

高等教育“十三五”应用型人才培养规划教材

大学数学

邓敏英 胡芳 / 主编



 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等教育“十三五”应用型人才培养规划教材

大学数学

主 编 邓敏英 胡 芳
副主编 陈 芸 洪 欢
主 审 何 穗

内 容 提 要

为了适应应用型、实践型人才目标的要求,以“弱化证明、掌握概念、强化应用”为指导思想,遵循“以应用为目的,以必须够用为度”的原则编写本书.本书内容共分六章:一至三章内容重点培养学生的数学素养,奠定必要的数学基础;四至五章为应用数学,体现数学与专业接口,为专业服务,提高数学应用能力;六章内容体现数学应用,拓展学生思维,提高学习数学的积极性.本书特别适用于计算机应用、计算机网络、建筑工程技术、工程造价、机械电子、电子商务、财务管理、物流管理、市场营销等专业的专科学学生.

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

大学数学 / 邓敏英, 胡芳主编. — 北京: 北京理工大学出版社, 2019. 12 (2020. 1 重印)

ISBN 978 - 7 - 5682 - 8067 - 9

I. ①大… II. ①邓… ②胡… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2020) 第 005516 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 13.75

字 数 / 330 千字

版 次 / 2019 年 12 月第 1 版 2020 年 1 月第 2 次印刷

定 价 / 42.00 元

责任编辑 / 多海鹏

文案编辑 / 孟祥雪

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前 言

为了适应应用型、实践型人才目标的要求，我们在认真总结、分析并吸收同类高等院校教学改革经验的基础上，遵循“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，结合我们多年从事高等数学方面的科学研究与教学改革经验及同类教材的发展趋势，针对专科各理工专业及经济类、管理类专业所需数学知识编写完成本书。本书是适宜高等专科学校学生学习大学数学课程的教材。

本书在编写时，力求应用性强，应用面广，语言简单通顺，加大信息量，渗透现代数学思想。本书注意从实际问题中引入概念，注意把握好理论推导的深度，注重基本运算能力、分析问题和解决问题的培养，贯彻理论联系实际的原则，深入浅出，通俗易懂，便于教师讲授，学生学习。

本书内容共分三个部分共六章。第一部分：基础数学，重点培养学生的数学素养，奠定必要的数学基础，包括第一、二、三章内容。第二部分：应用数学，体现数学与专业接口，为专业服务，提高数学应用能力，包括第四、五章内容。第三部分：公共选修课程，体现数学应用，拓展学生思维，提高学习数学的积极性，包括第六章内容。

本书由邓敏英、胡芳任主编，陈芸、洪欢任副主编。第一章由洪欢编写，第二、三、六章由邓敏英编写，第四章由陈芸编写，第五章由胡芳编写。邓敏英统稿全书。何穗在本书的总体设计和规划方面提出了很多富有建设性的意见，并审阅全部书稿。

在编写过程中，我们得到武汉生物工程学院教务处及计算机信息工程学院领导老师的大力支持与协作，同时还得到北京理工大学出版社的指导和帮助，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中不妥与错误之处在所难免，敬请专家、同人和广大读者批评指正，以便我们修订时提高。

编 者

第一章 函数与极限	(1)
1.1 函数	(1)
1.1.1 实数	(1)
1.1.2 函数的概念	(2)
1.1.3 函数的性质	(4)
1.1.4 复合函数和反函数	(5)
1.1.5 初等函数	(6)
1.1.6 常用的经济函数	(8)
习题 1.1	(10)
1.2 极限的概念	(11)
1.2.1 数列的极限	(11)
1.2.2 函数的极限	(12)
习题 1.2	(14)
1.3 无穷大和无穷小	(15)
1.3.1 无穷大量	(15)
1.3.2 无穷小量	(15)
1.3.3 无穷大与无穷小的关系	(18)
习题 1.3	(18)
1.4 极限的运算法则	(19)
1.4.1 极限的四则运算法则	(19)
1.4.2 极限存在的两个准则和两个重要极限	(21)
1.4.3 极限在经济中的应用	(22)
习题 1.4	(23)
1.5 函数的连续性	(23)
1.5.1 连续函数的概念	(24)

1.5.2	连续函数的基本性质	(25)
1.5.3	函数的间断点及其分类	(26)
1.5.4	闭区间上连续函数的性质	(27)
习题 1.5		(29)
阅读材料 (一)		(29)
测试题一		(31)
第二章	导数及其应用	(33)
2.1	导数的概念	(33)
2.1.1	引例	(33)
2.1.2	导数的定义	(35)
2.1.3	导数的几何意义	(37)
2.1.4	可导与连续的关系	(38)
习题 2.1		(38)
2.2	导数的计算	(38)
2.2.1	导数基本公式	(39)
2.2.2	导数的四则运算法则	(39)
2.2.3	复合函数的导数	(40)
2.2.4	隐函数的导数	(41)
2.2.5	高阶导数	(43)
习题 2.2		(44)
2.3	微分	(45)
2.3.1	微分的定义	(45)
2.3.2	微分的运算法则	(47)
2.3.3	微分在近似计算中的应用	(48)
习题 2.3		(49)
2.4	微分中值定理	(50)
2.4.1	罗尔 (Rolle) 中值定理	(50)
2.4.2	拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	(51)
习题 2.4		(52)
2.5	洛必达法则	(52)
2.5.1	$\frac{0}{0}$ 型未定式	(52)
2.5.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	(53)
2.5.3	其他未定式	(54)
习题 2.5		(55)
2.6	导数在研究函数形态中的应用	(55)
2.6.1	函数的单调性	(55)
2.6.2	函数的极值	(57)

2.6.3 函数的最值	(60)
2.6.4 函数的凹凸性	(62)
习题 2.6	(63)
阅读材料 (二)	(64)
测试题二	(64)
第三章 积分及其应用	(67)
3.1 不定积分的概念	(67)
3.1.1 原函数与不定积分	(67)
3.1.2 不定积分的基本公式和运算	(68)
习题 3.1	(70)
3.2 不定积分的积分方法	(71)
3.2.1 换元积分法	(71)
3.2.2 分部积分法	(74)
习题 3.2	(76)
3.3 定积分的概念与性质	(77)
3.3.1 引例	(77)
3.3.2 定积分的定义	(78)
3.3.3 定积分的几何意义	(79)
3.3.4 定积分的性质	(80)
习题 3.3	(82)
3.4 定积分的计算	(82)
3.4.1 微积分基本公式	(82)
3.4.2 换元积分法	(84)
3.4.3 分部积分法	(85)
习题 3.4	(86)
3.5 无穷区间上的广义积分	(87)
习题 3.5	(89)
3.6 定积分的应用	(89)
3.6.1 定积分的微元法	(89)
3.6.2 定积分在几何上的应用	(90)
3.6.3 定积分在物理中的应用	(93)
习题 3.6	(93)
阅读材料 (三)	(94)
测试题三	(95)
第四章 线性代数及其应用	(98)
4.1 行列式的概念	(98)
4.1.1 二阶行列式	(98)

4.1.2	三阶行列式	(100)
4.1.3	n 阶行列式	(101)
习题 4.1		(103)
4.2	行列式的性质	(104)
习题 4.2		(108)
4.3	克莱姆法则	(109)
习题 4.3		(112)
4.4	矩阵的概念及运算	(113)
4.4.1	矩阵定义	(113)
4.4.2	矩阵的运算	(116)
习题 4.4		(122)
4.5	矩阵的初等变换	(123)
4.5.1	初等变换的概念	(123)
4.5.2	矩阵的秩	(125)
习题 4.5		(126)
4.6	逆矩阵	(126)
4.6.1	逆矩阵的定义	(127)
4.6.2	逆矩阵的求法	(129)
习题 4.6		(130)
4.7	线性方程组	(131)
4.7.1	高斯消元法	(131)
4.7.2	非齐次线性方程组的相容性	(133)
4.7.3	齐次线性方程组的相容性	(135)
习题 4.7		(136)
	阅读材料 (四)	(137)
测试题四		(137)
第五章	概率论	(141)
5.1	随机事件	(141)
5.1.1	随机事件	(141)
5.1.2	随机事件的关系运算	(142)
习题 5.1		(144)
5.2	随机事件的概率	(145)
5.2.1	概率的统计定义	(145)
5.2.2	概率的古典定义	(146)
5.2.3	概率的加法公式	(148)
5.2.4	条件概率	(148)
5.2.5	概率的乘法公式	(150)
5.2.6	全概率公式	(150)

5.2.7 事件的独立性	(151)
习题 5.2	(152)
5.3 随机变量及其分布	(153)
5.3.1 随机变量及其分布函数	(154)
5.3.2 离散型随机变量及其分布	(154)
5.3.3 连续型随机变量及其分布	(157)
习题 5.3	(162)
阅读材料 (五)	(162)
测试题五	(163)
第六章 MATLAB 软件简介及其应用	(166)
6.1 MATLAB 简介	(166)
6.2 MATLAB 基本用法	(168)
6.3 MATLAB 常见符号运算	(170)
6.4 MATLAB 作图	(174)
附录 I 常用数学公式	(185)
附录 II 积分表	(188)
习题答案	(197)
参考答案	(209)

函数与极限

函数是微积分学研究的主要对象，极限概念是微积分学一个最基本、最重要的概念。一方面，它是建立微积分学的基础；另一方面，极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终。

本章将简要介绍实数，函数的概念及其性质，函数的复合与初等函数，常用的经济函数，然后着重讨论函数的极限和函数的连续等问题，为进一步学习微积分知识奠定基础。

1.1 函数

1.1.1 实数

在中学阶段，我们已经学习了实数的基本知识，本小节将复习并加深实数的相关知识，为学习微积分打基础。

1. 绝对值

实数 x 的绝对值定义为：
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 表示数轴上点 x 到原点 O 的距离。

绝对值的主要性质有：

- (1) $-|x| \leq x \leq |x|$;
- (2) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a (a > 0)$;
- (3) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ 或 $x \leq -a (a > 0)$;
- (4) $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- (5) $|x - y| \geq |x| - |y|$;
- (6) $|xy| = |x| |y|$;

$$(7) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0).$$

2. 区间

在微积分中, 区间是最常用的一类实数集合, 设 a 与 b 为两个实数, 且 $a < b$, 则

$(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为开区间;

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, 称为闭区间;

$(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$, $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$ 分别称为左开右闭区间、左闭右开区间, 通称它们为半开区间.

除以上有限区间外, 还有下列无限区间:

$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$;

$(a, +\infty) = \{x | x > a, x \in \mathbf{R}\}$; $[a, +\infty) = \{x | x \geq a, x \in \mathbf{R}\}$;

$(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$; $(-\infty, b] = \{x | x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$.

3. 邻域

邻域是微积分研究中的一个重要概念. 数学中不少概念, 除原始概念外, 都需要借助于其他概念来定义, 邻域概念便是这种由概念串(点、距离、实数、集合等)所定义的概念.

设 x_0 , δ 为两个实数且 $\delta > 0$, 则 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 它表示在实数轴上与点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合, 称 x_0 为该邻域的中心, δ 为该邻域的半径, 如图 1-1 所示.

将邻域 $U(x_0, \delta)$ 的中心 x_0 去掉所得数集

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$, 如图 1-2 所示.

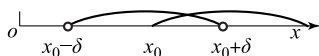


图 1-1

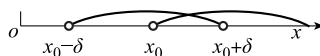


图 1-2

有时称 $(x_0 - \delta, x_0)$ 、 $(x_0, x_0 + \delta)$ 分别为 x_0 的左邻域和右邻域.

1.1.2 函数的概念

具体来说, 函数描述了自然界中数量之间的关系, 函数思想通过提出问题的数学特征, 建立函数关系型的数学模型, 从而进行研究. 它体现了“联系和变化”的辩证唯物主义观点.

我们在观察某运动现象时, 会遇到许多不同的量. 有的量在整个考察过程中数值保持不变, 称为常量; 而整个考察过程中数值发生变化的量, 称为变量. 重点研究变量之间所确定的依赖关系. 具有这种关系的变量我们说形成函数关系, 下面给出函数的定义.

定义 1 设 x 、 y 为变量, D 为非空实数集, 如果对于 D 中的每一个数 x , 按照一定的法则 f , 变量 y 都有唯一确定的值与它对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记作 $y = f(x)$, D 是函数的定义域, x 为自变量, y 为因变量.

对于一个确定的 $x_0 \in D$, 与之对应的 $y_0 = f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的函数值, 全体函

数值的集合称为函数 f 的值域, 记为 $f(D)$, 即 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

在平面直角坐标系中取自变量 x 在横轴上变化, 因变量 $y = f(x)$ 在纵轴上变化, 则平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为定义在 D 上的函数 $y = f(x)$ 的图形.

一个函数 $y = f(x) (x \in D)$ 是由它的定义域 D 和对应法则 f 所确定的, 与自变量、因变量用什么符号无关, 若两个函数的定义域和对应法则相同, 就说它们是相同的函数, 即函数的两要素是定义域和对应法则. 如 $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, 它们的定义域和对应法则一样, 只是表示形式不同而已, 实际上是同一个函数.

一般来说, 函数的定义域是由所考虑问题的实际意义确定的. 但在数学上一般性讨论时, 常常只给出函数的表达式, 而没有说明实际背景, 这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围.

例 1 求函数 $y = \ln x - \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, 必须令 $x > 0$, 且 $x^2 - 4 \geq 0$.

解不等式得 $x \geq 2$.

所以, 函数的定义域为 $D = \{x \mid x \geq 2\}$, ($D = [2, +\infty)$).

函数的表示法一般分为表格法、图形法和解析式法.

下面介绍几个函数的例子.

例 2 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

定义域: \mathbf{R} ; 值域: $[0, +\infty)$; 图像如图 1-3 所示.

例 3 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

定义域: \mathbf{R} ; 值域 $\{-1, 0, 1\}$; 图像如图 1-4 所示.

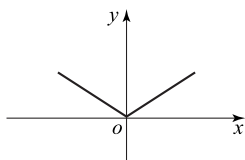


图 1-3

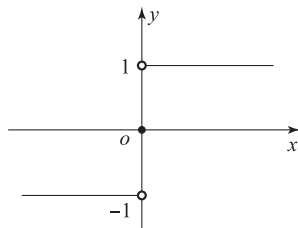


图 1-4

例 2、例 3 中的函数在自变量 x 的不同取值范围内, 自变量 x 和因变量 y 的对应关系要用不同的数学式子来表示. 一般在函数的定义域内, 用两个或两个以上的数学式子分段表示的函数叫分段函数. 应该注意, 不要将分段函数误解为是几个函数. 它是一个函数, 只不过在不同定义范围内, 它的对应关系要用不同的数学式子来分段表示罢了.

例 4 取整函数 $y = [x]$, $x \in \mathbf{R}$.

定义域: \mathbf{R} ; 值域 \mathbf{Z} ; 图像如图 1-5 所示.

例5 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -4 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 3, \\ 5x - 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

求 $f(-\pi)$, $f(1)$, $f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 因为 $-\pi \in [-4, 1)$, 所以 $f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$;

因为 $1 \in [1, 3)$, 所以 $f(1) = 1$;

因为 $3.5 \in [3, +\infty)$, 所以 $f(3.5) = 5 \times 3.5 - 1 = 16.5$;

函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$.

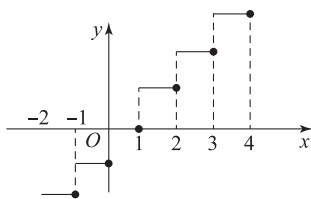


图 1-5

例6 某市市内家庭固定电话的收费标准规定如下: 每次通话, 首3分钟收费0.20元, 以后按每分钟0.10元计费, 尾数不满一分钟的按1分钟计费. 以 t (以分计) 表示通话时间, 以 y (以元计) 表示需付的通话费, 试将 y 表示为 t 的函数.

$$\text{解 } y = f(t) = \begin{cases} 0.20, & 0 < t \leq 3, \\ 0.30, & 3 < t \leq 4, \\ 0.40, & 4 < t \leq 5, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

或写成

$$y = f(t) = \begin{cases} 0.20, & 0 < t \leq 3, \\ 0.20 + 0.10 \{ [t-3] + 1 \}, & t > 3, t \neq 4, 5, 6, \dots, \\ 0.20 + 0.10(t-3), & t = 4, 5, 6, \dots, \end{cases}$$

其中 $[t-3]$ 是取整函数.

1.1.3 函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义, 若对任意的 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若对任意的 $x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例7 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; (2) $f(x) = x^3 + x^2 - 2$.

解 以上两个函数的定义域都关于原点对称.

(1) $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$, 故 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是偶函数;

(2) $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 2 = -x^3 + x^2 - 2$, 故 $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ 是非奇非偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有意义, 设区间 $I \subset D$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增 (或递减) 的.

相应地, I 称为函数 $f(x)$ 的单调增加 (或减少) 区间. 单调增加函数, 单调减少函数统

称为单调函数. 例如, $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 但它不是单调函数; $f(x) = x^3$ 在 \mathbf{R} 内是单调增加函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若存在一个常数 T , 使得对任意的 $x \in D$, $x + T \in D$, 有 $f(x) = f(x + T)$, 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 满足上式的最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期.

一般所说的函数的周期是指它的最小正周期. 例如, 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 以 2π 为周期, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 以 π 为周期. $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期.

周期函数的图像在每个周期内有相同的形状.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义, 若存在一个正数 M , 使得对所有的 $x \in D$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数, 否则称它无界.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 在 \mathbf{R} 上均有界; $y = \frac{1}{x}$ 在 $[1, 3]$, $(1, +\infty)$ 内均有界, 但在 $(0, 1)$, $(0, +\infty)$ 内均无界.

1.1.4 复合函数和反函数

1. 复合函数

定义 2 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 $R(\varphi)$, 若 $D_f \cap R(\varphi) \neq \emptyset$, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数, 变量 u 称为中间变量.

有些复合函数的中间变量可以有两个或更多. 比如, 函数 $y = \sqrt{\lg(x^2 + 1)}$, 是由 $y = \sqrt{u}$, $u = \lg v$ 和 $v = x^2 + 1$ 复合而成的, 这里有两个中间变量 u 和 v .

把一个复合函数分成不同层次的函数, 叫作复合函数的分解. 合理分解复合函数, 在微积分中有着十分重要的意义. 分解的步骤是从外往里, 评判分解合理与否的准则是, 观察各层函数是否为基本初等函数或者多项式. 比如函数 $y = \sqrt{\lg(x^2 + 1)}$ 分解的各层函数依次为 $y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, $u = \lg v$, $v = x^2 + 1$, 分别为幂函数、对数函数和多项式, 这样的分解就是合理的.

例 8 分析下列函数是由哪些函数复合而成的:

$$(1) y = 3^{\ln x}; \quad (2) y = \sin(e^{x^2}).$$

解 (1) $y = 3^{\ln x}$ 是由 $y = 3^u$, $u = \ln x$ 复合而成的;

(2) $y = \sin(e^{x^2})$ 是由 $y = \sin u$, $u = e^v$, $v = x^2$ 复合而成的.

2. 反函数

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 值域是 M , 若对于 M 中的每一个 y 值, 存在唯一确定的 x 值 (满足 $y = f(x)$) 与之对应, 则得到了一个定义在 M 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其为 $y = f(x)$ 的反函数, 此时称 $y = f(x)$ 为直接函数.

习惯上,用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,通常将 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$, $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在其定义域内具有相同的单调性,在同一直角坐标系中,它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

我们把以下六类函数统称为基本初等函数.它们是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) $y=C$ (C 为常数),定义域: \mathbf{R} , 值域: $\{C\}$. 图像如图 1-6 所示.

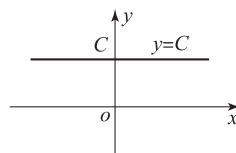


图 1-6

(2) 幂函数.

$y=x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$), 定义域和图像随 α 的取值不同而不同, 如图 1-7 所示.

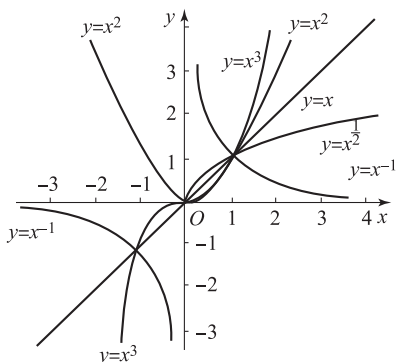


图 1-7

(3) 指数函数.

$y=a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 定义域: \mathbf{R} , 值域: $(0, +\infty)$, 图像如图 1-8 所示.

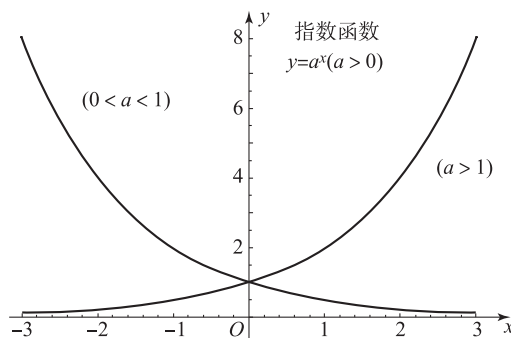


图 1-8

(4) 对数函数.

$y=\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 定义域: $(0, +\infty)$, 值域: \mathbf{R} , 图像如图 1-9 所示.

当 $a=10$ 时, $y=\log_{10} x$, 简记为 $y=\lg x$, 称作常用对数.

当 $a=e$ 时, $y=\log_e x$, 简记为 $y=\ln x$, 称作自然对数.

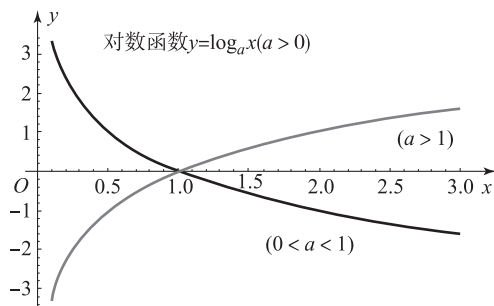


图 1-9

(5) 三角函数.

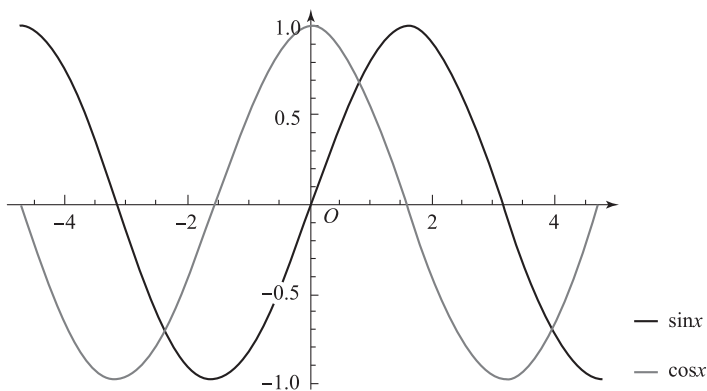
$y = \sin x$, 定义域: \mathbf{R} , 值域: $[-1, 1]$, 是以 2π 为周期的有界奇函数.

$y = \cos x$, 定义域: \mathbf{R} , 值域: $[-1, 1]$, 是以 2π 为周期的有界偶函数.

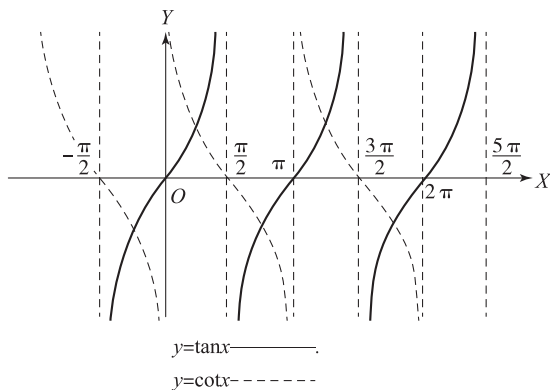
$y = \tan x$, 定义域: $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 值域: \mathbf{R} , 是以 π 为周期的奇函数.

$y = \cot x$, 定义域: $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域: \mathbf{R} , 是以 π 为周期的奇函数.

它们的图像如图 1-10(a), 图 1-10(b) 所示.



(a)



(b)

图 1-10

此外, 三角函数还有正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数.

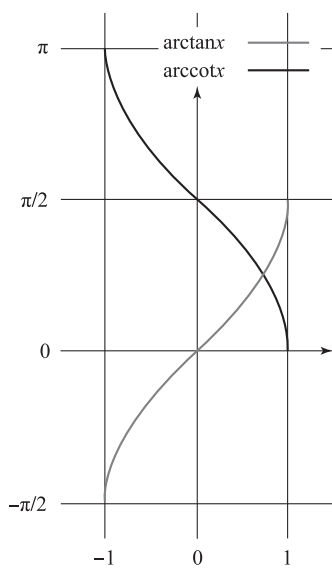
$y = \arcsin x$, 定义域: $[-1, 1]$, 值域: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$y = \arccos x$, 定义域: $[-1, 1]$, 值域: $[0, \pi]$.

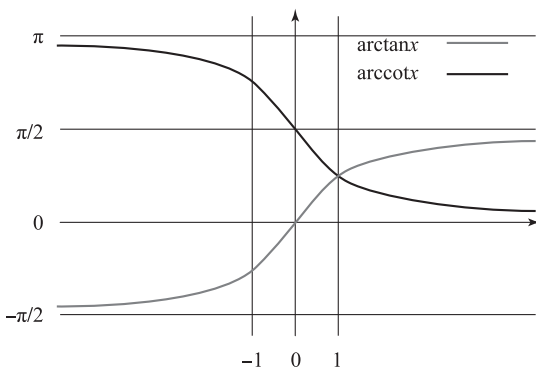
$y = \arctan x$, 定义域: \mathbf{R} , 值域: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$y = \operatorname{arccot} x$, 定义域: \mathbf{R} , 值域: $(0, \pi)$.

它们的图像如图 1-11(a), 图 1-11(b) 所示.



(a)



(b)

图 1-11

定义 4 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所产生的由一个表达式表示的函数，称为初等函数。

例如： $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ ， $y = e^{\sin x}$ 均是初等函数。

1.1.6 常用的经济函数

(1) 需求函数。

需求指消费者在某一特定的时期内，在一定的价格条件下对某种商品具有购买力的需要。如果价格 P 是决定需求量 Q 的最主要的因素，则可认为 Q 是 P 的函数，称为需求函数，记作 $Q = Q(P)$ 。

一般地，需求量随价格的上升而减少，因此，需求函数 $Q = Q(P)$ 是单调减少函数。市场统计资料表明，常用的需求函数有以下几种类型：

①线性需求函数： $Q = a - bp$ ($a, b > 0$)。