国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普 通 高 等 学 校 少 数 民 族 预 科 教 材

少数民族预科高等数学

主　编　张　虎

副主编　刘　学　樊　玲　王学严

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

前　　言

“微积分”是高等院校非数学类专业的一门基础课，可以为理工、经管和农医等专业的学生提供必要的应用基础以及培养他们分析问题和解决问题的能力，也可为文科学生培养严密的逻辑思辨能力，所以微积分为高等院校少数民族预科学生的必修课。

少数民族预科教育是高等教育的重要组成部分，也是高等教育的特殊层次，是高中到大学的过渡阶段，所以预科教育应体现它的衔接性。为了适应少数民族预科学生生源地教育水平的不断提高和高中课程改革的不断深入，以及目标院校对预科学生的不同要求，教育部民族教育司委托教育部高等学校少数民族预科教育教学与管理工作指导委员会（简称预指委）于 2015 年和 2016 年两次组织不同预科院校的数学教学专家，完成了一年制本科预科数学教学大纲的修订。本书的编写以新修订的大纲为依据，从民族预科数学教学的特点出发，由教育部普通高等学校少数民族预科教材编写组的教师编写，编写者都是预科一线教师且都具有 10 年以上预科数学教学的实践经验。

本书的编写力求突出以下特色。

(1) 注重高中和大学的衔接。第 1 章不仅回顾和复习了初等数学的知识，也补充了一些高中未讲而大学需要的基础知识，比如反三角函数等；附录（内容使用二维码链接）中也罗列了一些初等数学常用的公式，以方便学生学习时查找，从而充分体现预科“补预结合”的思想。

(2) 在体现知识连贯性的同时，强调逻辑思维的规律，突出教学重点，由易到难，循序渐进，实现通俗易懂。

(3) 针对预科学生的特点尽可能弱化对定理的推导，但注重数学思想的阐述，以保证数学知识的系统性、科学性和完整性，便于教师讲授和学生自学。

(4) 课后编排了大量的习题以满足不同层次学生的需求，每节后有习题，每章后有总习题和自测题，且书后附有参考答案，方便教与学，引入的是非题，可纠正学生对知识的错误理解和不当做法。

(5) 为了提高学生对数学源流的认识，每章后附有课外阅读，可加深学生对知识探索过程的理解，培养学生追求知识的精神。

书中标有“*”的内容超出了大纲的要求，为选学内容，教师可根据自己学生的程度和目标院校对学生的要求删去或者选学相关内容。

本书由张虎负责主编，刘学、樊玲、王学严为副主编；由张虎负责统稿，张虎、刘学、樊玲和王学严负责校订。

本书可供高等学校少数民族预科院校一年制和二年制学生使用以及理工类相关学生自学使用,也可供相关教师教学参考。

本书在编写过程中参考了大量国内优秀的高等数学教材,从中汲取了丰富的营养,在此对作者们表示深深的感谢;本书的编写得到了北京邮电大学民族教育学院和北京邮电大学出版社的大力支持,得到了北京邮电大学民族教育学院信息数理中心老师们的热情帮助,编者在此对他们表示衷心的感谢。

由于编者学识水平有限,编写时间也比较仓促,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者提出宝贵的意见和建议。

编　者

2018 年 5 月

目　　录

第1章　函　　数

数学是研究数(数量关系)和形(空间形式)的科学,研究常量间的代数运算和规则几何形体内部及相互间的关系即为中学所学的初等代数和初等几何,我们统称为初等数学。初等数学研究的主要对象是常量,即在某一运动变化过程中相对保持不变的量,也可以看作有固定取值的量,所以初等数学也可以称为常量数学,它是建立在有限思想上并采用静止的观点来研究问题;高等数学研究的主要对象是变量,即在某一运动变化过程中不断变化,可以取不同数值的量,因此高等数学也可以称为变量数学,它是建立在无限的思想上,并采用运动和辩证的观点来研究问题。

函数是数学最基本的概念,也是微积分研究的主要对象,它反映的是变量之间的相互依赖关系。本章先介绍集合的一些概念和性质,由此引入区间和邻域;然后对函数的概念和性质进行讨论,并对基本初等函数的性质进行概括和总结,给出初等函数的概念;最后我们对隐函数、参数方程和极坐标方程函数给予简单的介绍,为后续微积分的学习打下基础。所以,本章是对一些初等数学知识的复习和总结。

1.1　集合与区间

学习目标与要求

(1) 掌握集合的运算;

(2) 了解逻辑符号的含义;

(3) 掌握区间和邻域的表示。

1.1.1　集合及其运算

1. 集合

集合是现代数学的基础,是引入函数不可或缺的概念。所谓集合,指的是具有某种特定性质的事物或对象的全体;而构成集合的个别事物或者对象则称为集合的**元素**。通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素。

给定一个集合,集合中的元素就定了。注意,组成集合的元素既可以是数,也可以是所研究的任何对象。如果 a 是集合 A 中的元素,则称 a 属于 A,记为 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 中的元素,则称 a 不属于 A,记为 $a\notin A$。由有限个元素组成的集合称为**有限集**;由无穷多个元素所组成的集合则称为**无限集**;不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$。

集合的表示方法通常有两种:一种是列举法;另一种是描述法。列举法就是把集合的全体元素一一列出。例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

又比如自然数集可以表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$$

描述法是通过描述集合中元素所具有的特定性质来表示集合，可以表示为

$$B=\{x \mid x \text{ 所具有的性质}\}$$

例如，满足方程 $x^2-3=0$ 的解集所组成的集合 B 可表示为

$$B=\{x \mid x^2-3=0\}$$

有时一个集合可以用不同的表示方法表示，但不管用什么方法表示，只要集合中的元素是一样的，就表示是同一个集合。例如，集合 $\{x \mid x^2-3=0\}$ 与集合 $\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ 表示的是同一个集合。高等数学研究的对象为函数，用到的集合主要是数集。全体非负整数即自然数构成的集合称为自然数集，记作 $\mathbf{N}$；全体整数构成的集合称为整数集，记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数构成的集合称为有理数集，记作 $\mathbf{Q}$；全体实数构成的集合称为实数集，记作 $\mathbf{R}$。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作 $A\subset B$，读作"A 包含于 B"，也可记作 $B\supset A$，读作"B 包含 A"。空集为任何集合的子集。自然数集、整数集、有理数集和实数集有下面的包含关系：

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$$

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

2. 集合的运算

集合的基本运算有三种：并集、交集和差集。

设有集合 A 和 B，由所有属于 A 或 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

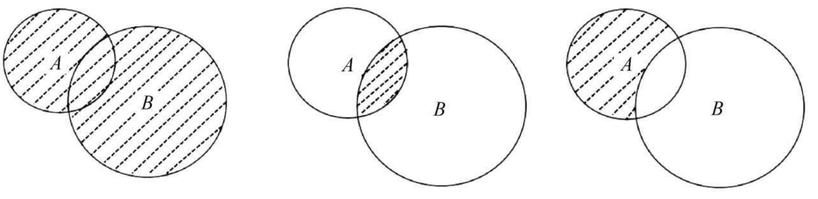
由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**差集**，记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

两个集合的并集、交集和差集如图 1.1 所示的阴影部分。



(a) $A\cup B$　(b) $A\cap B$　(c) $A\setminus B$

图 1.1　并集、交集和差集

显然有如下的关系。

$$A\setminus B\subset A\subset A\cup B,\ A\cap B\subset A,\ A\cap B\subset B$$

集合的运算规律如下。

设 A,B,C 为三个任意的集合，则有下列的运算规律成立。

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C)$。

(4) 幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

(5) 吸收率：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$。

1.1.2　逻辑符号

逻辑学是研究思维形式和思维规律的科学，也就是研究推理的科学。数学就是一门推理科学，所以在对数学概念和命题的论述中，经常会使用一些逻辑符号。以下介绍四种在高等数学中常用的逻辑符号。

(1) 符号“$\forall$”表示“对任意给定的(for any given)”，它是 Any 这个英语单词首字母的倒写。

(2) 符号“$\exists$”表示“存在(exist)”，它是 Exist 这个英语单词首字母的反写。

例如，命题“对任意给定的实数 x，存在另一个实数 y，使得 $x+y=0$”。可用逻辑符号表述为：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\exists y\in\mathbf{R}$，使得 $x+y=0$。

(3) 符号“$\Rightarrow$”表示“蕴含着”或者“推导出”。

例如，命题“若 $a>b$，$b>c$，则有 $a>c$”，用逻辑符号可以表述为

$$a>b,b>c\Rightarrow a>c$$

(4) 符号“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”或者“充要条件是”。

例如，命题“$\{x\mid x^2-2=0\}$等价于$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$”，用逻辑符号可以表述为

$$\{x\mid x^2-2=0\}\Leftrightarrow\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$$

1.1.3　区间和邻域

1.区间

区间是微积分中最常见的一类数集，它可以看作数轴上的点集。设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则开区间可以用数集$\{x\mid a<x<b\}$表示，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点，它们不属于开区间(a,b)的点，即 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$。闭区间可以用数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$表示，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点，它们属于闭区间$[a,b]$的点，即 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$。同样可以定义半开半闭区间为

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

数 $b-a$ 称为这几种区间的长度，上述区间都称为有限区间，它们在数轴上可用有限长度的线段来表示，如图 1.2 所示。除了有限区间还有无限区间。引进记号∞(读作无穷大)，$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)，则无限区间可表示为

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$

上述无限区间在数轴上可用无限长度的半直线来表示，如图 1.3 所示。全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可表示为$(-\infty,+\infty)$，它是无限的开区间。区间可用大写字母 I 来表示，它是英语单词 Interval(区间)的首字母，这在数学里是常见的表示方法。

图 1.2　有限区间

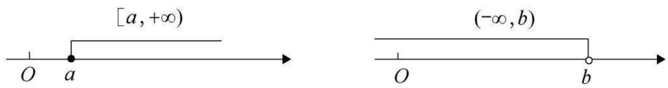


图 1.3　无限区间

2.邻域

邻域是一种特殊的区间，也是微积分中经常用到的一个概念。设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$。数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

a 为 δ 邻域的中心，δ 为邻域的半径。由于 $|x-a|<\delta$ 可表示为

$$a-\delta<x<a+\delta$$

因此，δ 邻域又可表示为

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

所以 δ 邻域是以点 a 为中心，$a-\delta$ 和 $a+\delta$ 分别为左右端点，长度为 2δ 的开区间，如图 1.4 所示，它表示数轴上与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体。

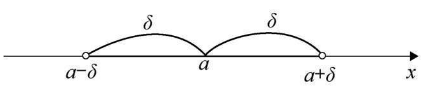


图 1.4　邻域

有时根据要求需要把邻域中心点 a 去掉，即 $x\neq a$，去掉中心的 δ 邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，可表示为

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

若不强调邻域半径大小，邻域和去心邻域可分别简记为 $U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$。有时需要分别考查点 a 两侧的小区间，将区间$(a-\delta,a]$和$[a,a+\delta)$分别称为点 a 的左 δ 邻域和右 δ 邻域，相应地也有点 a 的左去心 δ 邻域和右去心 δ 邻域，它们分别可表示为$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$。

习题 1.1

1. 下列命题正确的有(　　)。

(1) 很小的实数可以构成集合。

(2) 集合$\{y \mid y=x^2-1\}$与集合$\{(x,y) \mid y=x^2-1\}$是同一个集合。

(3) 由 $1,\dfrac{3}{2},\dfrac{6}{4},\left|-\dfrac{1}{2}\right|,0.5$ 组成的集合有 5 个元素。

(4) 集合$\{(x,y) \mid xy\leqslant 0,x,y\in\mathbf{R}\}$是指第二和第四象限内的点集。

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 若 $A=\{x \mid 0<x<\sqrt{2}\}$，$B=\{x \mid 1 \leqslant x<\sqrt{2}\}$，则 $A \cup B=($ $)$。

A. $\{x \mid x \leqslant 0\}$　　B. $\{x \mid x \geqslant 2\}$　　C. $\{0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$　　D. $\{x \mid 0<x<2\}$

3. 如果集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+1=0\}$ 中只有一个元素，则 a 的值是(　　)。

A. 0　　B. 0 或 1　　C. 1　　D. 不能确定

4. 已知集合 $A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，若 $A \cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值。

5. 用区间表示下列不等式的解。

(1) $|x+3|<5$　　(2) $1 \leqslant |x| \leqslant 3$

6. 将下列区间表示为邻域。

(1) $-5<x<5$　　(2) $0<|x-1|<3$　　(3) $-3<x<5$

1.2 函数的概念及其基本性质

学习目标与要求

(1) 理解映射和函数的概念；

(2) 掌握函数的基本性质。

1.2.1 映射

定义 1.2.1 设 A, B 是两个任意的非空集合，如果按照某种确定的法则 f，使得对于集合 A 中的任何一个元素 x，在集合 B 中都有唯一的元素 y 与它相对应，则称 f 为从集合 A 到集合 B 的一个映射，如图 1.5 所示，记作：

$$f: A \to B, \text{或 } f: x \to y=f(x), x \in A$$

式中，元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的**像**，而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个**原像**。集合 A 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f)$，即 $D(f)=A$；A 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 $R(f)$ 或 $f(A)$，即

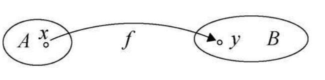


图 1.5　映射

$$R(f)=f(A)=\{y \mid y=f(x), x \in A\}$$

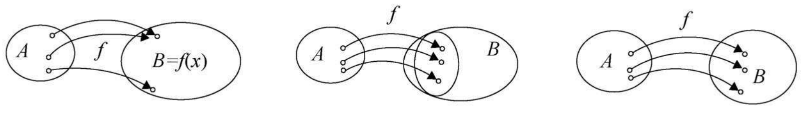
从映射的定义可知，构成映射必须具备三个要素：集合 A，即定义域 $D(f)=A$；集合 B，即值域的范围 $R(f) \subset B$；对应法则 f，即确定集合 A 中所有元素和 B 中部分或所有元素之间的关系。

集合 A 中的任意一个元素 x 一定有对应于集合 B 中的像 y，且 y 是唯一的；而集合 B 中的任意一个元素 y 不一定有对应于集合 A 中的原像 x，有也不一定是唯一的，即 $R(f)$ 是 B 的子集[$R(f) \subset B$]，不一定有 $R(f)=B$。所以，一对一和多对一是映射，一对多不是映射。

另外，要注意映射中的集合可以是点集或者数集，也可以是其他集合，这也是映射和下面将要讲到的函数的一个区别。

设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射，若 $R(f)=B$，即集合 B 中的任一元素 y 都是集合 A 中某个或某几个元素与之对应的像，则称 f 为集合 A 到 B 的**满射**如图 1.6(a)所示；若对 A 中

任意两个不同的元素 x_1,x_2，即 $x_1\neq x_2$，与它们对应的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为集合 A 到 B 的**单射**如图 1.6(b)所示；若 f 既是单射；又是满射，则称 f 为 A 到 B 的**一一映射或双射**如图 1.6(c)所示。



(a) 满射　　(b) 单射　　(c) 一一映射

图 1.6　函数的映射

例 1.2.1　设 $A=\{-1,1,-2,2,-3,3,-4,4\}$，$B=\{1,4,9,16,25\}$，$f$ 表示求平方，f 为从 A 到 B 的映射，由于 A 中的两个元素对应 B 中的一个元素，比如 -3 和 3 对应的像都为 9，且 B 中的元素 25 没有与之对应的原像，所以 f 既不是单射也不是满射。

例 1.2.2　设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$B=\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$，$f$ 表示单位圆周上的任意一点向 y 轴投影，f 的定义域 $D(f)=A$，值域 $R(f)=B$，由于圆周上任意一点向 y 轴的投影都落在了区间 $[-1,1]$ 上，所以 f 是满射。

例 1.2.3　设 A 是由某校某班全体学生构成的集合，B 是由该校所有学生学号构成的集合，f 是学号编排的方法。由于一个学生只能对应一个学号，且一个班级的学生不能把全校学生的学号都对应完，所以 f 是单射但不是满射。

例 1.2.4　设 $A=R$，$B=\{y\mid y>0\}$，f 表示求 e 指数值，即 $y=f(x)=\mathrm{e}^x$，由于 B 中的任一元素在 A 中只有一个原像，且 A 中的所有元素对应 B 中的所有元素，所以 f 是一一映射。

1.2.2　函数

1. 常量与变量

在人类的科学研究和生产实践中，常常会遇到各种不同的量。例如，长度、面积、体积、重量、温度、电压、电流，等等。在某一运动变化过程中相对保持不变的量称为**常量**，可以看作有固定取值的量，常用字母为 a,b,c,d,e,h,i,k,l,m,n 等来表示。在某一运动变化过程中不断变化，可以取不同数值的量称为**变量**，常用字母为 x,y,z,u,v,w,s,t 等来表示。例如，家庭用电的电压为 220 V，可以看作常量；一天中温度随时间在不断的变化，温度就是一个变量。

常量和变量是相对的，这在高等数学中有很好的体现。常量和变量是数学中一对基本矛盾，也是区别初等数学和高等数学的重要特征之一。常量可在数轴上用定点来表示，而变量在数轴上是以动点来表示的，所以常量可看作变量的特殊情况。

2. 函数

在科学研究、生产实践和社会活动的过程中，常常碰到的是有几个量同时都在变化，这几个变量并不是孤立地在变，而是按照一定的规律相互联系着。其中一个量变化时，另外的量也在跟着变化；前者的值一确定，后者的值也就随之而唯一地确定。下面我们先看几个例子。

例 1.2.5　若已知圆的半径为 r，则圆的面积 A 就确定了，因此圆的面积 A 与半径 r 存在着确定的对应关系。这种对应关系可表示为

$$A=\pi r^2$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个值时，由上式就可以确定面积 A 的相应数值。

例 1.2.6　某城市 11 月某天中的气温变化，如表 1.1 所示，从表中可以看出，一天中的气温随时间在不断变化，虽然没有一个温度随时间变化的公式，但给定的时间对应着一个确定的温度。

表 1.1　某城市 11 月份某天中的气温变化

时刻	2:00	4:00	6:00	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00	20:00	22:00	24:00
温度/℃	5	4	4	6	9	12	14	15	9	9	10	6

例 1.2.7　中国人口在 1980—2016 年间出生率的变化情况，如图 1.7 所示。其中横坐标表示年份，纵坐标表示出生率，从图中可以看出人口出生率随年份在不断的变化，1987 年的人口出生率最高，此后出生率整体趋势在下降。该图形反映了出生率与年份的对应关系。

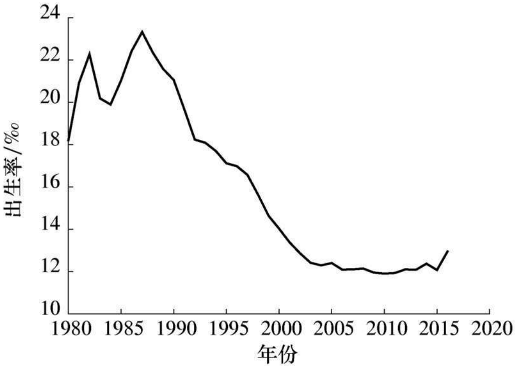


图 1.7　1980—2016 出生率的变化情况

在例 1.2.5～例 1.2.7 中，不管是公式、表格还是图形，都表示的是两个变量之间的某种对应关系，这种对应关系就是函数关系。下面给出函数的定义。

定义 1.2.2　设 x,y 是两个变量，D 是给定的一个非空数集（$D\subseteq\mathbf{R}$）。如果存在某个确定的法则 f，使得对于任意一个 $x\in D$，都有唯一确定的数 y 与之对应，那么就称这个对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**，记作 $y=f(x),x\in D$。其中 x 称为函数 f 的自变量，y 称为函数 f 的**因变量**，D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**；与 x 的值相对应的 y 的值称为函数值，全体函数值组成的集合 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**。函数符号 $y=f(x)$ 表示"y 是 x 的函数"，有时简记作函数 $f(x)$。

函数的符号 f 也可用其他字母来表示，如 φ,ψ 等。相应地，函数可记作 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ 等；有时还可直接利用因变量的符号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$。这时字母 y 既表示因变量，又表示函数。

从函数的定义可以看出，函数概念有三个要素，即定义域、值域和对应法则。但判断两个函数是否为同一个函数时，我们只需要看这两个函数的定义域和对应法则是否相同就可以了，这是因为一个函数的定义域和对应法则确定后，函数的值域就确定了。如果两个函数的定义域和对应法则相同，那么这两个函数就是同一个函数，否则就不是同一个函数。例如，$y=\sqrt{x^2}$ 和 $y=|x|$ 就为同一个函数。

许多函数是由解析表达式给出的，没有明确给出函数的定义域，在这种情况下，函数的定义域是指使函数表达式有意义的一切实数所组成的集合，这种定义域称为函数的**自然定义域**。

例 1.2.8 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域。

解 要使表达式 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有意义，必须有 $1-x^2\geqslant 0$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，所以函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为闭区间 $[-1,1]$，$[-1,1]$ 为函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的自然定义域。

在实际问题中，函数的定义域还要受到实际条件的约束，所以应根据问题的实际意义来确定。例如，圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$；自由落体下落的路程 s 和下落时间 t 的函数关系为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$（g 为重力加速度），若其落到地面所需的时间为 T，那么这个函数的定义域为 $[0,T]$。

函数的表示方法一般有解析法即算式表示法（如例 1.2.5）、列表法（如例 1.2.6）和图像法（如例 1.2.7）。这三种方法各有特点，解析法简单明了，能够准确地反映整个变化过程中自变量与函数之间的依赖关系，但有些实际问题中的函数关系不能用解析式表示；列表法一目了然，使用起来方便，但列出的对应值是有限的，不易看出自变量与函数之间的对应规律；图像法形象直观，但只能近似地表达两个变量之间的函数关系。三种方法各有优缺点，所以可以结合使用。

1.2.3 函数的基本性质

1.函数的有界性

定义 1.2.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，且有区间 $I\subset D$。如果存在正数 M，使任意的 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，$y=f(x)$ 称为**有界函数**。

如果这样的 M 不存在，那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界，即若对任意给定的 M，总存在 $x\in I$，使 $|f(x)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 I 上无界。

同样我们还可以定义函数的上界和下界。如果存在常数 $M_1\in\mathbf{R}$，使得对任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M_1$，则称 $f(x)$ 在 I 上有上界，M_1 是 $f(x)$ 的一个上界；如果存在常数 $M_2\in\mathbf{R}$，使得对任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\geqslant M_2$，则称 $f(x)$ 在 I 上有下界，M_2 是 $f(x)$ 的一个下界。**$f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是：既有上界又有下界。**

函数的有界分为函数在定义域上的有界和函数在定义区间上的有界。例如，函数 $y=\sin x$，因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，即 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立），所以 $y=\sin x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上既有上界又有下界，是有界函数，且为定义域上的有界函数。

又如函数 $y=\ln x$ 在定义域 $x\in(0,+\infty)$ 上是无界的，但它在区间 $[1,5]$ 上是有界的，因为取 $M=\ln 5$，对任意的 $x\in[1,5]$，都有 $|\ln x|\leqslant\ln 5$ 成立，且为定义区间上的有界函数。

所以，在讨论函数的有界性时，应指明函数所在的区间。一个函数有可能在定义域上有界，也有可能仅在定义区间上有界。

2.函数的单调性

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于任意两点 $x_1,x_2\in I$，当

$x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加的**；如果恒有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少的**。单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**。

例如，函数 $f(x)=e^x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的，函数 $f(x)=e^{-x}$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调减少的，如图 1.8 所示。函数 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上不具备单调性，但在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，如图 1.9 所示。

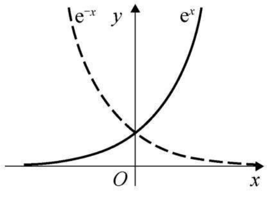


图 1.8　e 指数函数

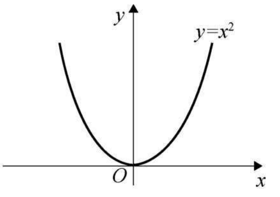


图 1.9　二次幂函数

所以，在讨论函数的单调性时也必须强调自变量所在的区间。

3.函数的奇偶性

定义 1.2.5　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$，则必$-x\in D$)。如果对于任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，总有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$为**奇函数**。

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，其图形关于 y 轴对称；$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 是奇函数，其图形关于原点对称，如图 1.10 所示。$f(x)=\sin x+x^2$ 既非奇函数，又非偶函数。

注意： 若 $f(x)$在 $x=0$ 有定义，则当 $f(x)$为奇函数时，必有 $f(0)=0$，如图 1.11 所示。函数的奇偶性描述了函数的图形关于原点的中心对称性质或关于 y 轴的轴对称性质，所以，对于具有奇偶性质的函数，只需考虑 $x\geqslant 0$ 时的情形即可。

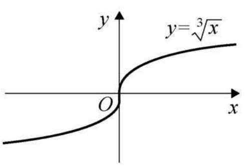


图 1.10　函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 的对称性

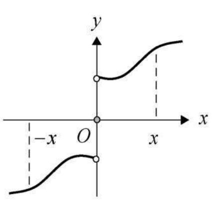


图 1.11　奇函数的对称性

4.函数的周期性

定义 1.2.6　对于函数 $f(x)$，如果存在一个正数 l，使得对于任意的 $x\in D$，且$x\pm l\in D$，

若

$$f(x \pm l)=f(x)$$

则称 $f(x)$为**周期函数**,称 l 为 $f(x)$的**周期**(通常指最小正周期,也即基本周期)。例如,函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$,$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数。

根据周期函数图形的特点,常常只要考查它在一个周期内的性态就可以了。

注意:并不是所有的周期函数都能找到最小正周期,比如常数函数 $f(x)=C$,每一个正实数都是它的周期,所以不存在最小正周期;再比如后面将要讲到的狄利克雷函数,每一个正有理数都是它的周期,但是没有最小正周期。

习题 1.2

1. 若函数 $f(x)=|x|$,$-2<x<2$,则 $f(x-1)$的值域为(　　)。

A. $[0,2)$　　B. $[0,3)$　　C. $[0,2]$　　D. $[0,3]$

2. 函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{9}{1+|x|}$是(　　)。

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 既是奇函数又是偶函数　　D. 非奇非偶函数

3. 设函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$为奇函数,$f(1)=\dfrac{1}{2}$,$f(x+2)=f(x)+f(2)$则 $f(5)=$(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{5}{2}$　　D. 5

4. 如果奇函数 $f(x)$在区间$[3,7]$上是增函数且最小值为 5,那么 $f(x)$在区间$[-7,-3]$上(　　)。

A. 增函数且最大值为-5　　B. 增函数且最小值为-5

C. 减函数且最小值为-5　　D. 减函数且最大值为-5

5. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(\sin x)$的定义域为________。

6. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$　　(2) $y=\sqrt{2-x}+\ln(\ln x)$

(3) $y=\sin\sqrt{x}$　　(4) $y=\arcsin(x-3)$

(5) $y=e^{\frac{1}{x}}$　　(6) $y=\ln(x+1)$

7. 下列四组函数中,$f(x)$和 $g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2$,$g(x)=2\ln x$　　(2) $f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=1$,$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$　　(4) $f(x)=x$,$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$

8. 判定下列函数的奇偶性。

(1) $y=x^2(1-x^2)$　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=x(x-1)(x+1)$　　(4) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$

9. 设 $f(x)$是定义在$[-l,l]$上的任意函数,证明:$f(x)+f(-x)$是偶函数,$f(x)-f(-x)$是奇函数。

10. 下列函数是否是周期函数？请指出周期函数的周期。

(1) $y=|\sin x|$ (2) $y=1+\sin \pi x$

(3) $y=x\tan x$ (4) $y=\cos^2 x$

1.3 反函数与复合函数

学习目标与要求

(1) 理解反函数和复合函数的概念；

(2) 会求一些简单函数的反函数；

(3) 掌握复合函数的运算；

(4) 会求函数的定义域和值域。

1.3.1 反函数

函数 $y=f(x)$ 描述的是两个变量之间的对应关系，一般选 x 为自变量，y 为因变量，但自变量和因变量之间的对应关系是相对的。例如，圆面积公式 $S=\pi r^2(r>0)$，若已知圆的半径 r 而求圆的面积 S，则半径 r 是自变量而面积 S 是因变量。有时需要反过来考虑问题，即已知圆的面积 S 而求圆的半径 r，可从上式解得 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}(S\geqslant 0)$，此时圆的面积 S 为自变量而半径 r 为因变量。在数学上，一般把一个函数的自变量和因变量进行对换后所能得到的新函数称为原来函数的反函数。如果将 $S=\pi r^2(r>0)$ 视为原函数，则 $r=\sqrt{\dfrac{S}{\pi}}(S\geqslant 0)$ 即为反函数。下面给出反函数的定义。

定义 1.3.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是 $W=f(D)$。若对任意的 $y\in W$，都有唯一的 $x(x\in D)$ 与之对应，且满足 $f(x)=y$，则这个对应法则定义了在 W 上的一个新函数，这个新函数称为 $y=f(x)$ 在 D 上的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),y\in W$$

相对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**。反函数表达式 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 表示因变量，y 表示自变量，而一般习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以，在讨论反函数时常常将反函数表达式中的字母 x 和 y 对换，改写为 $y=f^{-1}(x)$。故以后提到反函数都采用这种形式，反函数的定义域为 $W=f(D)$，值域为 D。从反函数的定义可知，直接函数和反函数的定义域和值域互换，且直接函数和反函数是相对而言的，即可以把直接函数看成反函数，那么反函数就成为直接函数。

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形与函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.12 所示，点 $P(a,b)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，则点 $Q(b,a)$ 一定在曲线 $y=f^{-1}(x)$ 上，而点 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 对称。例如，指数函数 $y=\mathrm{e}^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 与对数函数 $y=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$ 互为反函数，其图形关于直线 $y=x$ 对称。

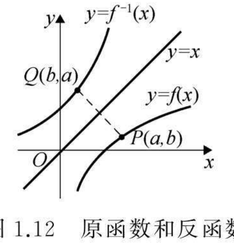


图 1.12 原函数和反函数的关系

根据直接函数和反函数的定义可知，并不是每个函数都有反函数，只有当函数 $y=f(x)$ 为一一对应时才有反函数。