

高频考点+题型

抢分特训

考前
系列



考前冲刺抢分神器

丛书主编：申招斌

本册主编：蒋杭州



4大特色
助你抢高分

高
考

数学

1
题型突破
抢高分

重要题型精讲 / 解题方法攻略 /
典型真题剖析

2
试题
练精练全

真题详解 + 模拟预测 +
回归演练

3
方法
讲全讲透

专题探究 + 解题步骤 +
答题模板

4
考点回归
防丢分

核心考点梳理 / 专项题型特训 /
基础巩固提高

高频考点+题型

抢分特训

考前冲刺抢分神器

丛书主编：申招斌

本册主编：蒋杭洲

高
考
数学

前言

进入高考二轮与三轮复习阶段,学生均有强烈的紧迫感。然而,由于高考时间提前、禁补令及高考一轮复习多而全,已侵占了传统的高考二轮与三轮复习的时间,压缩了高考二轮与三轮的运作时间。因而,学生急需一种创新产品来适应目前的高考二轮与三轮复习的新形势。为此,本丛书编委会特邀雅礼中学、湖南师范大学附属中学、长郡中学等各科名师,认真研究考纲并结合多年教学经验,编写了这套《高频考点·题型抢分特训》,针对高考题型、热点知识(高频考点)进行“布点”预测强化,以达到高考“抢分”之目的。

本丛书有三大亮点:

一是强化高考复习的“抢分”理念与“回归”理念。“抢分”是本丛书最核心的亮点,也是区别同类书籍的一大创新。而“回归”的内容均是在高考得分点上布局,包括知识点布点、题型布点与解题方法布点。

二是解决当前高考二轮复习的困惑。目前市面上的高考一轮复习资料书大都做得大而全,题多量大,难度几近高考二轮的难度。传统的高考二轮复习资料书往往是以学科知识体系为线索,以专题复习的方式呈现,很多内容是高考一轮复习已讲的内容,且高考二轮复习大多轻视基础,注重综合,平均难度高于高考,使用效果不理想。本丛书可承接大而全的高考一轮复习,通过创新变革改变传统的高考二轮、三轮复习方式,兼顾题型与高考热点,兼顾不同水平的考生,全面有效地提升考生的高考能力以及高考成绩。

三是弥补市场上的高考三轮强化训练针对性不强的不足。大部分学校的高考三轮强化训练资料是向书商订购名校资料,或从网上下载名校试卷,或订购成套试卷。而这些试卷并不适合本校的学生,同时,这种训练没有明确的主题与目的,效果不佳。很多学校甚至没有这一环节,花大量时间进行漫天撒网的题海战术,虽然能取得一定的成效,但此方式不属于高效之举。实施目的性不强的题海战术应该成为过去式。

本丛书在内容设置上进行科学编排,主要分为两大板块:

1. 题型突破。以高考题型为突破点,依据高考能力要求,针对题型特点进行编写。精选典型高考真题或名校模拟题,结合各学科特征,归纳常用方法,突破高考题型,针对性强,实用性强,有利于考生准确、合理、高效地开展考前三个月的复习。

2. 高频考点回归练。深入分析近三年高考命题选点,精准提炼考点,以考点为核心分析命题趋势,以考点为线索梳理整合知识、以考点为指导精选试题。在突出常考知识点的同时,选题侧重基础,注重“回归”。帮助学生回归基础,消除知识点的盲区,确保学生基础题少丢分或不丢分。

成功没有捷径却有方法,希望广大考生在选用本书时,用心琢磨透每道典题,领会书中列举的解题方法,参透各个考点,达到“突破题型不丢分,回归基础保得分”,在高考这个没有硝烟的战场打好漂亮的一仗!。



目 录

第一部分 题型分析与求解篇

第一章 选择题的求解策略	2
第一节 选择题的基本认识	2
第二节 选择题选择支的分析	3
第三节 选择题的求解策略	4
第四节 选择题的求解方法	4
方法一 直解法	4
方法二 验证法	5
方法三 极限法	7
方法四 特征法	8
方法五 逻辑法	9
方法六 估值法	10
方法七 图象法	11
抢分特训	12
第二章 填空题的求解策略	14
第一节 填空题的结构特点	14
第二节 填空题的求解特点	15
第三节 填空题的求解关键	15
第四节 填空题的求法方法	16
方法一 直解法	16
方法二 特例法	17
方法三 图解法	19
方法四 猜想法	20
抢分特训	21
第三章 解答题的求解策略	22
第一节 解答题的综合阐述	22
第二节 解答题的分析过程与解答策略	22

一、理解题意	22
二、模式识别	24
三、差异分析	25
四、层次解决	26
抢分特训	27

第二部分 考点分析与求解篇

第一章 近几年高考考点分布统计	30
第二章 非主干知识考题的分析与求解	33
知识模块一 集合	33
知识模块二 命题与逻辑	34
知识模块三 复数	35
知识模块四 算法流程图	36
知识模块五 二项式定理	37
知识模块六 线性规划	37
知识模块七 平面向量	39
知识模块八 不等式(选考内容)	40
知识模块九 极坐标与参数方程(选考内容)	41
第三章 主干知识考题的分析与求解	43
知识模块一 三角函数与解三角形	43
知识模块二 数列	45
知识模块三 统计、概率与数学期望	47
知识模块四 立体几何	50
知识模块五 解析几何	53
知识模块六 函数与导数	55
第四章 压轴题的破解策略	56
知识模块一 解析几何	56

知识模块二 函数与导数	63
第五章 新考纲中“对数学文化的考查”解读	72
第一节 真题示例	72
第二节 《九章算术》中的经典问题	73
第三节 世界古代数学的精华	76

第三部分 高频考点回归练

第一节 客观题	78
高频考点 1 集合、命题与逻辑	78
高频考点 2 复数	78
高频考点 3 算法、程序框图	79
高频考点 4 二项式定理	80
高频考点 5 简单的线性规划问题	80
高频考点 6 平面向量	81
高频考点 7 三角函数与解三角形	81
高频考点 8 数列	82

高频考点 9 排列组合、统计与概率、正态分布	82
高频考点 10 立体几何	83
高频考点 11 解析几何	83
高频考点 12 函数与导数	84
第二节 主观题	85
高频考点 1 三角函数与解三角形	85
高频考点 2 数列	86
高频考点 3 统计、概率与数学期望	87
高频考点 4 立体几何	88
高频考点 5 解析几何	89
高频考点 6 函数与导数	90
高频考点 7 坐标系与参数方程(选做题) ...	91
高频考点 8 不等式(选做题)	92
参考答案	93

第一部分

题型分析与求解篇

PART ONE >>



第一章 选择题的求解策略

第一节 选择题的基本认识

据统计,在每年的数学高考中,选择题能占到试卷总分的40%,其中易、中、难的比例约为4:5:1,平均难度在0.7左右,在高考中选择题的得分能占到学生数学成绩的50%,是学生得分的重要来源。本章以选择题的结构特征与回答方式上的特点为基础,分析选择题的求解策略,构建求解选择题的方法体系。

选择题在试卷中具有“单、多、广、活”的特点,即内容比较单一(大多只涉及1~3个知识点,仅进行1~3步运算),数量比较多,覆盖面比较广,题型比较活,以定量计算型为主(有些“定性论证型”选择题也可以通过定量计算来解决。)

求解选择题要求学生“熟、准、快”,即内容熟识、概念准确、推演快速,体现选择题的题型特征。

研究选择题的解法,必须包括这样一个战略性的目标:快速求解!但是,怎样才能“快”呢?当然,首先要“内容熟识、概念准确”,问题是,基础知识和基本能力怎样与题型特征结合起来?目前无论网上还是一些数学论文中方法都有很多,却大都缺乏系统性,不能从根本上优化学生的思维结构,我认为,快速解答选择题的关键是结合选择题自身特点(小题小做),避免总是“把信息量较多、赋分值较低的选择”当成解答题来做(小题大做)。

下面通过一道例题,让大家感受和体验怎样求解选择题。

典例 1 已知可导函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f'(x) > f(x)$, 则对任意的正数 a , $f(a)$, $e^a f(0)$ 之间的关系为 ()

- A. $f(a) < e^a f(0)$ B. $f(a) = e^a f(0)$
C. $f(a) > e^a f(0)$ D. 与 $f(x)$ 或 a 有关

这道题的背景是:已知可导函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f'(x) > f(x)$, 则对任意的正数 a , 恒有 $f(a) > e^a f(0)$ 。

解析 构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x} (x \in \mathbf{R})$, $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 得 $F(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 因而对 $a > 0$, 有 $F(a) > F(0) \Rightarrow \frac{f(a)}{e^a} > \frac{f(0)}{e^0}$, 得 $f(a) > e^a f(0)$, 选 C。

【答案】 C

但对于一般学生来说,构建函数是个障碍,那如何突破这个障碍呢?充分挖掘题干的意涵,即只要满足题干的条件就有唯一的结论,所以取 $f(x) = -1$ (或 $-3, -5$), 则 $f'(x) = 0$, 显然满足条件 $f'(x) > f(x)$, 且对 $a > 0$, 有 $f(a) = f(0) = -1$ 可否定选项 A、B; 又 $f(a) = -1 > -e^a = e^a f(0)$, 可快速得到选项 C。这个解法充分利用了选择题的自身特点,把一个需要构造函数来求解的中档题,通过一个常函数而转化为数值 -1 与 $-e^a$ 的大小比较,避免了“小题大做”。

作为选择题“若 p 则 A、B、C、D”, 首先已在结构形式上释放出比解答题更多的已知信息(给出了4个选项,且4个选项中有且只有一项正确);同时,在回答方式上选择题既可以由题干直接论证又可以将选择支作为条件使用。

如果选择题的编拟使用了全称判断,那就可以通过特例来排除诱误支,得出正确选择。因而,只需从无穷多个满足条件的模型中取出一个特殊的模型,就能得出这个“唯一确定”的答案。

求解选择题不仅存在随机猜测(正确率可达0.25),而且存在合理猜测和合情推理,“合理猜测和合情推理”不仅是机智的,而且也是可行的,正确率可以超过0.5。

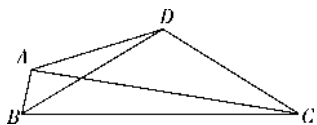
所以,利用选择题的结构特点,根据“系统方法论”,使用一些特殊的方法是可行的,正确的。

第二节 选择题选择支的分析

我们知道,从选择支中获取信息是选择题精巧求解的一个源泉.但是,这里有一些技术问题,比如,代入验证时,是A、B、C、D依次代入,还是有目的地挑某一选择支代入?显然,弄好了,我们代入一个选择支就能得出结论,问题是如何选择顺次呢?又如,特值验证时,碰巧了,取一个值就肯定了一支或者否定了3个支,问题是,这个特殊值是怎么找到的呢?

为了解决这些问题,我们建议采用“选择支的结构分析法”,它的通常做法是把4个选择支的内容对照着列成一个列联表,然后对比它们的关系,找出最关键的环节,找出最特别的数值,找出最经济的解题方案.

典例 2 如下图,四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的长分别是 $1, 9, 8, 6$, 对于以下命题:①四边形 $ABCD$ 外切于圆;②四边形 $ABCD$ 不内接于圆;③对角线不互相垂直;④ $\angle ADC \geq 90^\circ$;⑤ $\triangle BCD$ 是等腰三角形;正确的认识 ()



- A. ①真、②假、④真 B. ③真、④假、⑤真
C. ③真、④假、⑤假 D. ②假、③假、④真

解析 如果先对5个命题逐一判断真假,是比较麻烦的,也不能反映选择题的特点.特别是命题②的判断比较难,四边给定的四边形其形状并不唯一确定.如果依次判断,这就是“小题大做”(相当于做了5道题).当年的标准答案,验证了3个命题也没有看透题目深层结构,那么我们应该先做哪个命题?又最少要判断几个命题呢?对选择支作结构分析可一目了然,列表如下:

	①	②	③	④	⑤
A	+	-	?	+	?
B	?	?	+	-	+
C	?	?	+	-	-
D	?	-	-	+	?

(其中“+”表示真,“-”表示假,“?”表示“无法判断真假”)

对比之下,命题④的信息量最大,应该先从命题④做起,第一步否定两个选择支,第二步再否定一个选择支,就可以两步完成,由 $AC^2 < (AB+BC)^2 = 10^2 = CD^2 + AD^2$,知④假,这就否定了A、D,又由于B、C对⑤号命题的判断是不同的,故继续由

$BD < AD+AB=7 < CD < BC$,知⑤假,否定B,最后由选择题有且只有一个正确选项,故选C.这种方法把对5个命题的判断转化为对2个命题的判断,大大地缩短了解答时间,并且避免了对较难命题的推理论证.这种方法的独到之处在于不破译黑箱(还是黑箱)而间接认识黑箱,是系统方法论里的“黑箱理论”.

【答案】 C

典例 3 设实数 a, b, c 满足

$$a^2 - bc - 8a + 7 = 0, \quad \text{①}$$

$$b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0, \quad \text{②}$$

那么 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, +\infty)$
B. $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$
C. $(0, 7)$
D. $[1, 9]$

解析 本题正面求解的方法有很多,保证既充分又必要有一定的综合性,不少的同学甚至找不到突破口,利用排除法也不知道怎么取值验证比较合适,列表作选择支进行结构分析

	$(-\infty, 0]$	$(0, 1)$	1	$(1, 7)$	$[7, 9)$	9	$(9, +\infty)$
A	+	+	+	+	+	+	+
B	+	+	+	-	-	+	+
C	-	+	+	+	-	-	-
D	-	-	+	+	+	+	-

(其中“+”表示选择支包含此区间或端点,“-”表示选择支不包含此区间或端点)

由表可见,一般的, a 取2个特殊值就可得出结果,比如在区间 $(-\infty, 0]$ 内取一个值,就可以把选择支缩短为A、B或C、D,再在区间 $[7, 9]$ 中取一个值,就可以把答案确定;特殊的,取 $a = \frac{1}{2}$ 时,由②式可得 $b^2 + c^2 + bc - 6a + 6 = 0 = (b + \frac{c}{2})^2 + \frac{3}{4}c^2 + 3 \geq 3$,矛盾,故包含 $a = \frac{1}{2}$ 的A、B、C均可否定,选D.

【答案】 D

此法来源于对题目结构的认识,具体地讲,是对选择题特殊结构的认识,对选择支作结构分析,是认识题目深层结构的一个途径,选择题的验证法常常可以用“选择支结构分析表”找到为什么取特殊值,取哪个特值的启示.

第三节 选择题的求解策略

由上面对选择题的结构特征分析,可以得出解答选择题的5个基本策略.

由“统一前提”知,4个选择支“有且只有一个正确”,从而产生3个策略.

策略1 肯定1支,即只要能肯定1支,便自动否定3支.

策略2 否定3支,即只要能否定3支,便自动肯定第4支,这是一种典型的黑箱方法,不打开黑箱而破译黑箱之谜!对定量型和定性形的选择题都有效.

策略3 逻辑分析,即理解题意时,也对选择支之间的逻辑关系作出判断,以减少选择干扰,缩短选择支的长度,比如,若 $A \Rightarrow B$,则A必假; $A \Leftrightarrow B$,则

A,B均假;若A,B成矛盾关系,则A,B必有一真,从而C,D均假;熟悉这些逻辑关系,自觉进行这方面的逻辑分析,可以在节省使用其它数学知识的前提下,提高解题效率.

策略4 合情推理,即由图形的直观性,进行简单的逻辑判断或特殊的数值验证,以及特征结构的分析、甚至猜想等迅速作答.

策略5 结论也是已知信息,就是说要充分利用4个选择支所提供的信息,从中获取积极的暗示,或是让结论参入推理、或是对其边推理边否定、或是直接从结论出发逆推验证.

以此为依据,我们可以归纳出解答选择题常用的几种方法.

第四节 选择题的求解方法

方法一 直解法

方法指导

直接从题目条件出发,运用有关概念、性质、定理、法则和公式等基本知识,通过严密的推理和准确的运算,并把得出的结果与4个选择支作比较,若演算的结论恰为某一选择支,我们就称为顺推肯定,若演算的过程可以逐步排除3个诱误支,我们就称为顺推否定,一般来说,顺推肯定用得较多.

值得注意的是,顺推肯定是求解选择题的最基本方法,并且这种方法本身也是充满技巧的.

典例调研

典例4 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A 、 B 、 C 为该抛物线上三点,若 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}|$ 等于 ()

- A. 9
B. 6
C. 4
D. 3

解析 焦点 $F(1,0)$,设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. 则由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$ 得 $x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 = 0$,即 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. 而 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}|$ 可转化为 A 、 B 、 C 三点到准线的距离,即 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| + |\overrightarrow{FC}| = x_1 + 1 + x_2 + 1 + x_3 + 1 = 6$. 故选B.

【答案】 B

点拨 本题考查抛物线及向量的基本知识,解题的关键是将向量运算转化为坐标运算,再结合抛物线的性质将点到焦点的距离转化为点到准线的距离.一般容易题和中档题都是几个简单考点的“拼凑”,只要基本知识和基本技能过关,解答就不会有任何障碍.

典例5 (重庆高考题)若 $\tan \alpha = 2 \tan \frac{\pi}{5}$,则

$$\frac{\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{5}\right)} \text{ 等于 } ()$$

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

$$\frac{\cos(\alpha - \frac{3\pi}{10})}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{5})} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{3\pi}{10})}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{5})} =$$

$$\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{5})}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{5})} = \frac{\sin \alpha \cos \frac{\pi}{5} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{5}}{\sin \alpha \cos \frac{\pi}{5} - \cos \alpha \sin \frac{\pi}{5}} =$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{5}}{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{5}} = 3.$$

【答案】 C

点拨 本小题考查了三角函数中的诱导公式、和差公式及三角恒等变换,在直解法的题型中往往技巧性较强,所以在平时的学习中,要对不同知识模块处理的技巧注意积累,避免“直来直去”,耽误时间,形成隐性失分.

典例 6 若向量 $\mathbf{a} = (k, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 4)$, $\mathbf{c} = (2, 1)$, 且 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 的夹角为钝角, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 3)$
 B. $(0, 3]$
 C. $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$
 D. $(-\infty, -\frac{9}{2}) \cup (-\frac{9}{2}, 3)$

解析 $\because 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 的夹角为钝角,

$$\therefore (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0, \text{ 即 } (2k - 3, -6) \cdot (2, 1) < 0, \\ \therefore 4k - 6 - 6 < 0, \therefore k < 3.$$

$$\text{又若 } (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \parallel \mathbf{c}, \text{ 则 } 2k - 3 = -12, \text{ 即 } k = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{当 } k = -\frac{9}{2} \text{ 时, } 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (-12, -6) = -6\mathbf{c},$$

即 $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ 与 \mathbf{c} 反向. 它们的夹角不是钝角, 所以排除.

综上, k 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{9}{2}) \cup (-\frac{9}{2}, 3)$.

选 D.

【答案】 D

点拨 本题主要考查平面向量的数量积的坐标运算, 属于容易题, 但隐含了当两向量的夹角为 180° 时, 两向量的数量积取负值, 即小于 0, 但夹角不是钝角. 所以直解法特别要注意基础知识的扎实, 不要忽视空集、0、零向量、定义域、范围、端点等, 否则很容易判断失误.

【小结】 直解法是解答选择题最常用的基本方法, 低档选择题可用此法迅速求解, 直解法运用的范围很广, 只要运算正确必能得到正确的答案, 提高直解法解选择题的能力, 是建立在扎实掌握“双基”的基础上, 否则一味求快则会快中出错.

方法二 验证法

方法指导

从题干出发, 取满足条件的特殊值, 并将得出的结论与 4 个选择支作比较, 能直接得到结论的为“验证肯定法”, 产生矛盾或根本不存在的选择支即可淘汰, 称之为“验证否定法”, 有时一次赋值不能排除 3 个选项, 需要再次赋值. 利用前面所教的“选择支结构分析法”不仅能很快地找到该赋何值, 并且最多两次就能找到正确选项. 这类题型较多, 只要认真分析题意, 找出题中的一般性与选择支的特殊性就可以使用这种方法, 当题干与选项组成全称判断时用验证法是非常有效的.

典例调研

典例 7 (全国高考题) 若 $a > b > 1, 0 < c < 1$, 则 ()

- A. $a^c < b^c$ B. $ab^c < ba^c$
 C. $a \log_a c < b \log_b c$ D. $\log_a c < \log_b c$

解析 (验证法) 设符合题意的 $c = \frac{1}{2}, a = 4, b = 2$, 分别代入 A、B、C、D, 排除 A、B、D, 选 C.

利用验证法, 干净利落, 痛快淋漓. 将一道对 4 个命题需要判断求证的问题变成简单的计算.

(直解法) 对 A: 由于 $0 < c < 1$, \therefore 函数 $y = x^a$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $a > b > 1$ 时, $a^c > b^c$, A 错误;

对 B: 由于 $-1 < c - 1 < 0$, \therefore 函数 $y = x^{c-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore a > b > 1 \Leftrightarrow a^{c-1} < b^{c-1} \Leftrightarrow ba^c < ab^c$, B 错误;

对 C: 要比较 $a \log_b c$ 和 $b \log_a c$, 只需比较 $\frac{a \ln c}{\ln b}$ 和 $\frac{b \ln c}{\ln a}$, 只需比较 $\frac{\ln c}{b \ln b}$ 和 $\frac{\ln c}{a \ln a}$, 只需比较 $b \ln b$ 和 $a \ln a$.

构造函数 $f(x) = x \ln x (x > 1)$, 则 $f'(x) = \ln x + 1 > 1 > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $f(a) > f(b) > 0 \Leftrightarrow a \ln a > b \ln b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a \ln a} < \frac{1}{b \ln b}$.

又由 $0 < c < 1$ 得 $\ln c < 0$, $\therefore \frac{\ln c}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b} \Leftrightarrow \log_a c > \log_b c$, C 正确;

对 D: 要比较 $\log_a c$ 和 $\log_b c$, 只需比较 $\frac{\ln c}{\ln a}$ 和 $\frac{\ln c}{\ln b}$. 而函数 $y = \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $a > b > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln a} < \frac{1}{\ln b}$.

又由 $0 < c < 1$ 得 $\ln c < 0$, $\therefore \frac{\ln c}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b} \Leftrightarrow \log_a c < \log_b c$, D 错误.

【答案】 C

典例 8 (全国高考题) 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 1, \\ 4 - \sqrt{x-1}, & x \geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -2) \cup [0, 10]$
 B. $(-\infty, -2) \cup [0, 1]$
 C. $(-\infty, -2) \cup [1, 10]$
 D. $(-2, 0) \cup [1, 10]$

解析 (验证法) 由 $f(x)$ 的解析式可知 $f(0) = 1$, 排除 C、D; $f(10) = 4 - \sqrt{10-1} = 1$, 排除 B, 故选 A.

(选择支结构分析法) 利用前面所讲的选择支结构分析法列表可取 $x=0$ 和 $x=10$ 易得正确选项为 A.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$[0, 1)$	1	$(1, 10]$
A	+	-	+	+	+
B	+	-	+	+	-
C	+	-	-	+	+
D	-	+	-	+	+

(直解法) 解不等式组 $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 1, \\ x < 1, \end{cases}$ 和不等式组

$\begin{cases} 4 - \sqrt{x-1} \geq 1, \\ x \geq 1, \end{cases}$ 再求并集可得 $\{x | x < -2\} \cup \{x |$

$0 \leq x \leq 10\}$, 故选 A.

【答案】 A

典例 9 (江西高考题) $(1+ax+by)^n$ 的展开式中不含 x 的项的系数的绝对值的和为 243, 不含 y 的项的绝对值的和为 32, 则 a, b, n 的值可能是 ()

- A. $a=2, b=-1, n=5$
 B. $a=-2, b=-1, n=6$
 C. $a=-1, b=2, n=6$
 D. $a=1, b=2, n=5$

解析 本题读完题目, 一般学生有点不知所措, 找不到思路, 想利用二项式展开式来求解, 又几乎下不了手. 仔细思考, “不含 x 项的系数”不就可以设 $x=0$ 吗? 所以, 当 $x=0$ 时, 令 $y=1$, 得 $(1+|b|)^n = 243$; 令 $y=0, x=1$, 则 $(1+|a|)^n = 32$. 对照选择支, 当 $b=-1$ 时, $(1+|b|)^n = 243$, 排除 A、B, 当 $a=-1$ 时, $(1+|a|)^n = 32$, 此时 $n=5$, 排除 C, 选 D.

【答案】 D

【小结】 能使用“验证法”解答的高考题比较多, 同学们要认真理解题意, 平时多注意思考“一题多解”, 熟悉能使用“验证法”的题型特点, 这样能保证在高考时“小题小做, 直奔结果”.

方法五 逻辑法

方法指导

对选择支之间的逻辑关系先做分析,弄清各个选择支之间是否存在同一关系、从属关系、交叉关系、矛盾关系、对立关系等,若 $A \Rightarrow B$,则 A 必假,若 $A \Leftrightarrow B$,则 A, B 都假,若 A 与 B 是对立的关系或矛盾的关系,其中必有一真,从而 C, D 必假.通过这些关系否定诱误支,肯定正确支,是一种快速解答选择题的特有方法.

典例调研

典例 16 (江西高考题)已知向量 $m = (2, 1)$,使 $n = (a, a^2 - 3)$ 的夹角为钝角的一个充分而不必要条件 a 的取值范围为 ()

- A. $(-3, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, 1)$
 B. $(-3, 2)$
 C. $(-3, 1)$
 D. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

解析 (逻辑法)显然 D 是 A、B、C 的真子集,因为只有一个选项正确,所以选 D.

(直解法)由 m, n 的夹角为钝角可得 $m \cdot n < 0$ 且 $m \neq kn (k < 0)$,

即 $2a + a^2 - 3 < 0$ 得 $-3 < a < 1$,且 $k \neq -\frac{3}{2}$.

所以, m, n 的夹角为钝角的充要条件是 A, 所以正确选项一定是 A 的真子集,观察选项,选 D.

【答案】 D

典例 17 设函数 $f(x) = a^{-|x|} (a > 0)$,且 $f(2) = 4$,则 ()

- A. $f(-1) > f(-2)$ B. $f(1) > f(2)$
 C. $f(2) < f(-2)$ D. $f(-3) > f(-2)$

解析 (逻辑法)因为 $|-x| = |x|$,所以 $f(x) = a^{-|x|} (a > 0)$ 是偶函数,则 $f(-1) = f(1), f(-2) = f(2)$,故 A、B 等价,排除 A、B,又 C 明显错误,故选 D.

(直解法)由已知可得 $a^{-|2|} = 4$,得 $a = \frac{1}{2}$;又 $f(-x) = f(x)$,所以 $y = f(x)$ 是偶函数;当 $x > 0$ 时, $y = f(x)$ 是增函数,则 $f(-2) = f(2) > f(1) = f(-1)$,故排除 A、B、C;由 $f(-3) = f(3) > f(2) = f(-2)$,选 D.

【答案】 D

典例 18 (江苏高考题)关于实数 a, b 的下列 4 个关系式中,有且只有一个是正确的,这个正确的关系式只可能是 ()

- A. $|a| < 1$ 或 $|b| < 1$ B. $|a| > 1$ 且 $|b| > 1$
 C. $|a + b| < |1 + ab|$ D. $|a| + |b| < 2$

解析 若用直解法,题干无任何条件!无法作出选择.所以必须对四个选择支进行分析:

若 C 真 $\Leftrightarrow (a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{若 } \begin{cases} |a| > 1, \\ |b| > 1 \end{cases} \text{ 推出 } B \text{ 真,从而 } C, B \text{ 同真} \\ \text{若 } \begin{cases} |a| < 1, \\ |b| < 1 \end{cases} \Rightarrow |a| + |b| < 2, \text{ 则 } C, D \text{ 同真} \end{cases}$$

所以 C 假;若 B 真,则 C 也真,所以 B 假;若 D 真,则 A 也真,所以 D 假.故选 A.

【答案】 A

点拨 这是一道只能用逻辑法解决的典型例题,也可以看出逻辑法在高考试题中的深度.

方法六 估值法

方法指导

有些问题,由于受条件限制,无法(有时也没有必要)进行精确的运算和判断,所以只能依赖于估算,估算实质上是一种数字意义,它以正确的算理为基础,通过合理的观察、比较、判断、推理,从而做出正确的选择.估算省去了很多推导过程和比较复杂的计算,节省了时间,从而显得快捷.其应用广泛,它是人们发现问题、研究问题、解决问题的一种重要的运算方法.

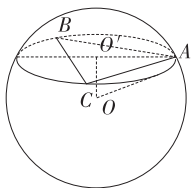
典例调研

典例 19 已知过球面上 A, B, C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$, 则球面面积是 ()

- A. $\frac{16\pi}{9}$ B. $\frac{8\pi}{3}$
C. 4π D. $\frac{64\pi}{9}$

解析 (估算法) 设球的半径为 R , $\triangle ABC$ 的外接

圆半径 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则 $S_{球} = 4\pi R^2 \geq 4\pi r^2 = \frac{16}{3}\pi > 5\pi$, 只有 D 符合, 故选 D.



(直解法) 球心 O 与正三角形 ABC 形成一个正三棱锥, 且球心在三角形 ABC 内的射影为三角形的重心, 则重心 O', O, A 组成一个直角三角形, 易求得球的半径为 $\frac{4}{3}$, 故球的表面积为 $\frac{64\pi}{9}$.

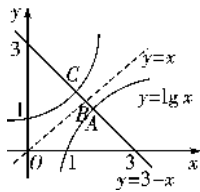
【答案】 D

典例 20 已知 x_1 是方程 $x + \lg x = 3$ 的根, x_2 是方程 $x + 10^x = 3$ 的根, 则 $x_1 + x_2 =$ ()

- A. 6 B. 3
C. 2 D. 1

解析 (估算法) 因为 x_1 是方程 $x + \lg x = 3$ 的根, 所以 $2 < x_1 < 3$, x_2 是方程 $x + 10^x = 3$ 的根, 所以 $0 < x_2 < 1$, 所以 $2 < x_1 + x_2 < 4$, 故选 B.

(直解法) 如图, 在同一坐标系中作出四个函数, $y = 10^x$, $y = \lg x$, $y = 3 - x$, $y = x$ 的图象, 设 $y = 3 - x$ 与 $y = \lg x$ 的图象交于点 A , 其横坐标为 x_1 ; $y =$



10^x 与 $y = 3 - x$ 的图象交于点 C , 其横坐标为 x_2 ; $y = 10^x$ 与 $y = 3 - x$ 的图象交于点 B , 其横坐标为 $\frac{3}{2}$.

因为 $y = 10^x$ 与 $y = \lg x$ 互为反函数, 点 A 与点 B 关于直线 $y = x$ 对称, 所以 $x_1 + x_2 = 2 \times \frac{3}{2}$, 选 B.

【答案】 B

典例 21 用 1, 2, 3, 4, 5 这五个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中奇数共有 ()

- A. 36 个 B. 60 个
C. 24 个 D. 28 个

解析 (估算法) 由于五个数字可组成 $A_5^3 = 60$ 个没有重复数字的三位数, 而 5 个数字中, 奇数有 3 个, 偶数有两个, 所求必然超过一半, C、D 都少于一半, 故选 A.

(直解法) $A_5^3 - A_4^3 = 36$.

【答案】 A

【小结】 高考中对计算量大的题目, 有时可以对数据进行粗略的估计从而得出正确的答案, 特别是对选择题尤其有用, 但一定要注意审题, 观察选项之间的区别, 并加以分析, 就能确定正确选项. 估算法是根据变量的趋势或极值的取值情况进行求解的方法. 当题目从正面解析比较麻烦, 特值法又无法确定正确的选项时常用估算法.

方法七 图象法

方法指导

严格地说,图解法并非属于选择题解题思路和方法的范畴,而是一种数形结合的解题思想和策略,但它在解有关选择题时非常简便有效,不过运用图象法解题一定要对有关函数图象、方程曲线、几何图形非常熟悉,特别是对于二元代数式的意义,如“简单的线性规划”中考点的考查,常常与“截距、斜率、距离”等有关,求解“函数的零点,方程的根,两个函数图象的交点”等问题中应用广泛.同学们熟练掌握几种二元代数式基本形式的几何意义是很有必要的.并且在作图时尽量准确,对于同增或同减的两条曲线的交点问题是作图的一个难点,有时需要借助切线来准确判断,否则错误的图像反会导致错误的选择.

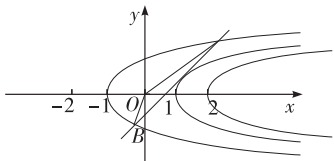
典例调研

典例 22 (天津高考题) 设两个向量 $\mathbf{a} = (\lambda + 2, \lambda^2 - \cos^2 \alpha)$, $\mathbf{b} = (m, \frac{m}{2} + \sin \alpha)$, 其中 λ, m, α 为实数, 若 $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, 则 $\frac{\lambda}{m}$ 的取值范围是 ()

- A. $[-6, 1]$ B. $[4, 8]$
C. $(-\infty, 1]$ D. $[-1, 6]$

解析 (图象法) 为了大家的习惯, 我们用 x 代替 m , 用 y 代替 λ ,

$$\begin{aligned} \text{由 } \mathbf{a} = 2\mathbf{b}, \text{ 得 } \begin{cases} y + 2 = 2x, \\ y^2 - \cos^2 \alpha = x + 2 \sin \alpha \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 2, \\ y^2 = x + 2 - (1 - \sin \alpha)^2, \end{cases} \end{aligned}$$



则 (x, y) 就是直线与抛物线的交点, $\frac{y}{x} = k$ 就是此交点与原点连线的斜率.

由 $0 \leq (1 - \sin \alpha)^2 \leq 4$ 知, 动抛物线从 $y^2 = x - 2$ 的位置从右往左平移, 止于 $y^2 = x + 2$ 的位置, 之间经历了与直线相离、相切、相交的三种关系, 解方程组 $\begin{cases} y = 2x - 2, \\ y^2 = x + 2, \end{cases}$ 得 $A(2, 2), B(\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$, 故 k 的取值范围在 $k_{OB} = -6, k_{OA} = 1$ 之间, 所以 $k \in [-6, 1]$, 选 A.

(直解法) 由 $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ 得 $\lambda + 2 = 2m$, ①
 $\lambda^2 - \cos^2 \alpha = m + 2 \sin \alpha$, ②
假设 $m = 0$,

由①②可得 $\begin{cases} \lambda + 2 = 0, \\ \lambda^2 - \cos^2 \alpha = 2 \sin \alpha, \end{cases}$ 消去 $\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 3 = 0$,

即 $(1 - \sin \alpha)^2 + 2 = 0$ 不成立, 所以 $m \neq 0$.

$$\text{令 } \frac{\lambda}{m} = k (k \neq 2) \Leftrightarrow \lambda = 2m,$$

$$\text{代入①②得 } \begin{cases} mk + 2 = 2m (k \neq 2), \\ m^2 k^2 - 1 + \sin^2 \alpha = m + 2 \sin \alpha, \end{cases}$$

$$\text{再消去 } m \text{ 得 } \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{3k^2 + 6k - 8}{(2 - k)^2} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{2(k^2 + 5k + 6)}{(2 - k)^2} = -(1 - \sin \alpha)^2 \leq 0.$$

设函数 $y = \frac{2(k^2 + 5k + 6)}{(2 - k)^2}$, 函数 $-\frac{49}{16} \leq y \leq 0 \Rightarrow -6 \leq k \leq 1$, 选 A.

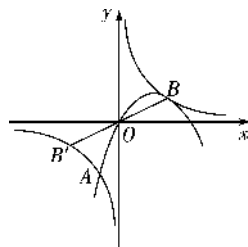
【答案】 A

典例 23 (山东高考题) 设函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) =$

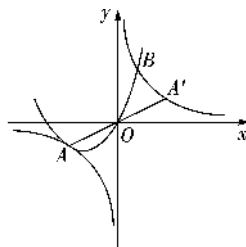
$ax^2 + bx (a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0)$. 若 $y = f(x)$ 的图象与 $y = g(x)$ 的图象有且仅有两个不同的公共点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则下列判断正确的是 ()

- A. 当 $a < 0$ 时, $x_1 + x_2 < 0, y_1 + y_2 > 0$
B. 当 $a < 0$ 时, $x_1 + x_2 > 0, y_1 + y_2 < 0$
C. 当 $a > 0$ 时, $x_1 + x_2 < 0, y_1 + y_2 < 0$
D. 当 $a > 0$ 时, $x_1 + x_2 > 0, y_1 + y_2 > 0$

解析 方法一: 由题意知满足条件的两函数图象只有图(1)与图(2)两种情况,



图(1)



图(2)

图(1)中, 作 B 关于原点的对称点 B' , 据图可知: 当 $a < 0$ 时, $x_1 + x_2 > 0, y_1 + y_2 < 0$, 故 B 正确.