School-based Textbooks of High
Quality Curriculums in Ningbo
宁波市精品课程校本教材

Pinwei Shuxue

品味数学

吴建洪◎主编

宁波出版社

图书在版编目(CIP)数据

品味数学 / 吴建洪主编. —宁波 ：宁波出版社，2017.12

宁波市精品课程校本教材

ISBN 978-7-5526-3070-1

Ⅰ. ①品… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究—高中 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 252773 号

品味数学

吴建洪 主编

出版发行	宁波出版社(宁波市甬江大道 1 号宁波书城 8 号楼 6 楼 315040)
网　　址	http://www.nbcbs.com
责任编辑	王晓君
特约编辑	陈静静
责任校对	陈佩玉　杨　满
印　　刷	浙江开源印务有限公司
开　　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张	16.5
字　　数	310 千
版　　次	2017 年 12 月第 1 版
印　　次	2017 年 12 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 978-7-5526-3070-1
定　　价	39.00 元

从书编委会

主　任：张力鸣

成　员：何健明　章才根　丁耀方　倪国君　周均悦　魏　巍

本书编委会

主　编：吴建洪

编　委：刘次律　胡建烽　黄建锋　沈科杰　杨　栋　杨惠惠
王世恩　金　晶　施剑锋　伍建听　符钦荣　裘秀琴
沈松权　黄益维

School-based Textbooks of High Quality Curriculums in Ningbo
宁波市精品课程校本教材

Pinwei Shuxue

品味数学

吴建洪◎主编

宁波出版社
NINGBO PUBLISHING HOUSE

序

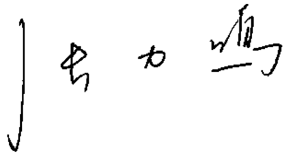
自2012年我省启动普通高中深化课程改革以来，省教育厅已先后进行了七批普通高中网络选修课程的评比活动。在市县两级教研部门的组织下，我市广大教师积极参与，从课程获奖的结果看，我市在数量上位居全省前茅，并且在类型上分布广泛，这也从一个侧面反映了宁波普通高中深化课程改革所取得的丰硕成果，可喜可贺。

为了让这些优质课程发挥更大的作用，市教研室在获奖的高中选修课程中，优中选优，遴选出10门精品选修课程，整理出版，这是一件非常有价值的事情。在我看来，它有以下三方面意义。第一，为各高中学校开展选修课程教学提供教材。在本轮课改中，各普通高中学校根据自身的办学定位和基础，通过构建学校课程体系，实施国家课程校本化和建设学生需要的各种校本课程，来推动学校特色发展，实现学生个性发展。校本课程建设的关键是教材建设，高质量而有针对性的教材开发是一项基础性工作，这项工作是长期的，需要多年开发、积累和完善，不可能一蹴而就。当前，绝大多数学校的校本课程教材建设不是很乐观，要求每校都编写一整套校本教材既不可能也无必要。现阶段，通过引进、借鉴同类优秀教材不失为一个好的路径。本套丛书的出版，将给有需求的高中实施同类课程提供优质教学资料，避免低水平重复建设，有利于促进教学质量提高。第二，能进一步提升教师开发选修课程的水平。“以评促建”“以评促优”是高中选修课程评比活动的目的之一，也是一种示范和引导。课程改革虽有数年，但毋庸讳言，对于开发课程，很多学校的管理层和教师还处于摸索中，这固然与教师缺乏相关课程开发知识有关，更与缺乏相应的课程资源有关。本丛书的作者都是高中教师的同行，与同伴交流，相互学习，显然有助于教师业务的快速成长。他们开发经验，也给其他教师提供示范

和激励。第三，展示了宁波市普通高中深化选修课程建设阶段性成果。在几届评比过程中，我们欣喜地看到宁波市高中选修课程的水平有了很大的提高。从这个意义上看，这套丛书的出版不仅是我市高中选修课程建设的阶段性成果展示，也为深化课程改革推进提供可复制的经验。

我相信，这次精品选修课程的评比和出版一定不是终篇，今后会有更多的教师团队加入选修课程开发的行列，在不远的将来会有更多样、更优秀、更受学生欢迎的选课课程涌现出来。为此，我十分期待。

是为序。



2017 年 11 月

前　言

2012 年以来，浙江省开始了全面深化普通高中课程改革的进程，旨在通过深化课改，调整课程结构，为每个学生提供适合的教育。 通过必修课程学习，促进学生在知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观等方面的发展，具有必要的学科基础知识、基本能力和基本素养，以提高学生未来发展所需的科学素养与人文素养。 在此基础上，加强选修课程建设，努力为学生提供丰富且有特色的课程体系，以满足不同潜质学生的发展需要，通过学习，培养学生专业兴趣和创新精神，拓宽学科视野，提高探究能力，全面提升学科素养，为进一步学习打下扎实的基础。

相对于比较完善的必修课程，基于必修课程和学生实际的校本选修课程的开发，一直以来学校和教师都面临很大的困难。 近几年，我们在区域层面，基于必修课程的数学选修课程的开发与开设方面作出了积极的探索与实践。

数学学科教学在形成人类理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用。 通过高中数学教学，我们努力使学生在数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等方面达到较高的素养。 正是基于这样的思考，我们重点选择了数学概念、数学思想、数学语言、数学文化、数学应用等五个主题，从 2013 年开始，在教学一线进行广泛的教学实践，2017 年上半年，在前期工作的基础上，组织宁波市特级教师带徒活动、宁波市卓越工程、余姚市中学数学名师工作室等十多位优秀青年教师，编写了《品味数学》一书。 基于必修课程的选修课程这一定位，在编写过程中，我们参考了教材中的阅读与思考、探究与发现，选修系列中的相关素材，也参考并引用了一些专业书刊上相关的内容，在此予以说明。

通过本课程的学习，进一步强调数学基本概念和基本思想的理解与掌握，注重体现基本概念的来龙去脉，帮助学生加深理解核心概念与重要数学思想；注重发展学生的应用意识，体会数学的应用价值，引导学生应用数学知识解决实际问题，开阔他们的视野，提高学生数学的发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力；关注数学的文化价值，通过学习，探寻数学发展的历史轨迹，养成求实、说理、批判、质疑等理性思维的习惯和锲而不舍的追求真理精神。

本课程几乎涉及普高数学的所有主要内容，所以适合于高二、高三学生选修，但由于编写的内容并没有按照原有的高中数学教学顺序编排，故在实际教学过程中，可结合学生学科基础，自主调整安排。 同时由于编写过程比较仓促，难免出现纰漏，谨请专家同行批评指正。

在本书的编写过程中，得到了宁波市教育局教研室领导的关心和支持，也得到了宁波出版社专家的指导，在此，一并表示感谢。

本书编委会

2017 年 11 月

目　录

第一章

品味数学——概念篇

1.1 函 数

一、函数概念的发展历程

欧洲文艺复兴之后的 16 至 17 世纪，科学家们致力于运动的研究，如计算天体的位置，远距离航海中对经度和纬度的测量，炮弹的速度对于高度和射程的影响等. 诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系，并根据这种关系对事物的变化规律作出判断，如根据炮弹的速度推测它能达到的高度和射程. 运动、变量与曲线的描述，催生了函数思想，这正是函数产生和发展的背景. 从此，数学开始从常量数学发展为变量数学. 函数的概念由此逐渐诞生，并一直占据着数学的核心地位.

（一）早期函数概念——几何观念下的函数

法国数学家笛卡尔(1596—1650)最先提出了“变量”的概念，他在《几何学》一书中不仅引入了坐标，而且实际上也引入了变量，他在指出 x，y 是变量的同时，还注意到 y 依赖于 x 而变化，这正是函数思想的萌芽. 恩格斯对此作了高度的评价：“数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为了必要 ……”

“function” 一词最初由德国数学家莱布尼兹(1646—1716) 在 1692 年使用. 在中国，清代数学家李善兰(1811—1882) 在 1859 年和英国传教士伟烈亚力等合译的《代微积拾级》中首次将“function” 译作“函数”.

莱布尼兹用“函数” 表示随曲线的变化而改变的几何量，如坐标、切线等. 但直到 17 世纪后期牛顿、莱布尼兹建立微积分的时候，数学家们还没有明确函数的一般意义，绝大部分函数是被当作曲线来研究的.

（二）十八世纪函数概念 —— 代数观念下的函数

1718 年约翰·伯努利(瑞士，1667—1748) 在莱布尼兹函数概念的基础上对函数

概念进行了定义:“由任一变量和常数的任一形式所构成的量.”他的意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫做 x 的函数,并强调函数要用公式来表示.后来,数学家认为这不是判断函数的标准,只要一些变量变化,另一些变量随之变化就可以了.

1755 年,瑞士数学家莱昂哈德·欧拉(1707—1783)给出了非常形象的、一直沿用至今的函数符号,即 $y=f(x)$,并将函数定义为:“如果某些变量,以一种方式依赖于另一些变量,我们将前面的变量称为后面变量的函数.”不难看出,欧拉给出的函数定义比约翰·伯努利的定义更普遍、更具有广泛意义.

(三)十九世纪函数概念——对应关系下的函数

1821 年,柯西(法国,1789－1857)给出如下定义:“在某些变数间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变数的值,其他变数的值可随之而确定时,则将最初的变数叫自变量,其他各变数叫做函数.”在柯西的定义中,首先出现了自变量一词,同时指出对函数来说不一定要有解析表达式.

1822 年,傅里叶(法国,1768—1830)发现某些函数可以用曲线表示,也可以用一个式子表示,或用多个式子表示,从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论,把对函数的认识又推进到了一个新层次.

1837 年,德国数学家狄利克雷(1805－1859)提出:“如果对于在某区间上的每一个确定的 x 值,y 都有一个完全确定的值与之对应,则 y 叫做 x 的函数.”狄利克雷的函数定义,出色地避免了以往函数定义中所有的关于依赖关系的描述,较清楚地说明了函数的内涵,即只要有一个法则,使得取值范围中的每一个值,有一个确定的值和它对应就行了,不管这个法则是公式、图象、表格,还是其他形式.上述定义,以完全清晰的方式为所有数学家无条件地接受.至此,函数概念、函数的本质定义已经形成,这就是人们常说的传统函数定义.

(四)现代函数概念——集合论下的函数

进入二十世纪以来,德国数学家康托尔(1845—1918)创立集合论以后,用集合对应关系来定义函数概念普遍被大家所接受,并为进一步适应现代数学发展的需要,作了更为广义的推广.即:“若对集合 M 的任意元素 x,总有集合 N 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称在集合 M 上定义一个函数,记为 $y=f(x)$.元素 x 称为自变元,元素 y

称为因变元.”综上所述,函数定义的产生经历了一个从无到有,从具体到抽象,从特殊到一般,从不完善到逐步完善的过程.

(五)函数的定义

1. 函数的变量说定义(传统定义):一般地,设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y,如果变量 y 随着 x 的变化而变化,那么就说 x 是自变量,y 是因变量,也称 y 是 x 的函数. 自变量 x 的取值范围叫做函数的定义域,与 x 对应的 y 叫做函数值,函数值的集合叫做函数的值域.

函数定义的变量说,是对函数的一个宏观、整体的把握,它建立在变量的基础上,强调了变化,而描述变化,正是函数最重要的特性.

但是变量说定义中的变量概念难以精确化,什么是变量,并没有给出明确的定义. 同时,因变量如何“依赖”于自变量,也没有说明. 更仔细地分析,对于函数:

$y = \sin^2 x + \cos^2 x$

x 变了,y 却不变,从字面上看就不是“随自变量的变化而变化了”.

2. 函数的对应说定义(现代定义):一般地,设 A,B 是非空的数集,如果按照某种确定的对应关系 f,使对于集合 A 中的任意一个数,在集合 B 中都有唯一确定的数和它对应,那么就称为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 $y = f(x)$,$x \in A$. 函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 称为函数的值域.

函数在映射基础上的定义:设 A,B 都是非空的数集,那么 A 到 B 的映射 $f: A \to B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作:$y = f(x)$,其中集合 A(即原象集)就是定义域,象集 C 就是值域($C \subseteq B$).

函数的本质是变量之间的关系,而描述这种关系的正是“对应”. 它能够微观地指出因变量是如何随着自变量的变化而变化.

如著名的分段函数:狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x\text{ 为有理数}; \\ 0, x\text{ 为无理数}. \end{cases}$ 虽然这是一个抽象的函数,它不可能像一般的初等函数那样通过熟悉的代数式来表达变量之间的对应关系,但是采用对应说定义能够准确、明晰地刻画这个函数. 函数概念的灵魂是运动,是变量,是变量关系.

（六）函数三要素

从上述定义中不难看出，定义域、对应法则和值域是函数的三大要素，即：当对应法则和定义域确定后，值域便自然确定下来．因此，函数的基本要素为两个：定义域和对应法则．所以函数也常表示为：$y = f(x), x \in D$．由此，我们说两个函数相同，是指它们有相同的定义域和对应法则．

1．定义域是使函数有意义的自变量的取值范围．它是研究函数的基础．在讨论函数的性质、作图、解方程和不等式等问题中都起着重要的作用．

在函数问题中，定义域常为解析式有意义的自变量的范围、题目给定的自变量的范围或由实际问题的意义所确定的自变量的范围．

【例 1】 设定义在$[-2,2]$上的偶函数 $f(x)$ 在区间$[0,2]$上单调递增，若 $f(1-m) < f(m)$，则实数 m 的取值范围是________．

分析：本例的关键是必须综合考虑函数的定义域、奇偶性和单调性，结合函数值的大小关系，可得：$\begin{cases} -2 \leqslant 1-m \leqslant 2 \\ -2 \leqslant m \leqslant 2 \\ |1-m| < |m| \end{cases}$．

2．值域是由定义域内的自变量通过对应关系而得到的函数值的全体，所以，一般地，值域紧紧地依赖于定义域．

函数最值问题是数学问题中最常见、最重要的题型之一．一般地，求函数最值常常运用二次函数、对勾函数、基本不等式、函数单调性和导数等方法求最值，在此不一一赘述．

（七）函数的表示方法

一般地，函数有三种表示法：解析法、图象法、列表法．

1．解析法：用数学表达式表示两个变量之间的关系．解析法是中学数学定义具体函数的主要方法，常用“形如 … 就叫 …”这一定义方式．

2．图象法：用图象表示两个变量之间的关系．

3．列表法：列出表格来表示两个变量之间的关系．

表示法	优点	说明
解析法	(1)简明、全面地概括了两个变量之间的关系; (2)可以通过解析式求出任意一个自变量所对应的函数值.	主要是中学阶段所研究的能够用解析式表示的函数.
图象法	(1)直观形象地表示当自变量变化时,相应函数值变化的趋势; (2)有利于通过图象研究函数的某些性质(如单调性、奇偶性、周期性等).	图象法在生产和生活中有许多应用,如企业生产图、股市走势图等.
列表法	不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.	列表法在实际生产和生活中有广泛应用,如银行利率表、列车时刻表等.

二、基本初等函数

(一)八个基本初等函数

中学数学所学习的基本初等函数共有以下八个:

函数名称	解析式
常量函数	$y=c$(c 是常数)
一次函数	$y=kx+b(k\neq 0)$
二次函数	$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$
反比例函数	$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$
指数函数	$y=a^x$($a>0$,且 $a\neq 1$)
对数函数	$y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq 1$)
幂函数	$y=x^a$
三角函数	$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$

说明:

1.对数的运算是指数的逆运算,如果说指数的增长是“爆炸式的”,那么对数的增加则是“缓慢式的”,这是描述自然界数量增长的一个特定模式.所以作为一种数学模型,对数函数提供了缓增的类型.

2.一般地说,三角学是几何学的一部分.如果说平面几何是定性处理三角形的边角关系(全等、平等、垂直、大边对大角等),那么三角学是定量地表示三角形边角之间关系(使用比例、正弦定理、余弦定理等).把三角思想引入三角形边角关系的处理,三角学又成为几何方法与代数方法相互沟通的桥梁.

三角学在古希腊时期诞生,此后广泛用于数学和天文学的计算.但是,那时的三角只限于处理 360° 以内的正角.处理任意角而产生三角函数,放在坐标上画图象,并用微积分方法进行研究,则是到 18 世纪的欧拉时代才完成的.

三角函数的重要,在于它的周期性.自然现象中的单摆、潮汐、电磁波、三相交流电等等,都是周期运动.