.1.1 导数的概念 .....	33
2.1.2 导数的几何意义 .....	35
2.1.3 函数的可导与连续的关系 .....	36
2.1.4 导函数 .....	36
习题 2.1 .....	38
2.2 函数的求导法则 .....	38
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 .....	38
2.2.2 反函数的求导法则 .....	39
2.2.3 复合函数的求导法则 .....	40
习题 2.2 .....	41
2.3 隐函数及由参数方程所确定函数的导数 .....	42
2.3.1 隐函数的导数 .....	42
2.3.2 由参数方程所确定函数的导数 .....	43
习题 2.3 .....	44
2.4 高阶导数 .....	44
习题 2.4 .....	47
2.5 函数的微分 .....	47
2.5.1 微分的概念 .....	47
2.5.2 微分的几何意义 .....	49
2.5.3 微分的运算 .....	50
2.5.4 微分在近似计算中的应用 .....	51
习题 2.5 .....	52
2.6 函数的单调性、极值和最值 .....	52
2.6.1 函数的单调性 .....	52
2.6.2 函数的极值 .....	54
2.6.3 函数的最值 .....	56
习题 2.6 .....	57
2.7 洛必达法则 .....	58
2.7.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式 .....	58
2.7.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 .....	59
习题 2.7 .....	60
2.8 导数在经济学中的应用 .....	61

2.8.1 边际分析 .....	61
2.8.2 弹性概念 .....	63
习题 2.8 .....	66
总习题二 .....	66
<b>第 3 章 积分学</b> .....	<b>69</b>
3.1 不定积分的概念与性质 .....	69
3.1.1 原函数与不定积分的概念 .....	69
3.1.2 基本积分表 .....	71
3.1.3 不定积分的性质 .....	71
习题 3.1 .....	72
3.2 换元积分法 .....	73
3.2.1 第一类换元法(凑微分法) .....	73
3.2.2 第二类换元法 .....	75
习题 3.2 .....	77
3.3 分部积分法 .....	78
习题 3.3 .....	80
3.4 定积分的概念与性质 .....	81
3.4.1 定积分问题举例 .....	81
3.4.2 定积分的概念 .....	83
3.4.3 定积分的几何意义 .....	84
3.4.4 定积分的性质 .....	85
习题 3.4 .....	86
3.5 微积分基本定理 .....	87
3.5.1 变上限函数及其导数 .....	87
3.5.2 微积分基本定理(牛顿-莱布尼茨公式) .....	88
习题 3.5 .....	89
3.6 定积分的换元积分法和分部积分法 .....	89
3.6.1 定积分的换元积分法 .....	89
3.6.2 定积分的分部积分法 .....	92
习题 3.6 .....	93
3.7 广义积分 .....	93
3.7.1 无穷区间上的广义积分 .....	93
3.7.2 无界函数的广义积分 .....	95
习题 3.7 .....	97
3.8 定积分的应用 .....	97
3.8.1 微元法 .....	97
3.8.2 平面图形的面积 .....	98
3.8.3 旋转体的体积 .....	100

3.8.4 经济上的应用 .....	101
习题 3.8 .....	102
总习题三 .....	102
<b>第 4 章 多元函数微积分</b> .....	105
4.1 空间解析几何简介 .....	105
4.1.1 空间直角坐标系 .....	105
4.1.2 点的坐标和距离公式 .....	106
4.1.3 曲面与方程 .....	106
习题 4.1 .....	109
4.2 多元函数的基本概念 .....	109
4.2.1 平面区域 .....	109
4.2.2 多元函数的概念 .....	110
4.2.3 二元函数的极限 .....	110
4.2.4 二元函数的连续性 .....	111
习题 4.2 .....	112
4.3 偏导数与全微分 .....	112
4.3.1 偏导数 .....	112
4.3.2 全微分 .....	114
习题 4.3 .....	116
4.4 复合函数微分法与隐函数微分法 .....	116
4.4.1 复合函数微分法 .....	117
4.4.2 隐函数微分法 .....	118
习题 4.4 .....	119
4.5 二元函数的极值 .....	120
4.5.1 无条件极值 .....	120
4.5.2 条件极值 .....	122
习题 4.5 .....	123
4.6 二重积分 .....	123
4.6.1 二重积分的概念 .....	123
4.6.2 二重积分的性质 .....	125
4.6.3 二重积分的计算 .....	125
习题 4.6 .....	128
总习题四 .....	129
<b>第 5 章 微分方程</b> .....	131
5.1 微分方程的基本概念 .....	131
习题 5.1 .....	132
5.2 一阶微分方程 .....	133
5.2.1 可分离变量的微分方程 .....	133

5.2.2 齐次方程 .....	134
5.2.3 一阶线性微分方程 .....	134
习题 5.2 .....	136
5.3 二阶常系数线性微分方程 .....	136
5.3.1 二阶常系数线性微分方程解的结构 .....	137
5.3.2 二阶常系数齐次线性微分方程的求解 .....	137
5.3.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的求解 .....	139
习题 5.3 .....	140
总习题五 .....	140
<b>第 6 章 无穷级数</b> .....	142
6.1 常数项级数的概念和性质 .....	142
6.1.1 常数项级数的概念 .....	142
6.1.2 级数的性质 .....	144
习题 6.1 .....	145
6.2 正项级数的判别法 .....	145
6.2.1 比较判别法 .....	146
6.2.2 比值判别法(达朗贝尔判别法) .....	148
习题 6.2 .....	148
6.3 任意项级数 .....	149
6.3.1 交错级数 .....	149
6.3.2 绝对收敛与条件收敛 .....	149
习题 6.3 .....	151
6.4 幂级数 .....	151
6.4.1 幂级数及其敛散性 .....	151
6.4.2 幂级数的运算与性质 .....	153
6.4.3 函数展开成幂级数 .....	154
习题 6.4 .....	157
总习题六 .....	158

## 第二部分 线性代数

<b>第 7 章 行列式</b> .....	163
7.1 $n$ 阶行列式 .....	163
7.1.1 二阶、三阶行列式 .....	163
7.1.2 $n$ 阶行列式 .....	167
习题 7.1 .....	170
7.2 $n$ 阶行列式的性质 .....	170
7.2.1 $n$ 阶行列式的性质 .....	170

7.2.2 行列式的计算 .....	173
习题 7.2 .....	176
7.3 克拉默法则 .....	177
习题 7.3 .....	179
总习题七 .....	179
<b>第 8 章 矩阵</b> .....	<b>182</b>
8.1 矩阵的概念 .....	182
8.2 矩阵的运算 .....	184
8.2.1 矩阵的线性运算 .....	184
8.2.2 矩阵的乘法 .....	185
8.2.3 矩阵的转置 .....	187
8.2.4 方阵的幂 .....	188
8.2.5 方阵的行列式 .....	189
习题 8.2 .....	189
8.3 逆矩阵 .....	190
8.3.1 逆矩阵的定义 .....	190
8.3.2 可逆矩阵的条件 .....	191
习题 8.3 .....	193
8.4 矩阵的初等变换 .....	193
8.4.1 矩阵的初等变换 .....	193
8.4.2 初等矩阵 .....	196
8.4.3 求逆矩阵的初等变换法 .....	198
习题 8.4 .....	199
8.5 矩阵的秩 .....	199
8.5.1 矩阵的秩 .....	199
8.5.2 矩阵秩的求法 .....	200
习题 8.5 .....	202
总习题八 .....	202
<b>第 9 章 线性方程组</b> .....	<b>204</b>
9.1 利用消元法求解线性方程组 .....	204
习题 9.1 .....	209
9.2 向量组及其线性组合 .....	209
9.2.1 $n$ 维向量及其线性运算 .....	210
9.2.2 向量组的线性组合 .....	211
9.2.3 向量组的线性相关性 .....	213
习题 9.2 .....	215
9.3 向量组的秩 .....	216
9.3.1 向量组的极大线性无关组与向量组的秩 .....	216

9.3.2 向量组的秩与矩阵秩的关系 .....	217
9.3.3 求向量组的秩及极大无关组 .....	217
习题 9.3 .....	218
9.4 线性方程组解的结构 .....	218
9.4.1 齐次线性方程组解的结构 .....	218
9.4.2 非齐次线性方程组解的结构 .....	223
习题 9.4 .....	227
总习题九 .....	227

### 第三部分 概率论与数理统计

<b>第 10 章 随机事件与概率</b> .....	231
10.1 随机事件及其运算 .....	231
10.1.1 随机现象 .....	231
10.1.2 随机事件和样本空间 .....	231
10.1.3 随机事件的关系与运算 .....	232
习题 10.1 .....	234
10.2 事件的概率 .....	234
10.2.1 频率与概率 .....	234
10.2.2 古典概率 .....	236
10.2.3 概率公理化定义与性质 .....	237
习题 10.2 .....	239
10.3 条件概率 .....	240
10.3.1 条件概率与乘法公式 .....	240
10.3.2 全概率公式与贝叶斯公式 .....	242
习题 10.3 .....	244
10.4 事件的独立性 .....	245
10.4.1 事件的独立性 .....	245
10.4.2 $n$ 重伯努利试验 .....	248
习题 10.4 .....	249
总习题十 .....	250
<b>第 11 章 随机变量及其分布</b> .....	252
11.1 随机变量及其分布函数 .....	252
11.1.1 随机变量的概念 .....	252
11.1.2 随机变量的分布函数 .....	254
习题 11.1 .....	256
11.2 离散型随机变量 .....	257
11.2.1 离散型随机变量及其分布律 .....	257

11.2.2 常见离散型随机变量的分布 .....	259
习题 11.2 .....	262
11.3 连续型随机变量 .....	263
11.3.1 连续型随机变量及其概率密度 .....	263
11.3.2 常见的连续型随机变量的分布 .....	265
习题 11.3 .....	271
11.4 随机变量函数的概率分布 .....	272
11.4.1 离散型随机变量函数的概率分布 .....	272
11.4.2 连续型随机变量函数的概率分布 .....	273
习题 11.4 .....	276
总习题十一 .....	276
<b>第 12 章 随机变量的数字特征</b> .....	<b>279</b>
12.1 数学期望 .....	279
12.1.1 离散型随机变量的数学期望 .....	279
12.1.2 连续型随机变量的数学期望 .....	281
12.1.3 数学期望的性质 .....	283
习题 12.1 .....	284
12.2 方差 .....	285
12.2.1 方差的定义 .....	285
12.2.2 常见随机变量的方差 .....	286
12.2.3 方差的性质 .....	286
习题 12.2 .....	288
总习题十二 .....	288
<b>第 13 章 数理统计的基本概念</b> .....	<b>290</b>
13.1 总体和样本 .....	290
13.1.1 总体与个体 .....	290
13.1.2 样本 .....	290
13.2 统计量 .....	292
13.2.1 统计量 .....	292
13.2.2 常用统计量 .....	293
13.2.3 三大抽样分布 .....	294
13.2.4 正态总体样本均值与方差的分布 .....	298
习题 13.2 .....	299
总习题十三 .....	299
<b>第 14 章 参数估计</b> .....	<b>302</b>
14.1 参数的点估计 .....	302
14.1.1 矩估计法 .....	302
14.1.2 极大似然估计法 .....	305

14.1.3 点估计的评价标准 .....	308
习题 14.1 .....	311
14.2 参数的区间估计 .....	312
14.2.1 置信区间的概念 .....	312
14.2.2 单个正态总体参数的置信区间 .....	313
习题 14.2 .....	318
总习题十四 .....	318
附表 1 标准正态分布函数数值表 .....	320
附表 2 泊松分布的数值表 .....	321
附表 3 $\chi^2$ 分布表 .....	322
附表 4 $t$ 分布表 .....	324
附表 5 $F$ 分布表 .....	325
参考答案 .....	329
参考文献 .....	344

---

# 第一部分 微积分

---



# 第1章 函数 极限 连续

## 1.1 函 数

### 1.1.1 集合与区间

集合是数学中的一个基本概念. 例如, 某班学生的全体构成一个集合, 全体实数构成一个集合. 一般地, 具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**. 组成这个集合的事物称为该集合的**元素**.

通常用大写拉丁字母  $A, B, C, \dots$  表示集合, 用小写拉丁字母  $a, b, c, \dots$  表示集合的元素. 如果  $a$  是集合  $A$  的元素, 记作  $a \in A$ , 读作“ $a$  属于  $A$ ”; 否则, 记作  $a \notin A$  或  $a \bar{\in} A$ , 读作“ $a$  不属于  $A$ ”.

仅由有限个元素组成的集合称为**有限集**, 含有无穷多个元素的集合称为**无限集**, 不含任何元素的集合称为**空集**, 记作  $\emptyset$ .

表示集合的方法通常有列举法和描述法. **列举法**就是将集合中的全体元素一一列举出来, 写在一个大括号内. 例如,  $S$  是 1 到 10 的所有偶数组成的集合,  $S$  可视为

$$S = \{2, 4, 6, 8, 10\};$$

$\mathbf{Z}^+$  是全体正整数组成的集合, 表示为

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

用列举法表示集合时, 必须列出集合的所有元素, 不得重复和遗漏, 一般对元素之间的次序没有要求. 用到省略号时, 省略的部分必须满足一般的可认性.

**描述法**是把集合中各元素所具有的共同性质写在大括号内来表示这一集合. 例如, 由所有满足条件  $a < x < b$  的实数  $x$  组成的集合  $A$  可以表示为

$$A = \{x \mid a < x < b\}.$$

数学中, 常用以下字母分别表示特定的数集:  $\mathbf{N}$  为全体自然数;  $\mathbf{Z}$  为全体整数;  $\mathbf{Q}$  为全体有理数;  $\mathbf{R}$  为全体实数;  $\mathbf{Z}^+$  为全体正整数;  $\mathbf{R}^+$  为全体正实数.

由数组成的集合称为**数集**, 其中最常用的是区间和邻域.

设  $a$  和  $b$  都是实数, 且  $a < b$ . 数集  $\{x \mid a < x < b\}$  称为以  $a, b$  为端点的**开区间**, 记作