序　　言

有追求，才有教师的专业发展

如何促进自己不断地获得专业发展，是很多教师的困惑，尤其是在经验型教师向专家型教师过渡发展的阶段.在这一阶段，教师们日常需要承担较为繁重的教学任务，同时教学中的问题似乎都已了然于胸，很多时候不需要作深入思考就可以解决大多数问题，教育教学工作变得平淡而无挑战，部分教师因而陷入专业发展瓶颈期.但是本书笔者师前老师以他不断追求的精神，为我们诠释了教师专业发展的精神实质，提供了一种可借鉴的发展途径.

高中数学学习内容中的拓展课程受关注的程度不高，其原因不是其中的学术价值或教育意义不高，而是因为在升学考试中的占比不大.为什么这些考试中的冷门问题恰恰引起了师前老师的关注？是因为师前作为一个用心的数学教师，不断地思考着“对教材中某点规定的不解或某种解法的不满”、“教学中遇到的某些问题在教参和其他参考资料中、通过网络搜索或与同事研讨交流都找不到答案”等不少教师想过、但不甚了了就不愿多想的问题；之所以挑战这些被很多教师认为没有“价值”的问题，是他独具慧眼地发掘出其中蕴含的“函数”、“建模”、“变换”、“或然与必然”等数学思想，以及“参数法”、“坐标法”、“向量法”等基本数学方法.正是基于师老师的不断追求，想别人之不愿想，想别人之未曾想，他才能够深刻地揭示出这些知识背后的本质规律，并以较高的观点把握其中蕴含的数学文化与数学意识.也正因为对困惑的持续思考、对问题的深入探究，不仅使师老师本人的专业得到长足的发展，也为广大高中数学教师奉献了这本具有启发、借鉴意义的学术专著.

在这本书的撰写过程中，师老师总结自己的教学与研究特色，形成了“因疑而研”、“微高观点”和“学术眼光”3个特点，显示了师老师独特的思考、研究与教学的方法.他善于从常规问题中发现或发展出一些新的问题，显示出深厚的数学功底和强烈的问题意识；他对于教学内容的学习价值的思考，显示出对数学知识育人价值的思考与体验；他对于一些问题的文化背景的剖析，显示出对数学知识文化属性的感悟与提炼.所有这些，都源自师老师历时连续8年的高三数学教学中积累的难点、疑点、灵感、顿悟，以及对教学的反思、总结和再认识，是对个人经验的升华.

在本书的形成过程中，师老师的心路历程同样给我们以启发.他在书中的一段话可以使我们和他共同感悟这些艰难的历程：“其实，有用与无用、繁与简、等与不等、曲与直、一般与特殊、循规蹈矩与离经叛道……这些看似矛盾的对立，谁又能讲得清孰高孰低、孰对孰错呢？如

果能让我们的思维变得灵动、眼光变得独到、内心盈满幸福，这些看似枯燥的符号运动又何尝不是一种人生的享受！”我们可以深切地感受到师老师在追求自我突破的过程中，破茧而出的痛苦与快乐，体会到他对教育事业与专业发展的执着追求.

基于此，我觉得本书既为高中数学教学提供了大量富含数学思想与方法的教学案例，可供教师与学生参阅使用，也为数学教师的专业发展提供了一个鲜活的、可参考的有效路径.

李秋明
上海市数学特级教师，正高级教师
上海市数学名师基地主持人
2016 年 4 月

前　言

《上海市中小学数学课程标准》(试行稿)中规定了高中阶段(十至十二年级)数学的学习内容与要求.学习内容有基本内容、拓展内容、专题研究与实践.其中拓展内容分拓展Ⅰ与拓展Ⅱ,拓展Ⅱ中的数学A和数学B为"必须修习".截止至2016届高中毕业生,数学A为希望在人文、社会科学等方面发展的学生必须修习,数学B为希望在理工、经济等方面发展的学生必须修习.根据"《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》调整意见",数学A和数学B调整后的内容(即2017届起不分文理的拓展内容)包括5个学习主题:参数方程与极坐标、简单的线性规划、空间向量及其应用、投影与画图、概率与统计及下属的14个学习内容,其中"参数方程与极坐标"主题下的学习内容只有"参数方程",其他主题下的学习内容不再一一列举.

本书聚焦上述5个主题的数学教学展开研究,考虑到相关内容之间的联系及拓展研究的必要性,参照沪教版高级中学数学课本的做法,我们对个别不在上述14个学习内容(但仍是相关的)之内的部分打上了"*"(详见目录).

选择上述主题展开研究主要是基于如下考虑:

(1) 它们同属于高中数学的拓展内容,其中蕴含了诸如"函数"、"建模"、"变换"、"或然与必然"等基本数学思想及"参数法"、"坐标法"、"向量法"等基本数学方法,它们在整个高中数学中具有毋庸置疑的重要性.

(2) 这5个学习主题所涉及的诸多学习内容绝大部分在教师的日常教学与研究中均居于次要地位,学生以及教师对其中很多现象的认识可能仍停留于表面,没有发现背后的本质规律,从而缺乏以较高观点把握数学对象的意识、习惯或能力,这对教师自身的专业发展是不利的.

(3) 常年身处教学第一线的数学教师,经常会有这样的体会:在当年的教学过程中又遇到了前几年就遇到过的"对教材中某点规定的不解或某种讲法的不满"、"学生问到的但被教师以各种理由婉拒回答的问题"、"某些数学问题连续几年教授的都是相同的解法"、"教学中遇到的某些问题在教参和其他参考资料中、通过网络搜索或与同事研讨交流都找不到答案",等等.作为一个用心的数学教师,上述问题在第1或第2次遇到时可能会被记录,然而通过对若干骨干教师的调查表明,这些问题的解决似乎是一个毫无尽头的过程,它们会随着教师年复一年的教学不断重现后又被搁置.

本书的研究围绕上述3点展开，笔者试图通过剖析每一学习主题的“源”与“流”，给出自己对相应学习内容的理解、思考与拓展.

例如，在本书第1章第4节就教材中的一道例题在教材中出现的位置、体现的数学意义及教育价值等角度提出了自己的看法.再如，第6章中的第2节和第3节，对斜坐标系的理论及在高中数学中的应用讨论得尤为详细.已故著名数学特级教师曾容先生认为：在学生头脑中要弄清“3个什么”，即数学知识是什么、为什么、还有什么.我们认为，教师尤其需要解决的“3个什么”还应包括思想、观点等.

本书不是练习册和案例集，也不同于教师们平时使用的教参，它言课本及其他参考书所未言、解师生从事本部分教或学时所遇到的诸多疑点，并作出进一步拓展.本书有以下3个特点：

(1) 因疑而研，略处有详议.

例如，在将参数方程化为普通方程时，最后对范围的处理往往是学生甚至教师感到困惑的：是只注明x(或y)的范围还是同时注明x，y的范围？同时注明x，y的范围是否是最严密的做法？又如，课本中“参数方程”一节在最后“探究与实践”中给出了名为“轨迹探究”的课题，课本及教参中均未对该课题给出解答或说明，几乎所有教师对此也熟视无睹.再如，在本书第4章，笔者给出了各种轴测图如何通过投影实现的具体方法，而这一点正是读者阅读课本时最感困惑的地方，也是教参中毫无涉及的，本书对这些问题均作了详细的讨论与拓展.

(2) 微高观点，凡处示深意.

通常意义下的“高观点”是指“高等数学的观点”.笔者认为，“介于高等数学与教师所熟悉的初等数学”之间也有一片空白需要去填补，这部分空白所代表的观点被笔者称为“微高观点”，它常表现为数学思想但大部分教师并不熟悉.例如，问题“设$\boldsymbol{a}=(1, x)$，$\boldsymbol{b}=(-1, 3)$，且$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$平行，则$x=$________.”若拥有“斜坐标观点”，便可洞察其本质.本书以微高观点指引思考与研究，力争于平凡处揭示问题的本质或深意.

(3) 学术眼光，抛砖为引玉.

学术意味着“研究、争鸣、进步”，本书部分章节对教材或教参中的某些做法给出了自己的评论或看法，同时对不少内容作了引申或拓展，期望得到广大同行的批评指正.书中所有内容实乃笔者有感而研：感于每年教学中积累的疑点、难点及偶得的灵感、顿悟，给出自己的总结、再认识、解决办法及拓展研究.

章建跃博士建议数学教师要以理解数学、理解教学、理解学生这“3个理解”来谋划自身的专业发展，本书的研究主要是基于“理解数学”这个角度对相关主题展开讨论，同时有对相应知识点教法的分析与建议.鉴于本书的研究主题来自高三数学教学一线，其研究内容中蕴含的丰富的数学思想及数学方法在整个高中数学中的重要性，相信本书会对数学教师的专业发展及学生的思维启发、能力提升具有较大的促进作用.笔者期待，本书所讨论的这些在数学教学中被“匆匆带过”的内容能够成为助力教师专业发展的良好素材.

本书书末所附的参考文献，有些会在相关章节的行文中经常提到，为简单计，我给它们相

应地作出简记,参见下表:

参考文献	简　记
上海市中小学数学课程标准(试行稿)	《标准》
上海市高中7门学科课程标准调整意见	《调整意见》
高级中学课本　数学　高中一年级　第一、二学期(试用本)	《高一上教材》、《高一下教材》
高级中学　数学教学参考资料　高中一年级　第一、二学期(试用本)	《高一上教参》、《高一下教参》
高级中学课本　数学练习部分　高中一年级　第一、二学期(试用本)	《高一上练习》、《高一下练习》
高级中学课本　数学　高中二年级　第一、二学期(试用本)	《高二上教材》、《高二下教材》
高级中学　数学教学参考资料　高中二年级　第一、二学期(试用本)	《高二上教参》、《高二下教参》
高级中学课本　数学练习部分　高中二年级　第一、二学期(试用本)	《高二上练习》、《高二下练习》
高级中学课本　数学　高中三年级(试用本)	《高三教材》
高级中学　数学教学参考资料　高中三年级(试用本)	《高三教参》
高级中学课本　数学练习部分　高中三年级(试用本)	《高三练习》
高级中学课本　数学　高中三年级　拓展Ⅱ(理科)(试用本)	《理拓教材》
高级中学　数学教学参考资料　高中三年级　拓展Ⅱ(理科)(试用本)	《理拓教参》
高级中学课本　数学练习部分　高中三年级　拓展Ⅱ(理科)(试用本)	《理拓练习》
高级中学课本　数学　高中三年级　拓展Ⅱ(文科、技艺)(试用本)	《文拓教材》
高级中学　数学教学参考资料　高中三年级　拓展Ⅱ(文科、技艺)(试用本)	《文拓教参》
高级中学课本　数学练习部分　高中三年级　拓展Ⅱ(文科、技艺)(试用本)	《文拓练习》

注:文理合并后高中三年级拓展Ⅱ的必修部分内容被收集在本书书末给出的参考文献[30]中,文献[30]、[31]、[32]的出版日期均为2016年7月。这3本文献中的内容是由文献[12]、[15]、[13]、[16]、[14]和[17]中相应的内容平移而来。

师　前

2016年3月

目　　录

第 1 章 “参数方程”教学研究

> 一般受教育者在数学课上应该学会的重要事情是用变量和函数来思考.
>
> ——F·克莱因

§1.1 “参数方程”的学习价值

平面解析几何是通过在平面上建立直角坐标系，从而实现用代数方法（如坐标、方程等）研究某些平面图形（如直线、圆锥曲线等）的基本性质. 其中，直线用二元一次方程刻画，圆锥曲线（包括圆、椭圆、双曲线、抛物线）用不含 xy 项的二元二次方程刻画. 在《高二下教材》§12.1“曲线和方程”这一节，同学们学习了求动点的轨迹方程的各种方法，如直接法、代入法、定义法等. 以上所讲的“方程”有一个共性：刻画了曲线上点的横坐标 x 和纵坐标 y 的直接关系. 但有时这种直接关系的寻找比较困难甚至不可能，但 x，y 与第 3 个变量（参数，也叫参变量、参变数）之间的间接关系却比较容易获得.

例 1.1 （《理拓教材》/P. 20 例 4） 设炮弹的发射角为 α，发射的初速度为 v_0，求炮弹运动的轨迹（即弹道曲线）的参数方程（不计空气阻力等因素）.

解 以炮口的中心位置 O 为坐标原点，水平方向为 x 轴，建立平面直角坐标系，如图 1.1 所示.

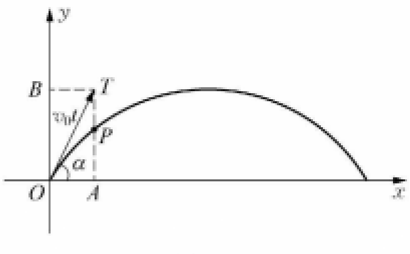


图 1.1

设炮弹发射 t 秒后的位置在点 $P(x, y)$. 由题意可知 x，y 与 t 的关系，亦即弹道曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases} 0 \leqslant t \leqslant t_0,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

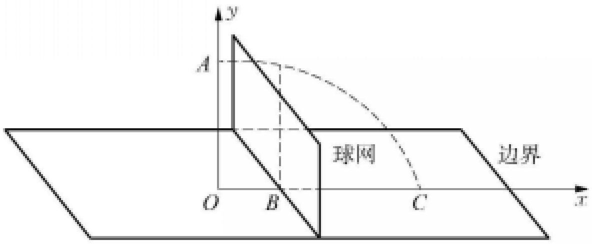
其中 t_0 为炮弹从发射到着地所需的时间 $\left(令\ y = 0\ 可解得\ t_0 = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)$，$g$ 是重力加速度（取9.8 m/s^2）.

本例中炮弹的运动规律难以较快地用 x，y 的方程直接表示出来，但引进时间参数 t，就能较容易地把 x，y 间接地联系起来. 当然，从此间接关系出发，采用代入法消去 t，也可获得 x，y 的直接关系（即弹道曲线的普通方程）为

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

但这样的直接关系一方面在形式上不如参数方程简洁，另一方面由于参数方程分别反映出炮弹飞行的水平距离、高度与时间的关系，在解决炮弹的射程、飞行时间、命中确定目标的发射角等问题时，都远比普通方程富有实际意义. 再如下面的问题："设排球场总长为 18 米，网高 2 米，运动员站在离网 3 米远的线上正对网竖直跳起，把球水平向前击出. 如果击球点高度为 2.5 米，当球水平向前击出时，速度在什么范围内才能使球既不触网也不出界？"

为求解上述问题，如图 1.2 所示，以运动员起跳点为坐标原点，竖直向上为 y 轴正方向，与球网在场地上的射影相垂直方向为 x 轴正方向. 设球的坐标为 $(x,\ y)$，以时间 t 为参数，由题意可得



O为起跳点；A为击球点；C为球落地点.

图 1.2

$$\begin{cases}x=vt,\\ y=2.5-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}0\leqslant t<t_0,\ t_0=\sqrt{\frac{5}{g}}.$$

为了使球既不触网也不出界，必须满足：

(1) 当 $x=3$ 时，$y>2$；

(2) 当 $y=0$ 时，$x\leqslant 12$，即

$$\begin{cases}2.5-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{3}{v}\right)^2>2,\\ v\cdot\sqrt{\dfrac{5}{g}}\leqslant 12.\end{cases}$$

由此可解得 $3\sqrt{g}<v\leqslant\dfrac{12}{5}\sqrt{5g}$.

《理拓教材》中安排了关于轨迹问题的"探究与实践"课题，具体如下.

例 1.2 （《理拓教材》/P. 28 轨迹探究） 在自行车轮胎的外缘上沾一小块白色纸片 M，然后请你站在自行车侧面的地面上观察自行车在平地上向前直行时，这一白色的点 M 描绘出怎样的一条曲线.

(1) 将这个问题抽象为数学问题；

(2) 画出这条曲线的示意图；

(3) 建立平面直角坐标系；

(4) 选择适当的参数；

（5）推导出这一曲线的参数方程；

（6）借助于计算机或计算器或描点法，根据方程描绘曲线，并与示意图对照是否相近.

解 如图 1.3 所示，取自行车直行所在的直线为 x 轴，圆周上的定点为 M（即白色纸片所在点），M 滚动在定直线上的一个位置为原点，建立直角坐标系. 设圆的半径为 r，圆在直线上滚动时，点 M 绕圆心作圆周运动，转过 θ 角后，圆与直线相切于点 A，线段 OA 的长等于弧 MA 的长，$OA=\overset{\frown}{MA}=r\theta$，这就是圆周上的定点 M 在圆 B 沿直线滚动过程中满足的几何条件. 过点 M 分别作 AB 和 x 轴的垂线，垂足分别为 C 和 D. 设 $M(x, y)$，取 θ 为参数，据上述几何条件可得

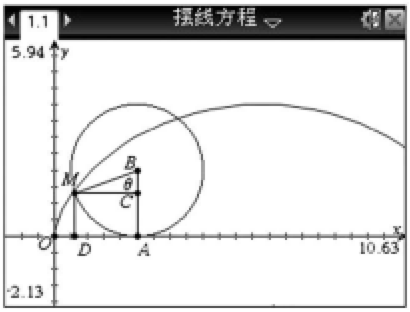


图 1.3

$$x=OD=OA-DA=OA-MC=r\theta-r\sin\theta,$$
$$y=DM=AC=AB-CB=r-r\cos\theta.$$

即白色纸片 M 描绘的曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta),\\ y=r(1-\cos\theta),\end{cases}\theta\text{ 为参数},\theta\geqslant 0.$$

可以看到，通过角参数 θ 可以很顺利地获得曲线的参数方程，上述曲线通常被称为平摆线，简称摆线，又叫旋轮线. 显然，摆线的普通方程（即 x，y 的直接关系式）较难得到.

图 1.4 是借助 TI-nspire CAS 图形计算器作出的 $r=0.5$ 时摆线示意图，其中一个拱的宽度为 $2\pi r=\pi$，高度为 $2r=1$（r 是滚动圆的半径）.

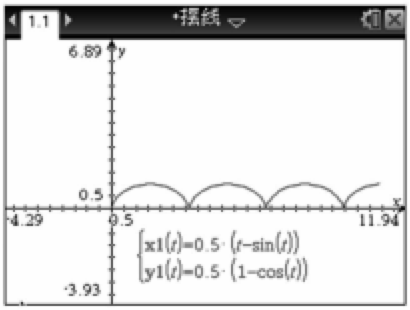


图 1.4

值得一提的是，尽管有关一般摆线问题的理论推导对中学生的要求较高，故只能作为课外的"探究与实践"以课题形式开展研究. 但以其为背景的相关考题却时有出现，例如下面的问题：

"如图 1.5 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，一单位圆的圆心的初始位置在 $(0, 1)$，此时圆上一点 P 的位置在 $(0, 0)$，圆在 x 轴上沿正向滚动. 当圆滚动到圆心位于 $(2, 1)$ 时，$\overrightarrow{OP}$ 的坐标为________."

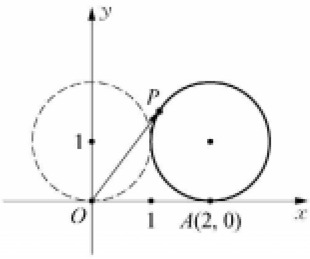


图 1.5

易知本问题中点 P 的轨迹即为摆线. 由题意 $\theta=\dfrac{\overset{\frown}{PA}}{r}=\dfrac{|OA|}{r}=2$，故

$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)=1(2-\sin 2)=2-\sin 2,\\ y=r(1-\cos\theta)=1(1-\cos 2)=1-\cos 2,\end{cases}$$

因此 $P(2-\sin 2,\ 1-\cos 2)$ 即$\overrightarrow{OP}$ 的坐标.

再如 2010 年北京市高考理科第 14 题、2011 年江西省高考理科第 10 题、2012 年上海市浦东新区一模试题第 23 题等，均以平面图形滚动时讨论动点轨迹为背景命题，可见应该是受了摆线这种模型的启发.

在重要的平面曲线中，除了摆线，还有圆的渐开线、笛卡尔叶形线等也具有类似的情况，关于它们的简要介绍，将分别在本章的 § 1.3 和 § 1.7 中给出.

其次，参数方程与三角、圆锥曲线、极坐标等都有密切的关系，参数思想是求解数学问题的重要数学思想.

通过三角函数的学习可知，角 α 的终边上的点 $P(x,\ y)$ 与角 α 有其内在的联系，即 $x=r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，其中 r 是点 P 到原点的距离. 这说明坐标平面内的点也能用形如 $(r,\ \alpha)$ 的有序数对表示，这就是极坐标系的基本思想. 而表达式 $\begin{cases} x=r\cos\alpha \\ y=r\sin\alpha \end{cases}$ 本身就闪烁着参数的基本思想，即以参数 α 或 r 为桥梁沟通了曲线上任一点的两个坐标 x，y 之间的关系. 事实上，椭圆、双曲线的参数方程也可以看成是对其标准方程实施三角代换之后的结果.

在高一、高二代数或几何的相关章节学习中，我们早已体会到参数思想的重要价值. 参数思想可使某些数学问题的求解变得比较简便.

例 1.3 已知实数 a，b 满足 $a^2+b^2-4b+3=0$，且不等式 $a+2b-1+m\geqslant 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解 不等式 $a+2b-1+m\geqslant 0$ 即 $1-m\leqslant a+2b$，故问题关键是求出 $a+2b$ 的取值范围. 由 $a^2+b^2-4b+3=0$ 得 $a^2+(b-2)^2=1$，可令 $\begin{cases} a=\cos\theta, \\ b-2=\sin\theta, \end{cases}$ $\theta\in\mathbf{R}$，从而 $a+2b=\cos\theta+2(2+\sin\theta)=4+2\sin\theta+\cos\theta=4+\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，因此 $a+2b\in[4-\sqrt{5},\ 4+\sqrt{5}]$. 故 $1-m\leqslant 4-\sqrt{5}$，$m\geqslant\sqrt{5}-3$.

例 1.4 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=\dfrac{n+2}{n}a_{n-1}+\dfrac{1}{n}(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 设 $a_n-\lambda=\dfrac{n+2}{n}a_{n-1}+\dfrac{1}{n}-\lambda$（参数 λ 待定），变形可得

$$a_n-\lambda=\frac{n+2}{n}\left(a_{n-1}+\frac{1-\lambda n}{n+2}\right).$$

令 $-\lambda=\dfrac{1-\lambda n}{n+2}$，可得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，故 $a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{n+2}{n}\left(a_{n-1}+\dfrac{1}{2}\right)$. 令 $b_n=a_n+\dfrac{1}{2}$，可得 $b_n=\dfrac{n+2}{n}b_{n-1}(n\geqslant 2)$. 从而

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{n+2}{n}b_{n-1}=\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}b_{n-2}=\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}b_{n-3}=\cdots \\ &=\frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}b_1=\frac{(n+2)(n+1)}{3\times 2}b_1=\frac{(n+1)(n+2)}{4}. \end{aligned}$$

进而 $a_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{4}-\dfrac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

在上述解法中，可以看到参数的作用. 参数 λ 是变化的，但是为了满足解题的需要，又在某一时刻被固定下来，即 $\lambda=-\frac{1}{2}$. 正是有了 λ 的参与，才通过构造新数列 $\{b_n\}$ 成功地解决了问题.

例 1.5 已知直线 l 过点 $Q\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 且与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 相交于 A，B 两点，求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

解 由题意可知直线 l 的斜率是存在的，故其方程可设为 $y-\frac{1}{2}=kx$，并设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$.

由 $\begin{cases}y-\frac{1}{2}=kx,\\ y=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ 可得 $x^2-2kx-1=0$，从而

$x=\frac{x_1+x_2}{2}=k$，$y=k\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{1}{2}=k^2+\frac{1}{2}$，

即 $\begin{cases}x=k,\\ y=k^2+\frac{1}{2},\end{cases}$ 故消去参数 k 可得中点 M 的轨迹方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$，如图 1.6 所示.

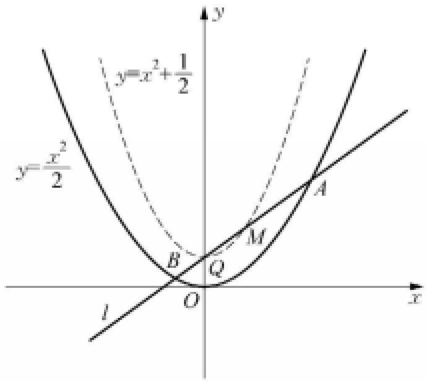


图 1.6

在解题中，参数 k(斜率) 为了解题的需要"默默地出现"了，当得出轨迹的参数方程 $\begin{cases}x=k,\\ y=k^2+\frac{1}{2}\end{cases}$ 后又主动被消去、"默默地消失" 了. 正是因为参数的这种默默工作的精神，消解了解题难点，加快了解题步伐. 参数在解题中就像一个无名英雄，也像化学反应中的催化剂，在反应物和生成物中都不见它的踪影，然而却能够加快反应速度.

注意 例 1.5 也可用"点差法"求解.

另外，若曲线由极坐标方程 $\rho=f(\theta)$ 表示，则可把它化为以极角 θ 为参数的参数方程：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=f(\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

这种做法可帮助我们在今后的微积分学习中方便地处理一些由极坐标方程给出的重要曲线（如心脏线、阿基米德螺线、玫瑰线、对数螺线、伯努利双扭线等）的切线、法线、焦线、渐屈线等问题.

最后需要指出的是参数方程的教育作用. 我们知道，很多曲线都可用直角坐标的普通方程表示，也可用参数方程表示（当然，有时还可用极坐标方程表示），究竟用哪一种方程表示，要视具体的曲线和相应的问题而定. 培养学生的决策能力也是数学教学追求的目标之一，参数方程（或极坐标方程）的教学为学生提供了可供选择、决策的平台.

§ 1.2 参数的选择及几何意义

在本节将以"问题与答"的形式给出有关"参数方程"教学的一些建议. 在问题二的回答中，

将重点研究如何灵活选择参数建立参数方程以及相关参数的几何意义.

一、问题一：如何引入参数方程

答 高三对本专题的教学通常放在平面解析几何一轮复习的最后，属于新授课教学. 教师可从学生以前接触过的代数或几何中的问题(如§1.1中的例1.3、例1.4、例1.5等)入手，分析其解法的共同点，从而引出课题并给出曲线的参数方程的定义.

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线 C 上任意一点的坐标 x, y 都是某个变量 t 的函数，

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} t \in D, \tag{1.1}$$

并且对于 t 的每一个允许值，由方程组(1.1)所确定的点 $P(x, y)$ 都在曲线 C 上，那么方程组(1.1)就叫做曲线 C 的参数方程. 变量 t 叫做参变量或参变数，简称参数.

相对于参数方程来说，前面学过的直接给出曲线上点的坐标 x, y 间关系的方程 $F(x, y) = 0$ 叫做曲线的普通方程.

二、问题二：在求曲线的参数方程时，哪些量可以作为参数

答 常可选作参数的量有"时间、角、斜率或斜率的倒数、截距、比值、线段的长、有向线段的数量、点的坐标"等，其中"角"有直线的倾斜角、旋转角、极角、离心角、仰角、俯角及图形中其他相关的角等.《理拓教材》中已出现了以时间、角、比值、线段的长作为参数的相关例题，前述§1.1中的例1.5是以斜率作为参数的. 下面的一些例题可作为它的补充.

例 1.6 试以有向线段的数量作为参数，给出直线的参数方程.

解 《理拓教材》中关于直线的参数方程是这样叙述的：如图1.7所示，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{d} = (u, v)$. 设 $P(x, y)$ 是 l 上任意一点，那么由

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = t,$$

得直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + ut, \\ y = y_0 + vt, \end{cases} t \in \mathbf{R}.$$

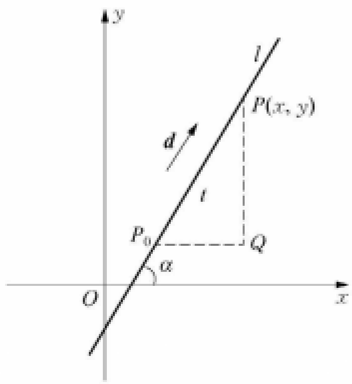


图 1.7

如果 l 的倾斜角为 α，那么 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{d} = (\cos\alpha, \sin\alpha)(0 \leqslant \alpha < \pi)$. 此时上述方程可写成

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha, \\ y = y_0 + t\sin\alpha, \end{cases} t \in \mathbf{R}.$$

我们把该方程称为直线参数方程的标准形式，以区别于其他形式. 在直线 l 上，每一点都对应着唯一确定的 t. 由图1.7可以看到，标准形式中的参数 t 有明确的几何意义：有向线段 P_0P 的数量 $P_0P = t$(直线向上或向右的方向为正方向). 若 $0 < \alpha < \pi$，则：

(1) 当 $t > 0$ 时，点 P 在点 P_0 的上方；

(2) 当 $t = 0$ 时，点 P 与点 P_0 重合；

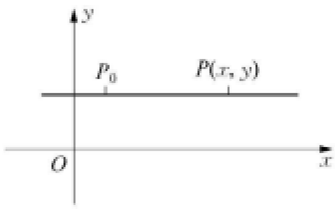


图 1.8

(3) 当 $t<0$ 时,点 P 在点 P_0 的下方.

若 $\alpha=0$(见图 1.8),直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+t,\\ y=y_0,\end{cases}$ 此时,当 $t>0$ 时,点 P 在点 P_0 的右侧;当 $t=0$ 时,点 P 与点 P_0 重合;当 $t<0$ 时,点 P 在点 P_0 的左侧.

我们还可以从以下角度认识参数 t 的意义:设直线 l 上的点 P 对应参数 t,则如果把直线 l 看成以 P_0 为原点、向上或向右的方向为正方向的数轴,则 t 就是点 P 的坐标. 于是,我们立刻得到以下结论:

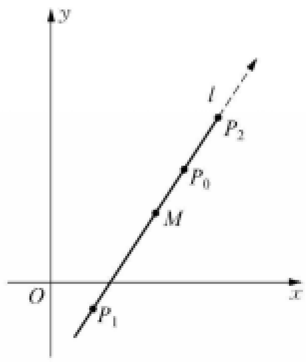


图 1.9

如图 1.9(虚线箭头表示直线的正方向)所示,设 P_1, P_2 是直线 l 上的两点,分别对应于 t_1 和 t_2($P_0P_1=t_1$, $P_0P_2=t_2$),则线段 P_1P_2 的中点 M 对应 $\frac{t_1+t_2}{2}$(中点坐标公式);线段 P_1P_2 的长为 $|P_1P_2|=|t_1-t_2|$. 这与《高二下教材》"坐标平面上的直线"一章中学习的中点坐标公式以及 x 轴上两点间的距离公式是完全一致的.

给出 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 两点确定直线 l,直线上的任意一点 P(除 P_1 和 P_2)可以表示成 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$,其中 $\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$, $\lambda\neq-1$(或 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$). 此时,若 P_1, P_2 分别对应于 t_1, t_2,则点 P 对应的参数为 $\frac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}$. 证明如下:

设 $P(x, y)$,则因为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{x_0+t_1\cos\alpha+\lambda(x_0+t_2\cos\alpha)}{1+\lambda}=x_0+\frac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}\cos\alpha,$$
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{y_0+t_1\sin\alpha+\lambda(y_0+t_2\sin\alpha)}{1+\lambda}=y_0+\frac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}\sin\alpha,$$

故点 P 对应的参数为 $t=\frac{t_1+\lambda t_2}{1+\lambda}$.

求解直线上的线段长度或中点问题时,使用直线的参数方程往往比较简便. 关于这一点,将于本章§1.4 中论述.

例 1.7 已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 有且仅有一个交点 Q,且与 x 轴、y 轴分别交于 R, S,求以线段 SR 为对角线的矩形 $ORPS$ 的一个顶点 P 的轨迹的参数方程与普通方程.

解 解法 1 由题意知直线 l 的斜率存在且非零,可设 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq0)$. 与椭圆方程联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 化简可得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$,则

$$\Delta=(2kma^2)^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2),$$

令 $\Delta=0$ 得

$$a^2k^2+b^2=m^2. \qquad ①$$

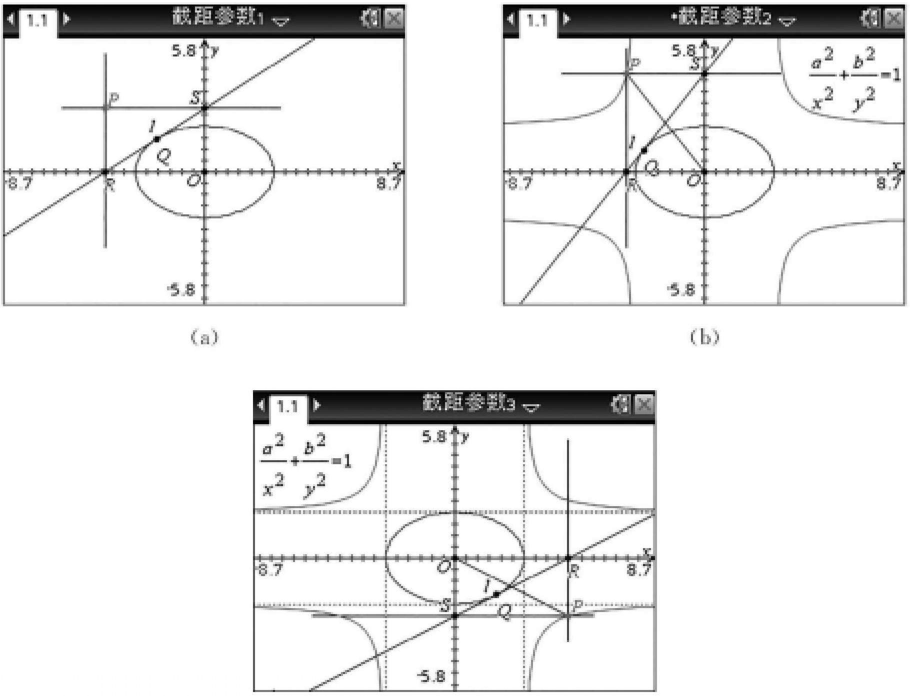
在直线方程 $y=kx+m$ 中,分别令 $y=0$, $x=0$,求得 $R\left(-\dfrac{m}{k},\ 0\right)$, $S(0,\ m)$. 如图 1.10(a) 所示,设顶点 P 的坐标为$(x,\ y)$,则

$$\begin{cases} x=-\dfrac{m}{k}, \\ y=m, \end{cases} \qquad ②$$

由①得 $k=\pm\sqrt{\dfrac{m^2-b^2}{a^2}}$,从而顶点 P 的轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{am\sqrt{m^2-b^2}}{m^2-b^2}, \\ y=m \end{cases} 和 \begin{cases} x=-\dfrac{am\sqrt{m^2-b^2}}{m^2-b^2}, \\ y=m, \end{cases} m<-b \text{ 或 } m>b.$$

由②解得 $\begin{cases} k=-\dfrac{y}{x}, \\ m=y, \end{cases}$ 代入 ① 式并化简整理得 $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=1$,即为所求顶点 P 的轨迹的普通方程,轨迹如图 1.10(b) 中分居 4 个象限的曲线组成.



(a) (b) (c)

图 1.10

在本例中,我们以直线 l 的纵截距 m 为参数,建立了矩形顶点 P 的轨迹的参数方程.

从图 1.10(c)可以看出，顶点 P 的轨迹所形成的曲线关于坐标原点、x 轴、y 轴均对称，$x=\pm a$，$y=\pm b$ 这 4 条直线为其渐近线.

轨迹方程 $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在形式上是如此的对称、和谐与美丽，作为一点探究，我们继续给出本例的另一种解法，并给出其在圆、双曲线、抛物线背景下的类似结论.

作为铺垫，我们先给出如下结论：

命题 1.1 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $Q(x_0,\ y_0)$ 的椭圆的切线(与椭圆只有一个公共点的直线称为椭圆的切线，这个公共点称为切点) 方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

证 (1) 当 $y_0=0$，即点 Q 的坐标为 $(\pm a,\ 0)$ 时，易知切线方程为 $x=\pm a$.

(2) 当 $y_0\neq 0$ 时，可设切线的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，由 $\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2ka^2tx+a^2(t^2-b^2)=0(\text{其中 } t=y_0-kx_0).$$

令 $\Delta=(2ka^2t)^2-4(b^2+a^2k^2)a^2(t^2-b^2)=0$，化简可得 $b^2+a^2k^2=t^2$，将 $t=y_0-kx_0$ 代入得

$$(a^2-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+b^2-y_0^2=0 \tag{1.2}$$

根据 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，可得方程(1.2) 的判别式为 $\Delta'=(2x_0y_0)^2-4(a^2-x_0^2)(b^2-y_0^2)=0$，从而解得 $k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. 故切线方程为 $y-y_0=\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)(x-x_0)$，据 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$ 化简可得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，即为所求证.

上述(2)中的推理在计算上有些繁琐. 熟悉导数的读者还可以这样求解：

在方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导得 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$，从而 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$，即得点 $Q(x_0,\ y_0)$ 处的切线的斜率为 $y'=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，故切线方程为 $y-y_0=\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)(x-x_0)$. 据 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，化简可得 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，即为所求证.

例 1.7 还有第 2 种解法，可以以椭圆上点的坐标作为参数.

解 解法 2 设切点为 $Q(x_0,\ y_0)$，由题意知 $x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$，由上述命题知切线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

分别令 $y=0$，$x=0$，求得 $R\left(\frac{a^2}{x_0},\ 0\right)$，$S\left(0,\ \frac{b^2}{y_0}\right)$. 设顶点 P 的坐标为 $(x,\ y)$，则 $\begin{cases} x=\frac{a^2}{x_0}, \\ y=\frac{b^2}{y_0} \end{cases}$

即为以坐标 x_0，y_0 表示的顶点 P 的轨迹的(双)参数方程，其中 x_0，y_0 满足 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$. 当