中等职业教育课程改革规划教材
中等职业教育教材编审委员会审定

数　学

（基础模块）

上　册

主　编　任少英　曾宪华　卢荣闯
副主编　王　明　董加成　王春秋

电子科技大学出版社

前言 Preface

本套教材是中等职业教育课程改革国家规划教材，根据教育部2009年颁布的《中等职业学校数学教学大纲》（简称“教学大纲”）编写。教材内容的选取严格按照“教学大纲”规定的“教学内容与要求”，遵循“教学大纲”对认知要求和技能与能力要求的规定。

本书是《数学（基础模块）上册》，主要体现了以下编写特色：

1. 突出基础性。在保证科学性的基础上，不刻意追求学科体系的完整性，降低教材难度，减轻学生负担。

2. 突出职业性。选择与生产岗位相关的素材，与职业岗位的数学实际应用相结合，体现数学知识在职业中的应用。

3. 体现普及性教育的特征。从学生实际状况出发，做好与九年制义务教育阶段的衔接，从学生学过的知识中，提出问题，通过引申、拓展来讲解新知识。

4. 体现分层教学的思想。考虑到学生基础的差异性，教材在部分章节中，安排了例题，并在章复习题和节习题中安排了 **A**、**B** 两组题目，以适应不同层次学生的需求。

5. 体现时代特征。一方面，落实“教学大纲”对计算器使用的要求，相关知识点与计算器的使用相整合；另一方面，落实“教学大纲”对计算机软件的使用要求，在教材中把教学内容与常用计算机教学软件有机地结合起来，利用软件的强大功能，方便教师的教学，提升学生对数学的理解。

6. 紧密结合学生生活中的实际问题。一方面，从生活中的实际问题引入数学概念；另一方面，利用数学知识解决生活中的实际问题，体验数学知识的应用。

7. 语言文字简洁、准确、流畅，通俗易懂。数学符号的使用严格执行国家有关的技术标准和规定。

8. 全套教材的编写注重基础模块与职业模块、拓展模块之间的衔接，并体现不同模块之间的差异性。

本书是基础模块上册，内容包括：集合与充要条件，不等式，函数，指数函数与对数函数，三角函数。书后附有“预备知识”内容。完成本书内容需要 64 学时，学时分配见下表：

学时分配表

章内容	学时数	章内容	学时数
第一章　集合与充要条件	10	第四章　指数函数与对数函数	12
第二章　不等式	8	第 5 章　三角函数	18
第三章　函数	12	机动学时	4

由于编者的学术水平有限，时间仓促，书中难免存在不足之处，敬请读者提出宝贵的意见和建议。

目　录 Contents

第1章 集 合

缤纷多彩的世界，众多繁杂的现象，需要我们去认识. 将对象进行分类和归类，加强对其属性的认识，是解决复杂问题的重要手段之一. 例如，国庆阅兵式中，依兵种组成的不同方队，特色鲜明，井然有序.

集合是基本的数学语言，命题是逻辑知识的基本概念. 学习运用这些知识，准确地进行描述并分类研究客观世界中对象的特征，从而揭示这些对象的内在联系与区别，能够提高我们应用数学语言来刻画现实世界、进行交流的能力.

本章主要学习集合与充要条件的知识. 这些知识及其所蕴含的数学思想方法，渗透到科技和生活的各个领域，是现代数学的基础，是学生基本数学素质的重要组成部分.

1.1 集合的概念及表示方法

1.1.1 集合与元素

人们在分析和研究问题时，经常要抓住某一类事物的共同性质，将具有某种共同性质的事物放在同一个整体内加以考虑，由此就产生了集合的概念.

考察和分析下面的几个例子：

· 某学校的全体学生；

· 某工厂的所有机器；

· 所有小于10的自然数；

· 所有的直角三角形；

· 直线 $y=3x-2$ 上的所有点.

上述例子分别是由一些人、物、数、图形和点组成的整体，每个整体都有一定的范围和确定的对象，且都具有自己的某种特定性质. 一般地，要考虑由一些对象组成的整体，用“集合”这个词来表达它.

提示

例如，所有小于10的自然数（包括0,1,2,3,4,5,6,7,8,9十个数）就组成一个集合，其中的每个数都是该集合的一个元素.

集合是由某些确定的对象组成的整体，简称**集**. 集合里的每一个对象称为集合的**元素**.

集合通常用大写英文字母 $A,B,C\cdots$ 来表示，集合的元素通常用小写英文字母 $a,b,c\cdots$ 来表示.

一般采用某些特定的大写英文字母来表示常用的几个数集（即由数组成的集合）：

· 所有自然数组成的集合称为**自然数集**，记作 $\mathbf{N}$；

· 所有正整数组成的集合称为**正整数集**，记作 $\mathbf{N}^*$；

· 所有整数组成的集合称为**整数集**，记作 $\mathbf{Z}$；

· 所有有理数组成的集合称为**有理数集**，记作 $\mathbf{Q}$；

· 所有实数组成的集合称为**实数集**，记作 $\mathbf{R}$.

想一想

自然数、正整数、整数、有理数、实数之间有什么关系？

下面我们来学习用符号表示元素与集合的关系.

给定一个集合 A，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，

记作 $a \notin A$.

例 1 下列对象能否组成一个集合?

(1)所有短发的女生;

(2)小于 10 的正奇数;

(3)方程 $x^2-9=0$ 的所有解;

(4)不等式 $x-7>0$ 的所有解.

解 (1)由于短发没有具体的标准,表述的对象是不确定的,所以不能构成一个集合.

(2)由于小于 10 的正奇数包括 1,3,5,7,9 五个数,它们是确定的对象,因此可以构成一个集合.

(3)方程 $x^2-9=0$ 的解为 -3 和 3,它们是确定的对象,因此可以构成一个集合.

(4)解不等式 $x-7>0$,可得 $x>7$,它们是确定的对象,因此可以构成一个集合.

由方程的所有解组成的集合称为这个方程的解集;由不等式的所有解组成的集合称为这个不等式的解集. 显然,方程的解集和不等式的解集都是数集.

注意

组成集合的对象必须是确定的,不能是模棱两可的.

例 2 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

(1)5 ____ $\mathbf{N}$, -2 ____ $\mathbf{N}$, 3.7 ____ $\mathbf{N}$;

(2)0 ____ $\mathbf{Z}$, 2.3 ____ $\mathbf{Z}$, -5 ____ $\mathbf{Z}$;

(3)π ____ $\mathbf{Q}$, -1.6 ____ $\mathbf{Q}$, 9.21 ____ $\mathbf{Q}$;

(4)3 ____ $\mathbf{R}$, -2 ____ $\mathbf{R}$, 4.7 ____ $\mathbf{R}$.

解 (1)$\in$, $\notin$, $\notin$; (2)$\in$, $\notin$, $\in$;

(3)$\notin$, $\in$, $\in$; (4)$\in$, $\in$, $\in$.

一个集合可以包含有限个元素,也可以包含无限个元素. 我们把含有有限个元素的集合称为有限集,如方程 $x^2-9=0$ 的解集;含有无限个元素的集合称为无限集,如 $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 等.

想一想

0 属于 $\varnothing$ 吗? $\frac{1}{x}=0$ 的解集是不是空集? 为什么?

特别地,不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$. 例如,方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内的解集就是空集.

1.1.2 集合的表示方法

鉴于集合元素的不同情况，在具体表示一个集合时，常用的方法有列举法和描述法.

1. 列举法

注意

集合中的元素必须是互不相同的对象，就是说元素不能重复出现，如不能用$\{4,6,4,8\}$表示集合$\{4,6,8,\}$.

对于有的集合，我们可以在大括号中将它的元素一一列举出来，元素之间用逗号隔开，这种表示集合的方法称为**列举法**.

例如，由大于3且小于10的所有偶数组成的集合可以表示为

$$\{4,6,8\};$$

方程$x^2-9=0$的解集可以表示为

$$\{-3,3\}.$$

由于集合是由一些对象组成的整体，因此在用列举法表示集合时，不必考虑元素的排列次序，即$\{3,-3)$和$\{-3,3)$表示的是同一个集合.

列举法多用于表示元素个数较少的集合. 当集合为元素较多的有限集或为无限集时，若要用列举法表示，可以在大括号内只写出几个元素，其他元素用省略号表示，但写出的元素必须让人明白省略号表示了哪些元素.

想一想

$\{5\}$与5一样吗？如果不一样，有何区别？空集$\varnothing$与集合$\{0\}$呢？

例如，由小于50的所有正整数组成的有限集可以用列举法表示为

$$\{1,2,3,\cdots,49\};$$

由所有偶数组成的集合为无限集，可以用列举法表示为

$$\{\cdots,-6,-4,-2,0,2,4,6,\cdots\}.$$

2. 描述法

有的集合无法用列举法表示，例如由大于2的实数组成的集合，这个集合有无穷多个元素，显然无法一一列举出来. 这种情况下，我们可以抓住这一集合的元素所具有的特征，即所有元素都是实数，并且大于2，由此可将这个集合表示为

$$\{x \mid x>2, x \in \mathbf{R}\},$$

其中，大括号内竖线左侧的 x 表示这个集合中的任意一个元素，竖线右侧写的是元素的共同属性，即元素所要满足的条件.

这种在大括号内将集合中元素的共同属性描述出来以表示集合的方法称为**描述法**.

如果从上下文能够明显看出集合的元素为实数，那么在描述集合时，$x \in \mathbf{R}$ 可以省略不写. 如上述集合可以表示为

$$\{x \mid x>2\}.$$

实际上，很多集合既可以用列举法表示，也可以用描述法表示. 用“列举法”表示集合，可以明确看到集合的元素；用“描述法”表示集合，可以清晰地反映出集合元素的共同属性. 具体可根据实际情况灵活选用.

提示

为了方便起见，在用文字描述集合中元素的共同属性时，可以省略竖线及其左侧的代表元素. 例如，所有锐角三角形组成的集合可以表示为{锐角三角形}.

例 3 用列举法表示下列集合：

(1)英文单词 good 中的字母组成的集合；

(2)方程 $x^2+2x-3=0$ 的解集.

解 (1)集合中的元素是不能重复的，相同元素只写一次，所以集合应表示为

$$\{g, o, d\}.$$

(2)解方程 $x^2+2x-3=0$ 得

$$x_1=-3, x_2=1,$$

所以该方程的解集为

$$\{-3, 1\}.$$

练一练

你能写出由中国古代的四大发明所组成的集合吗？

例 4 用描述法表示下列集合：

(1)大于 3 的所有奇数组成的集合；

(2)不等式 $3x+1 \geqslant 0$ 的解集；

(3)直线 $y=2x+1$ 上的点组成的集合.

解 (1)该集合中元素的共同属性可以描述为

$$x>3, \text{且 } x=2k+1, k \in \mathbf{Z},$$

所以这个集合可以表示为

$$\{x \mid x>3, \text{且 } x=2k+1, k \in \mathbf{Z})\}.$$

(2)解不等式 $3x+1\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -\frac{1}{3}$，所以该不等式的解集为

$$\left\{x \mid x\geqslant -\frac{1}{3}\right\}.$$

(3)平面直角坐标系中的点可表示为 (x,y)，因此直线 $y=2x+1$ 上的点组成的集合为

$$\{(x,y) \mid y=2x+1\}.$$

练一练

如何用描述法表示集合 $\{-7,7\}$？

练习题1.1

1. 自然数集、整数集、有理数集、实数集通常用哪几个符号表示？它们分别是有限集还是无限集？
2. 用列举法表示下列集合：
   (1)大于 0 小于 6 的整数的全体；
   (2)自然数中 3 的公倍数的集合；
   (3)方程 $2x-1=0$ 的解集；
   (4)方程 $x^2+x-2=0$ 的解集.
3. 用描述法表示下列集合：
   (1)自然数中所有偶数的集合；
   (2)不等式 $5x+3<0$ 的解集.
4. 用适当的方法表示下列集合：
   (1)绝对值等于 5 的全体实数组成的集合；
   (2)所有正方形组成的集合；
   (3)除以 3 余 1 的所有整数组成的集合；
   (4)构成英文单词 mathematics(数学)的全部字母组成的集合.

1.2　集合之间的关系

1.2.1　子集

设集合 $M=\{$数学，语文，英语，计算机应用基础，体育与

健康，物理，化学}，$N=\{$数学，语文，英语，计算机应用基础，体育与健康$\}$，那么集合 M 与 N 之间存在什么关系呢？

可以发现，集合 N 的元素都是集合 M 的元素.

一般地，如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素，那么把集合 B 称为集合 A 的**子集**，记作 $B\subseteq A$（或 $A\supseteq B$），读作"B 包含于 A"（或"A 包含 B"）.

集合 B 是集合 A 的子集，可以用图 1-1 所示的图形直观地表示，其中两个封闭曲线的内部分别表示集合 A、B.

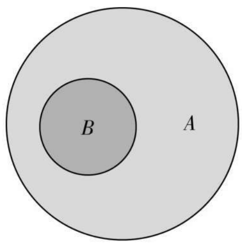

图 1-1

由子集的定义可知，任何一个集合都是它自身的子集，即 $A\subseteq A$.

规定：空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

例 1 用符号"$\subseteq$"、"$\supseteq$"、"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1)$\{a,b,c,d\}$____$\{a,b\}$；

(2)$\varnothing$____$\{1,2,3\}$；

(3)$\mathbf{N}$____$\mathbf{Q}$；

(4)0____$\mathbf{R}$；

(5)d____$\{a,b,c\}$；

(6)$\{x\mid 3<x<5\}$____$\{x\mid 0\leqslant x<6\}$.

分析 "$\subseteq$"和"$\supseteq$"是用来表示集合与集合之间关系的符号，本题中的(1)、(2)、(3)、(6)研究的是集合与集合之间的关系；而"$\in$"和"$\notin$"是用来表示元素与集合之间关系的符号，本题中的(4)、(5)研究的是元素与集合之间的关系.

解 (1)集合$\{a,b\}$的元素都是集合$\{a,b,c,d\}$的元素，因此

$$\{a,b,c,d\}\supseteq\{a,b\}；$$

(2)空集是任何集合的子集,因此$\varnothing \subseteq \{1,2,3\}$;

(3)自然数都是有理数,因此$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Q}$;

(4)0是实数,因此$0 \in \mathbf{R}$;

(5)d不是集合$\{a,b,c\}$的元素,因此$d \notin \{a,b,c\}$;

(6)集合$\{x \mid 3<x<5\}$的元素都是集合$\{x \mid 0 \leqslant x<6\}$的元素,因此

$$\{x \mid 3<x<5) \subseteq \{x \subseteq 0 \leqslant x<6\}.$$

1.2.2　真子集

想一想

为什么空集是任何非空集合的真子集?

集合$A=\{1,2,3,4,5\}$,集合$B=\{1,2,3\}$.显然B的元素都是A的元素,所以$B \subseteq A$,然而A的元素不都是B的元素.例如,4和5都是A的元素,但都不是B的元素.

如果集合B是集合A的子集,并且A中至少有一个元素不属于B,那么把B称为A的**真子集**,记作$B \subsetneqq A$(或$A \supsetneqq B$),读作"B真包含于A"(或"A真包含B").

显然,空集是任何非空集合的真子集.

例2　设集合$M=\{0,1,2\}$,试写出M的所有子集,并指出其中的真子集.

分析　集合M中有3个元素,其子集可以是空集、含1个元素的集合、含2个元素的集合和含3个元素的集合.

解　M的所有子集为

$$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}.$$

除集合$\{0,1,2\}$外,其他集合都是集合M的真子集.

例3　设集合$A=\{x \mid x>0\}$,$B=\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5\}$.指出集合$A$与集合$B$之间的关系.

解　在同一个数轴上作出这两个集合的数轴表示(图1-2).观察图形,根据定义可知,集合B是集合A的真子集,即$A \supsetneqq B$.

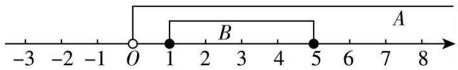

图 1－2

1.2.3 集合的相等

观察集合 $A=\{x|x^2-1=0\}$ 与集合 $B=\{-1,1\}$. 由于方程 $x^2-1=0$ 的解为 $x_1=-1,x_2=1$,解集为 $\{-1,1\}$,故集合 A 与集合 B 的元素完全相同.

一般地,如果两个集合的元素完全相同,那么就说这两个集合相等. 集合 A 等于集合 B,记作

$$A=B.$$

"集合 A 与集合 B 的元素完全相同"的意思就是,集合 A 的元素都属于集合 B,同时集合 B 的元素也都属于集合 A.

由定义知,实例中的两个集合相等. 即

$$\{x|x^2-1=0\}=\{-1,1\}.$$

例 4 判断集合 $A=\{x||x|=2\}$ 与集合 $B=\{x|x^2-4=0\}$ 的关系.

解 由 $|x|=2$ 得 $x_1=-2,x_2=2$,所以集合 A 用列举法表示为 $\{-2,2\}$. 由 $x^2-4=0$ 得 $x_1=-2,x_2=2$,所以集合 B 用列举法表示为 $\{-2,2\}$. 可以看出,这两个集合的元素完全相同,故 $A=B$.

练习题1.2

1. 用适当的符号($\in$、$\notin$、$\subsetneqq$、$\supsetneqq$、$=$)填空:

(1) 0 ____ $\varnothing$;

(2) $\varnothing$ ____ $\{\varnothing\}$;

(3) 0 ____ $\{1,2\}$;

(4) $\{1,2\}$ ____ $\{1,2\}$;

(5) $\{a,c\}$ ____ $\{a,b,c,d\}$;

(6) $\{x|1<x<7,z\in\mathbf{N}\}$ ____ $\{4,6\}$.

2. 指出下列各组集合之间的关系：

(1) $A=\{x|x-1=0\}$，$B=\{1,2\}$；

(2) $M=\{x|x>1\}$，$N=\{x|x\geqslant 2\}$；

(3) $P=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$，$Q=\{x|x$ 是等边三角形$\}$；

(4) 集合 $A=\{x|x^2-3x-10=0\}$，$B=\{-2,5\}$.

3. 写出集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集和真子集.

1.3 集合的运算

1.3.1 交集

由 6 的正约数组成的集合为 $A=\{1,2,3,6\}$，由 8 的正约数组成的集合为 $B=\{1,2,4,8\}$，而由 6 和 8 的正公约数组成的集合为 $C=\{1,2\}$. 不难看出，集合 C 是由集合 A 与集合 B 的公共元素组成的.

一般地，对于两个给定的集合 A，B，由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B".

集合 A 与集合 B 的交集可用描述法表示为

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

也可用图 1-3 中的着色部分来表示.

提示

如果两个集合 A、B 没有公共元素，则它们的交集等于空集，表示为 $A\cap B=\varnothing$.

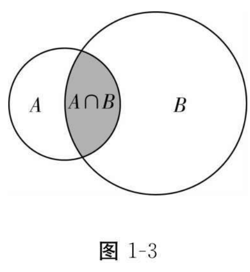

图 1-3

由交集的定义可知，对于任何集合 A 与 B，都有

$$A\cap A=A, A\cap B=B\cap A, A\cap\varnothing=\varnothing.$$

例 1 设 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{0,2,4,6,8\}$，求

$A\cap B$.

解 $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2,3\}\cap\{0,2,4,6,8\}=\{0,2\}$.

例 2 设 $A=\{x\mid x\geqslant -3\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，求 $A\cap B$.

解 将集合 A、B 在数轴上表示出来，如图 1-4 所示.

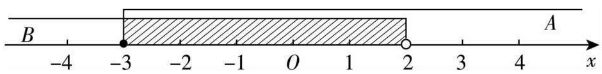

图 1-4

从图中可以看出，着色部分即为集合 A、B 的交集，即

$$A\cap B=\{x\mid x\geqslant -3\}\cap\{x\mid x<2\}=\{x\mid -3\leqslant x<2\}.$$

例 3 设 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 5x-y=3\}$，求 $A\cap B$.

解 集合 A、B 分别表示方程 $4x+y=6$，$5x-y=3$ 的解集，两个解集的交集就是二元一次方程组 $\begin{cases}4x+y=6\\5x-y=3\end{cases}$ 的解集.

解这个二元一次方程组得 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，所以

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}\cap\{(x,y)\mid 5x-y=3\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}4x+y=6\\5x-y=3\end{cases}\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\right\}\\&=\{(1,2)\}\end{aligned}$$

想一想

集合 $\{(1,2)\}$ 能否写成 $\{1,2\}$？为什么？

1.3.2 并集

已知方程 $x^2-1=0$ 的解集为 $A=\{-1,1\}$，方程 $x^2-4=0$ 的解集为 $B=\{-2,2\}$，故方程 $(x^2-1)(x^2-4)=0$ 的解集为 $C=\{-2,-1,1,2\}$. 不难看出，集合 C 是由集合 A 与集合 B 的所有元素组成的.

一般地，对于两个给定的集合 A、B，由集合 A、B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B".

注意

由于集合中的元素不能重复，在用列举法表示并集 $A\cup B$ 时，两个集合中相同的元素（即公共元素）只写一次.

集合 A 与集合 B 的并集可用描述法表示为

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\},$$

也可用图 1-5 中的着色部分来表示.

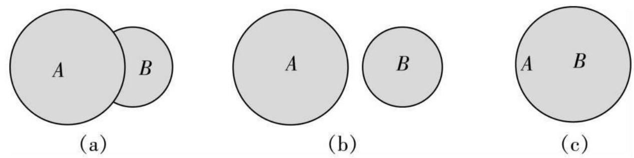

图 1-5

由并集的定义可知，对于任何集合 A 与 B，都有

$$A\cup A=A,\ A\cup B=B\cup A,\ A\cup\varnothing=A.$$

例 4　设 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，求 $A\cup B$.

解　$A\cup B=\{0,1,2,3\}\cup\{1,3,5,7\}=\{0,1,2,3,5,7)$.

提示

对于用不等式表示的集合，在分析集合的关系以及求并集或交集时，借助数轴去分析，简洁直观，一目了然，非常方便.

例 5　设 $A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，求 $A\cup B$.

解　将集合 A、B 在数轴上表示出来，如图 1-6 所示.

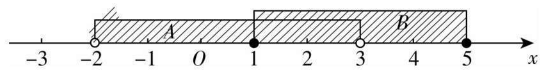

图 1-6

从图中可以看出，着色部分即为集合 A、B 的并集，即

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x\mid -2<x<3)\cup\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5)\\&=\{x\mid -2<x\leqslant 5\}.\end{aligned}$$

1.3.3　补集

在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某个给定集合的子集，则称这个给定的集合为**全集**，一般用 U 表示. 例如，在研究数集时，经常把实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集.

如果集合 A 是全集 U 的一个子集，则由 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 A 在全集 U 中的**补集**，记作 $\complement_U A$，读作“A 在 U 中的补集”.

集合 A 在全集 U 中的补集可用描述法表示为