戴宏图数学论文集

戴鸿柱 戴小宽 编

复旦大学出版社

前言

QianYan

翻开本书,心中的感受不知道如何表达。

戴宏图是家中长子,幼小时就表现出聪明智慧,读书成绩优秀,长得也面目清秀。从他3岁起,父亲在劳动之余,就把着手教他识字。那时候教的都是繁体字,一个字写在一个方纸块上,因此他5岁时已经认识许多字,能看报纸。他的童年、青少年,给父母带来许多快乐。

戴宏图已经去世了,在他晚年时还多次想为在他青年时代被医院断定为"精神分裂症"的错误结论一事要求纠正,家人说这已经不重要了,你的长期学术研究和当选为人民代表的事实已经否定了当年医院的结论,再去说这事已经没有意义了。但是,当年被错误断定为"精神分裂症"的结论,对家庭和他的人生造成了巨大的伤害。本书收集的他的大量数学论文和数学科普文章,是他人生中最大的一片洁白无暇的经历,也是他人生的亮点,凝聚了他一生对科学的追求和努力。

人们在生活和生产中经常会用到数学,如计算价格、统计产量、工程设计等,数学的抽象性和其应用的广泛性紧密相连。海王星、谷神星、电磁波等重大发现都是数学的科学预见。没有电磁波就没有现代通讯,没有布尔代数就没有当代数字计算技术,自然也就没有当代人非常喜爱的数字图像技术,也就做不到不用胶卷就能拍照片。数学学科是比较难的。宏图他选择攻读数学,研究数学,希望自己能对科学作出贡献,在科学的攀登上留下自己的足迹。

大学一年级时,他对行列式对角线法则开始了新的研究,希望能找到对角线法则的通式,当时,二阶、三阶行列式有对角线法则(也称萨鲁斯法则),但对四阶及四阶以上的高阶行列式,数学界和当时出版的数学手册都明确"高阶行列式无对角线法则"。老师希望他读完大学课程后再去研究,他听从了老师的意见,事隔20多年,他才重新研究了这个课题,并发表了《论行列式的对角线法则》,彻底解决了行列式的对角线法则。

1978年他去山东曲阜师范大学攻读运筹学研究生。

后来,他在上海市宝山区业余大学、行知学院教数学,1994年在上海行知学院被聘为副教授。其中,1985年3月—1986年4月在中国科技大学担任访问学者,1986年12月—1988年12月被中国科技大学聘为离子生物化学实验室客座讲师。他是《科学攀登丛书》、《世界大发明》的编委,是《十万个为什么》(数学

2)、《趣味数学三连冠》、《大突破》的主要撰稿人之一。

1984年他先后加入上海市数学会、上海市化学化工学会、上海市科普创作协会、上海市体育科学学会、宝山区理科学会(任理事),1986年加入上海市分子科学研究会,1988年加入中国化学会。

《聚省分子轨道的差分方程法》(合著)被山东省化学化工学会评为1978—1981年度优秀学术论文,他本人被评为曲阜师范大学学报(自然科学版)1980—1985年度优秀作者。

他先后在《化学学报》、《应用数学》、《数学通讯》、《科学通报》、《科学画报》、《数学研究与评论》、《中国科学技术大学学报》、《曲阜师范大学学报》、《贵州工学院学报》、《锦州师院学报》、《大连轻工业学院学报》、《合肥师范学院学报》、《渝州大学学报》、上海市吴淞区业余大学校刊、上海电视大学吴淞分校校刊上发表数学论文。

他在《少年科学》、《儿童时代》、《中学科技》、《智力》、《小学数学教师》、《中学数学教学研究动态》、《中等数学》、《数学通讯》、《有趣的数学》、"从小爱数学"竞赛辅导资料、小学数学课外活动资料、《十万个为什么》(数学2)、《吴淞科技报》、《宝山报》、《(上海)业大校报》、《吴淞理科学会1985—1986年度论文集》、《趣味数学三连冠》、曲阜师院校刊《晨曲》上,先后发表了大量的科学普及文章。

他的一些研究成果也引起了海外学术界的重视,并受到高度评价。戴宏图在《曲阜师范大学学报》(自然科学版)1986年第3期上发表的论文"完全二分树的优美标号",美国数学学会编辑的杂志《数学评论》认为,戴宏图的论文为1976年提出Cahit问题给了一个新的证明。戴宏图和曲阜师范大学化学系周正宇合作撰写的论文"聚省分子轨道的差分方程法"发表在《化学学报》1982年第9期上,引起美国《化学文摘》杂志的重视,认为该论文通过采用适当的边界条件,借助于求解差分方程组,获得聚省分子的能级和轨道系数。

回顾戴宏图的一生,真的要感谢复旦大学,是学校的教育和培养,使他在特殊的环境下,在人生道路中遇到曲折和痛苦时,在逆境生活中,能够勇往迈进,坚持努力学习,坚持学术研究,坚定理想信念的追求。他的良好的文化素质修养也体现了复旦精神。他用一生的努力使自己成为一名好学生、一名好老师。

在这里,我想提及本书的编者戴鸿柱弟弟对宏图的帮助,他真心地帮助宏图,长期吃苦耐劳,不图回报,以至于宏图在笔记本中深情地写道:"鸿柱,我的好兄弟。"正是鸿柱弟弟的坚持和慷慨解囊,得以妥善办理宏图的后事,及时保存了宏图人生中重要的资料和大量的书稿、手稿。

整理汇编本书的大量书稿资料是没有酬劳的,我们还要感谢本书的另一位

编者戴小宽,他在文档整理和目录编辑方面做了大量的工作。

本书由复旦大学数学系于静、徐天一校对,感谢他们认真仔细的工作。

在本书出版之际,我们还要感谢复旦大学出版社的理解和帮助,特别是本书的责任编辑范仁梅老师,她的耐心细致的工作使本书增色不少。

戴鸿泰

2014 年 11 月

目 录

MuLu

一、学术论文

二、科普作品

三、附录

一、学术论文

论行列式的对角线法则*

戴宏图

二阶、三阶行列式有对角线法则。而 n 阶($n>3$)行列式是否也有对角线展开法则，是一个人们很感兴趣的问题。

本文论证了行列式对角线法则的新结果，分三部分内容：(1)给出四阶行列式的对角线展开法则；(2)提出、讨论第二种对角线展开法则；(3)证明 n 阶行列式可以对角线展开，并且有 $(2n)^{\frac{(n-1)!}{2}}$ 种方法($n\geqslant 3$)。

§1 四阶行列式的对角线法则

我们知道，二阶行列式的对角线展开法则是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccc} + & & \\ & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} \\ - & & \end{array} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

三阶行列式的对角线法则(即 Sarrus 法则)是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} \tag{2}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\text{。}$$

今给出四阶行列式的对角线法则如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ + & - & + & - & & & \end{array}$$

---

* 由于本书中各篇文章的发表时间较早，且散见于各杂志和书籍，因此，编辑尽可能维持其原貌，只略作修改(下同)，特说明。

$$
+\begin{array}{ccccccc}
+\quad & -\quad & +\quad & -\quad & & & \\
a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\
a_{31} & a_{33} & a_{34} & a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \\
+\quad & -\quad & +\quad & -\quad & & &
\end{array}
+\begin{array}{ccccccc}
+\quad & -\quad & +\quad & -\quad & & & \\
a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{12} \\
a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{22} \\
a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{32} \\
a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{42} \\
+\quad & -\quad & +\quad & -\quad & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \\
&\quad + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\
&\quad + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{31}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} \\
&\quad + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} \\
&\quad + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} \\
&\quad + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}\text{。}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

§2 第二种行列式对角线法则

我们将§1中用到的对角线法则称为第一种行列式对角线法则(简称对角线法则)。今提出第二种行列式对角线法则(简称第二种法则):

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
= \begin{array}{ccc} +\ a_{11} & -\ a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \end{array}
= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
\tag{4}
$$

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
= \begin{array}{ccccc} +\ a_{11} & +\ a_{12} & +\ a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}
- \begin{array}{ccccc} +\ a_{11} & +\ a_{13} & +\ a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{array}
\tag{5}
$$

$$
= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\text{。}
$$

为了把这个结果推广到 n 阶行列式(当然也包括 $n=4$ 的情形),今引入对角线块的概念,定义如下:所谓第二种对角线块是指

(i) 当 n 是奇数时,

$$
(-1)^{[i_1 i_2 \cdots i_n]}
\begin{array}{cccccccc}
+\ a_{1i_1} & +\ a_{1i_2} & +\ a_{1i_3} & \cdots & +\ a_{1i_n} & a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots\ a_{1i_{n-1}} \\
a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & \cdots & a_{2i_n} & a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots\ a_{2i_{n-1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{ni_1} & a_{ni_2} & a_{ni_3} & \cdots & a_{ni_n} & a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots\ a_{ni_{n-1}}
\end{array}
\tag{6}
$$

$$
= (-1)^{[i_1 i_2 \cdots i_n]}(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} + a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1} + a_{1i_3}a_{2i_4}\cdots a_{ni_2}
$$

$$+\cdots+a_{1i_n}a_{2i_1}\cdots a_{ni_{n-1}})。$$

这里，i_1，i_2，…，i_n 是数字 1，2，…，n 组成的一个排列，当它为偶排列时，$(-1)^{[i_1 i_2\cdots i_n]}=1$；当它为奇排列时，规定：$(-1)^{[i_1 i_2\cdots i_n]}=-1$。

(ii) 当 n 是偶数时，

$$(-1)^{[i_1 i_2\cdots i_n]}\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & & & & \\ a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} & \cdots a_{1i_n} & a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n-1}} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & \cdots a_{2i_n} & a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & a_{ni_3} & \cdots a_{ni_n} & a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n-1}} \end{array} \qquad (6')$$

$$=(-1)^{[i_1 i_1\cdots i_n]}(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}-a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1}+a_{1i_3}a_{2i_4}\cdots a_{ni_2}-\cdots$$
$$-a_{1i_n}a_{2i_1}\cdots a_{ni_{n-1}})。$$

其中第一条对角线带正号，第二条带负号，第三条带正号，第四条又带负号，依此类推，正负号交替变化，第 n 条带负号(因为 n 是偶数)。

第二种对角线块具有两条重要性质，今表述于下面两条引理中：

引理 1 第二种对角线块中的 n 项是相应的 n 阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (本文中始终用 Δ_n 表示这个 n 阶行列式) 中的 n 项。

证明 如果先不考虑这些项的符号，则块(即第二种对角线块，由于本节仅讨论第二种对角线块，所以这个名称不会引起任何混淆)中的 n 项是

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},\ a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1},\ a_{1i_3}a_{2i_4}\cdots a_{ni_2},\ \cdots,\ a_{1i_n}a_{2i_1}\cdots a_{ni_{n-1}}, \qquad (7)$$

其中每一项都是位于 n 阶行列式 Δ_n 中不同行，不同列的元素乘积。

再观察一下(7)中的项第二下标所成的排列，它们依次是：

$$i_1 i_2 i_3\cdots i_{n-1} i_n,\ i_1 i_3 i_4\cdots i_n i_1,\ i_3 i_4 i_5\cdots i_1 i_2,\ \cdots,\ i_n i_1 i_2\cdots i_{n-2} i_{n-1}。$$

从第二个排列开始，每个排列都是前一个排列经过轮换$(i_1 i_2 i_3\cdots i_{n-1} i_n)$而得到的。

因为轮换$(i_1 i_2 i_3\cdots i_{n-1} i_n)$的定性数* $=n-1$，又因为在行列式 Δ_n 中 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 前面的符号是$(-1)^{[i_1 i_2\cdots i_n]}$，所以

(i) 当 n 是奇数时，(7)中每一项前面的符号都是$(-1)^{(i_1 i_2\cdots i_n)}$；

(ii) 当 n 是偶数时，第二项 $a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1}$ 前面的符号与第一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$

* 定性数这个术语见谢邦杰著《线性代数》。

前面的符号相反；第三项 $a_{1i_3}a_{2i_4}\cdots a_{ni_2}$ 又与第二项 $a_{1i_2}\ a_{2i_3}\cdots a_{ni_1}$ 前面的符号相反，依次类推第四项、第五项以至第 n 项前面的符号，它们是正负交错的。

(i)，(ii)表明块(6)，(6′)中 n 项的符号与它们在 n 阶行列式 Δ_n 中的符号是相同的。(证毕)

引理2　n 阶行列式 Δ_n 的 n！项分别属于$(n-1)$！个第二种对角线块。

证　在引理1中证明了块(6)，(6′)中符号法则的合理性，所以这里不再考虑每一项前面的符号。

(7)中的 n 项第二下标排列恰好对应于轮换$(i_1i_2\cdots i_n)$的 n 个等价表示式，即轮换 $(i_1i_2i_3\cdots i_{n-1}i_n)=(i_2i_3i_4\cdots i_ni_1)=(i_3i_4i_5\cdots i_1i_2)=\cdots=(i_ni_1i_2\cdots i_{n-2}i_{n-1})$。因此，如果 n 阶行列式 Δ_n 中有一项 $a_{1i'_1}a_{2i'_2}\cdots a_{ni'_n}$ 属于另一个块，那么当轮换 $(i_1i_2\cdots i_n)=(i'_1i'_2\cdots i'_n)$ 时，这两个块必然包含完全相同的 n 项。如果轮换 $(i_1i_2\cdots i_n)\neq(i'_1i'_2\cdots i'_n)$，那么第一个块中的 n 项一定都不在第二个块中，第二个块中的 n 项都不在第一个块中。

但是，在 n 阶行列式中任取一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 时，我们总可以构造出包含它的块(6)或(6′)。因此，我们在行列式 Δ_n 中任取一项 $a_{1i_1^1}a_{2i_2^1}\cdots a_{ni_n^1}$，构造一个包含这一项的块 D_1。如果在 Δ_n 中除了 D_1 的 n 项以外还有剩余的项，则在剩余的项中任取一项 $a_{1i_1^2}a_{2i_2^2}\cdots a_{ni_n^2}$，构造一个包含这一项的块 D_2。如果在 Δ_n 中除了 D_1 与 D_2 的 $2n$ 项以外还有剩余的项，那么在剩余的项中任取一项 $a_{1i_1^3}a_{2i_2^3}\cdots a_{ni_n^3}$，再构造一个包含这一项的块 D_3。依此类推，这样的步骤共进行$(n-1)$！次，得到$(n-1)$！个第二种对角线块 D_1，D_2，…，$D_{(n-1)!}$，它们包含了且仅包含了 n 阶行列式 Δ_n 的 n！项。(证毕)

由引理1、引理2容易推得

定理1　n 阶行列式 Δ_n 可以表为$(n-1)$！个第二种对角线块之和。

证明　将引理2证明中获得的$(n-1)$！个块相加，即得

$$\Delta_n=\sum_{p=1}^{(n-1)!}D_p。\qquad\text{(证毕)}\qquad(8)$$

定理1表明，n 阶行列式 Δ_n 可以用第二种对角线法则展开，(8)式可以用来定义行列式，(4)，(5)是定理1在 $n=2$，3时的特别情形。由于包含 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 的块有 n 种不同的构造方法，所以有

推论1.1　按定理1展开 n 阶行列式 Δ_n 有 $n^{(n-1)!}$ 种方法。

由(4)、(5)可见，二阶行列式与三阶行列式在展开时符号规则有很大的区别。在 n 为偶数时符号会出现正负号交替的现象，对于 n 阶行列式要求主对角线上都带正号是不合理的。过去人们对于对角线法则存在一些误解，事实上，在下节中可以证明，对于 $n=7$，11，…(以4为周期)，这样的行列式与三阶行列式

有许多相似之处。

如果将块(6)或(6′)看成与第二下标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 一一对应，由定理 1 就可以得到下面的推论：

推论 1.2 n 阶行列式 Δ_n 可以表为形如 $1i_2i_3\cdots i_n$(这里 $i_1\equiv 1$) 的排列所对应的$(n-1)!$个第二种对角线块之和。

证 显然，形如 $1i_2i_3\cdots i_n$($i_1\equiv 1$) 的排列共有$(n-1)!$个。当排列 $1i_2i_3\cdots i_n$ 与 $1i_2'i_3'\cdots i_n'$不相同时，轮换$(1i_2i_3\cdots i_n)\neq(1i_2'i_3'\cdots i_n')$。所以形如 $1i_2i_3\cdots i_n$ 的$(n-1)!$个排列所对应的$(n-1)!$个块两两互无公共项。由定理 1 即得所求的结论。(证毕)

§ 3 n 阶行列式的对角线法则

为了获得 n 阶行列式的对角线法则，先定义第一种对角线块，所谓第一种对角线块(简称对角线块)指：

i) 当 n 是奇数时，

$$(-1)^{[i_1i_2\cdots i_n]}\begin{array}{cccccccc} + & + & + & + & & & & \\ a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} & \cdots a_{1i_n} & a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n-1}} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & \cdots a_{2i_n} & a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & a_{ni_3} & \cdots a_{ni_n} & a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n-1}} \\ \pm & \pm & \pm & \pm & & & & \end{array} \tag{9}$$

$=(-1)^{[i_1i_2\cdots i_n]}(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}+a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1}+a_{1i_3}a_{2i_4}\cdots a_{ni_2}$

$+\cdots+a_{1i_n}a_{2i_1}\cdots a_{ni_{n-1}}\pm a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1}\pm a_{1i_1}a_{2i_n}\cdots a_{ni_2}$

$\pm a_{1i_2}a_{2i_1}\cdots a_{ni_3}\pm\cdots\pm a_{1i_{n-1}}a_{2i_{n-2}}\cdots a_{ni_n})$,

这里“±”号的取法是：当 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$ 时取“+”号，当 $n\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ 时取“−”号。

ii) 当 n 是偶数时，

$$(-1)^{[i_1i_2\cdots i_n]}\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & & & & \\ a_{1i_1} & a_{1i_2} & a_{1i_3} & \cdots a_{1i_n} & a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_{n-1}} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & a_{2i_3} & \cdots a_{2i_n} & a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & a_{ni_3} & \cdots a_{ni_n} & a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_{n-1}} \\ \mp & \pm & \mp & \pm & & & & \end{array} \tag{9′}$$

$=(-1)^{[i_1i_2\cdots i_n]}(a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}-a_{1i_2}a_{2i_3}\cdots a_{ni_1}+a_{1i_3}a_{1i_4}\cdots a_{ni_2}$

$-\cdots-a_{1i_n}a_{2i_1}\cdots a_{ni_{n-1}}\mp a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1}\pm a_{1i_1}a_{2i_n}\cdots a_{ni_2}$

$\mp a_{1i_2}a_{2i_1}\cdots a_{ni_3}\pm\cdots\pm a_{1i_{n-1}}a_{2i_{n-2}}\cdots a_{ni_n})$,

其中"$\mp$"号的取法是：当 $n\equiv 2 \pmod 4$ 时取"$-$"号，当 $n\equiv 0 \pmod 4$ 时取"$+$"号。"$\pm$"号的取法是：当 $n\equiv 2 \pmod 4$ 时取"$+$"号，当 $n\equiv 0 \pmod 4$ 时取"$-$"号。

与§2中第二种块类似，第一种对角线块也具有两条重要性质，今表述于下面两条引理中。

引理3 对角线块中的 $2n$ 项是 n 阶行列式 Δ_n 中的 $2n$ 项（$n\geqslant 3$）。

证 由于主对角线上的 n 项就是§2中所述的某个第二种块的 n 项，所以现在仅须考虑副对角线上的 n 项。

暂时不考虑符号，副对角线上的 n 项就是

$$a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1},\ a_{1i_1}a_{2i_n}\cdots a_{ni_2},\ a_{1i_2}a_{2i_1}\cdots a_{ni_3},\ \cdots,\ a_{1i_{n-1}}a_{2i_{n-2}}\cdots a_{ni_n},\tag{10}$$

它们的第二下标排列依次是

$$i_ni_{n-1}\cdots i_1,\ i_1i_n\cdots i_2,\ i_2i_1\cdots i_3,\ \cdots,\ i_{n-1}i_{n-2}\cdots i_n,\tag{11}$$

恰好对应于轮换 $(i_ni_{n-1}\cdots i_1)$ 的 n 个等价表示式

$$(i_ni_{n-1}\cdots i_1)=(i_1i_{n-1}\cdots i_2)=(i_2i_1\cdots i_3)=\cdots=(i_{n-1}i_{n-2}\cdots i_n)。$$

所以副对角线上 n 项（不计符号）与排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 所对应的第二种块的 n 项相同。

现在讨论副对角线上 n 项的符号，因为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过置换 $\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_n \\ i_ni_{n-1}\cdots i_1\end{pmatrix}$ 以后就变成排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$，而置换（设法分解成对换的乘积）

$$\begin{pmatrix} i_1i_2\cdots i_n \\ i_ni_{n-1}\cdots i_1\end{pmatrix}=\begin{cases}(i_1i_n)(i_2i_{n-1})\cdots(i_{\frac{n}{2}},\ i_{\frac{n}{2}+1}) & (n\text{ 为偶数}),\\ (i_1i_n)(i_2i_{n-1})\cdots(i_{\frac{n-1}{2}},\ i_{\frac{n+3}{2}}) & (n\text{ 为奇数})。\end{cases}$$

所以当 n 为偶数时，这个置换被分解为 $\dfrac{n}{2}$ 个对换的乘积；当 n 为奇数时，被分解为 $\dfrac{n-1}{2}$ 个对换的乘积。所以在对角线块(9)中，副对角线上元素乘积 $a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1}$ 在 Δ_n 中的符号，当 $n\equiv 1 \pmod 4$ 时应与主对角线上第一项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 所带的符号相同，当 $n=3 \pmod 4$ 时应与之相反。因此，对角线块(9)中副对角线上第一项 $a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1}$ 带的符号与它在 Δ_n 中的符号相同。同理可以说明(9′)中 $a_{1i_n}a_{2i_{n-1}}\cdots a_{ni_1}$ 所带的符号与它在 Δ_n 中所取的符号是相同的。

从副对角线上的 n 项的第二下标排列(11)得知，从第二个排列开始，每一个排列都是前一个排列经过轮换 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 而得到的。由于轮换 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 的定性

数 $=n-1$，因此，当 n 为奇数时，副对角线上 n 项符号都相同；当 n 为偶数时，它们的符号依次正负交替。我们已经证明(10)中第一项的符号在(9)或(9′)中的定义与它在 Δ_n 中所具有的符号一致，所以从(9)，(9′)中可以看出(10)中其他 $n-1$ 项与它们在 Δ_n 中符号一致。

当 $n\geqslant 3$ 时，轮换 $(i_1 i_2\cdots i_n)\neq(i_n i_{n-1}\cdots i_1)$，所以排列 $i_1 i_2\cdots i_n$，$i_n i_{n-1}\cdots i_1$ 对应的两个第二种块没有公共项。因此对角线块(9)，(9′)中的 $2n$ 项是 n 阶行列式中的 $2n$ 项。(证毕)

引理 4 当 $n\geqslant 3$ 时，n 阶行列式 Δ_n 中的 $n!$ 项分别属于 $\frac{(n-1)!}{2}$ 个对角线块。

证 在引理 3 中已经证明了对角线块的符号规则，所以这里不去考虑符号。如果 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 与 $a_{1i'_1}a_{2i'_2}\cdots a_{ni'_n}$ 分别取自两个对角线块，显然，当轮换 $(i'_1 i'_2\cdots i'_n)=(i_1 i_2\cdots i_n)$ 或 $(i_n i_{n-1}\cdots i_1)$ 时，这两个对角线块含有相同的 $2n$ 项，否则，它们没有公共项。

在 $n\geqslant 3$ 时，在 n 阶行列式 Δ_n 中任取一项 $a_{1i_1^1}a_{2i_2^1}\cdots a_{ni_n^1}$，根据(9)，(9′)，总可以构造出一个包含它的对角线块 W_1。如果 Δ_n 中除了 W_1 中的 $2n$ 项以外，还有剩下的项 $a_{1i_1^2}a_{2i_2^2}\cdots a_{ni_n^2}\cdots$，再构造出一个包含 $a_{1i_1^2}a_{2i_2^2}\cdots a_{ni_n^2}$ 的对角线块 W_2。如果 Δ_n 中除了 W_1，W_2 所含的 $4n$ 项以外，还有剩下的项，那么类似地可以构造出对角线块 W_3，等等。进行到 $\frac{(n-1)!}{2}$ 次为止，这样就得到对角线块 W_1，$W_2\cdots$，$W_{\frac{(n-1)!}{2}}$ 它们包含 Δ_n 的全部 $n!$ 项。(证毕)

由引理 4，即可得下述重要结论：

定理 2 当 $n\geqslant 3$ 时，n 阶行列式 Δ_n 可以表为 $\frac{(n-1)!}{2}$ 个对角线块之和。

证 只要将引理 4 证明中获得的 $\frac{(n-1)!}{2}$ 个对角线块加起来即有

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{\frac{(n-1)!}{2}}W_k\text{。}\qquad(\text{证毕})\qquad(12)$$

定理 2 在 $n=3$ 时就得到著名的 Sarrus 法则，所以这个定理推广了 Sarrus 法则，§1 中的(1)，(2)，(3)都是(12)式的特殊情形。当 $n=1$ 时，可以补充规定一阶行列式

$$|a_{11}|=\frac{1+}{2+}\!\!\times a_{11}=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{11})=a_{11}\text{。}$$

当 $n=2$ 时，可以补充规定二阶行列式