

高等学校“十三五”规划教材

# 高等数学

常在斌 胡珍妮 主编

GAODENG SHUXUE



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等学校“十三五”规划教材

# 高等数学

常在斌 胡珍妮 主编



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书是按照教育部大学数学教学指导委员会的基本要求,充分吸取当前优秀高等数学教材的精华,并结合一线教师多年来的教学实践经验,针对当前学生的知识结构和习惯特点而编写的.全书共9章,分别为函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,常微分方程,多元函数的微分,多元函数的积分和无穷级数.每章前面都配有内容提要和学习要求,每小节后配有适量习题,各章后附有本章小结、综合习题和测试题,书后附参考答案供查阅.本书注重知识点的引入方法,使之符合认知规律,更易于读者接受.同时,精炼了主要内容,使结构更加简洁,思路更加清晰.

本书可作为高等院校理工科类各专业的教材,也可作为广大青年朋友自学的参考用书.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 常在斌, 胡珍妮主编. —上海: 同济大学出版社, 2019. 7

ISBN 978-7-5608-8725-8

I. ①高… II. ①常… ②胡… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 182166 号

---

高等学校“十三五”规划教材

## 高等数学

常在斌 胡珍妮 主编

责任编辑 张崇豪 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

排 版 南京新翰博图文制作有限公司

印 刷 常熟市大宏印刷有限公司

开 本 710 mm×960 mm 1/16

印 张 16.75

字 数 335 000

版 次 2019 年 7 月第 1 版 2019 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-8725-8

---

定 价 48.00 元

---

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

高职高专教育是高等教育的一个重要组成部分,目前我国高职教育已进入到以加强内涵建设,全面提高人才培养质量为主的新阶段.高职教育的目标是为社会培养应用型人才,以适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求.

为了适应和满足高等院校培养复合型高级专门人才的需要及高等专业教育的教学形势,同时为了更好地将课程与实践教学相结合,根据高职教育人才培养目标及要求,遵循高职教育教学特点,坚持“掌握概念、强化应用、培养技能”的指导思想,遵循“以应用为目的,以必需够用为度”的原则,西安交通工程学院公共课部数学教研室的老师,在总结多年教学经验的基础上编写本书,本书为普通高等院校理工科高等数学课程的教材或参考书.

本书从培养学生运用理论知识解决实际问题的角度出发,由浅入深、由易到难、由具体到抽象,将教学内容逐步展开,并根据学生的认知水平,设置了大量的例题,涉及各种不同的解题技巧和方法,能满足不同层次学生的需要.

本书共9章,分别为函数与极限,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分的应用,常微分方程,多元函数的微分,多元函数的积分和无穷级数.

本书在内容编排上,与初等数学紧密结合,删掉了部分难度较大的例题;把难度较大的部分章节作为选学内容;习题丰富,题型多样.每章和每小节结束均配有练习题,每小节后的习题与该节内容匹配,用以帮助读者理解和巩固基本知识;每章后的习题和测试题在题型上更为多样,且难度略高于每小节后的习题,用于帮助读者提高,同时也便于读者及时检查学习的效果.另外,本书中带有“\*”的内容,读者可根据实际需要选学.

本书由西安交通工程学院常在斌、胡珍妮担任主编,编写人员及分工如下:第1,6章由常在斌编写;第2,3章由胡珍妮编写;第4,5章由代雪珍编写;第7,8章由卫军超编写;第9章由肖楠编写.最后全书由胡珍妮统稿整理.

在本书的编写过程中,始终得到西安交通工程学院领导、相关部门、数学教研室其他老师及出版社的大力支持;同时还参阅了有关作者出版的高等数学方面的书籍,在此谨致谢意.由于作者水平有限,加之编写时间仓促,书中难免存在不妥之处,敬请各位专家及广大读者批评指正.

编 者

2019年6月

# 目 录

## 前言

第 1 章 函数与极限	( 1 )
1.1 函数	( 1 )
1.1.1 函数的概念	( 1 )
1.1.2 函数的几种特性	( 2 )
1.1.3 反函数	( 4 )
1.1.4 基本初等函数	( 4 )
1.1.5 复合函数	( 5 )
1.1.6 初等函数	( 5 )
习题 1.1	( 5 )
1.2 极限的概念	( 6 )
1.2.1 数列的极限	( 6 )
1.2.2 函数的极限	( 8 )
习题 1.2	( 11 )
1.3 无穷小量与无穷大量	( 11 )
1.3.1 无穷小量	( 11 )
1.3.2 无穷大量	( 13 )
习题 1.3	( 14 )
1.4 极限的四则运算法则	( 14 )
习题 1.4	( 17 )
1.5 两个重要极限	( 17 )
1.5.1 第一重要极限	( 17 )
1.5.2 无穷小的比较	( 19 )
1.5.3 第二重要极限	( 20 )
习题 1.5	( 22 )

1.6 函数的连续性 .....	( 23 )
1.6.1 连续函数的概念 .....	( 23 )
1.6.2 初等函数的连续性 .....	( 25 )
1.6.3 函数的间断点 .....	( 25 )
1.6.4 闭区间上连续函数的最值定理 .....	( 26 )
习题 1.6 .....	( 26 )
本章小结 .....	( 27 )
综合习题一 .....	( 30 )
测试题一 .....	( 32 )

## 第 2 章 导数与微分 .....

2.1 导数的概念 .....	( 34 )
2.1.1 两个实例 .....	( 34 )
2.1.2 导数的概念 .....	( 36 )
2.1.3 导数的几何意义 .....	( 40 )
2.1.4 可导性与连续性之间的关系 .....	( 40 )
2.1.5 应用举例 .....	( 41 )
习题 2.1 .....	( 42 )
2.2 函数的求导法则 .....	( 43 )
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则 .....	( 43 )
2.2.2 复合函数的求导法则 .....	( 44 )
2.2.3 反函数的求导法则 .....	( 46 )
2.2.4 基本初等函数的求导公式 .....	( 47 )
2.2.5 隐函数求导法 .....	( 47 )
2.2.6 对数求导法 .....	( 48 )
2.2.7 由参数方程所确定的函数求导法 .....	( 49 )
2.2.8 高阶导数 .....	( 50 )
习题 2.2 .....	( 52 )
2.3 函数的微分 .....	( 52 )
2.3.1 两个实例 .....	( 53 )
2.3.2 微分的概念 .....	( 54 )
2.3.3 微分的运算法则 .....	( 56 )

2.3.4 微分在近似计算中的应用 .....	( 58 )
习题 2.3 .....	( 59 )
本章小结 .....	( 59 )
综合习题二 .....	( 63 )
测试题二 .....	( 64 )

### 第 3 章 导数的应用 .....

3.1 微分中值定理 .....	( 66 )
3.1.1 罗尔定理 .....	( 66 )
3.1.2 拉格朗日中值定理 .....	( 67 )
* 3.1.3 柯西中值定理 .....	( 69 )
习题 3.1 .....	( 70 )
3.2 洛必达法则 .....	( 70 )
3.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式 .....	( 71 )
3.2.2 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式 .....	( 72 )
3.2.3 其他类型的未定式 .....	( 73 )
习题 3.2 .....	( 75 )
3.3 函数单调性的判定法 .....	( 76 )
3.3.1 函数单调性的判定法 .....	( 76 )
* 3.3.2 利用函数单调性证明不等式 .....	( 78 )
习题 3.3 .....	( 79 )
3.4 函数的极值及其求法 .....	( 80 )
3.4.1 函数极值的定义 .....	( 80 )
3.4.2 函数极值的判定和求法 .....	( 80 )
习题 3.4 .....	( 84 )
3.5 函数的最大值和最小值 .....	( 84 )
3.5.1 函数最值的求法 .....	( 85 )
3.5.2 函数最值在实际问题中的应用 .....	( 86 )
习题 3.5 .....	( 89 )
3.6 曲线的凹凸性与拐点 .....	( 89 )
3.6.1 曲线的凹凸性及其判别法 .....	( 89 )

3.6.2 曲线的拐点以及判定 .....	( 91 )
习题 3.6 .....	( 93 )
3.7 简单函数图形的描绘 .....	( 93 )
3.7.1 曲线的渐近线 .....	( 93 )
* 3.7.2 描绘函数图形的一般步骤 .....	( 95 )
习题 3.7 .....	( 96 )
本章小结 .....	( 96 )
综合习题三 .....	( 99 )
测试题三 .....	( 100 )
<b>第 4 章 不定积分</b> .....	( 102 )
4.1 不定积分的概念及性质 .....	( 102 )
4.1.1 原函数与不定积分的概念 .....	( 102 )
4.1.2 不定积分的几何意义 .....	( 104 )
4.1.3 不定积分的性质 .....	( 105 )
4.1.4 不定积分的基本积分公式 .....	( 105 )
习题 4.1 .....	( 107 )
4.2 换元积分法 .....	( 107 )
4.2.1 换元积分法则 .....	( 107 )
4.2.2 第二类换元法(去根号法) .....	( 110 )
习题 4.2 .....	( 112 )
4.3 分部积分法 .....	( 113 )
习题 4.3 .....	( 116 )
本章小结 .....	( 116 )
综合习题四 .....	( 118 )
测试题四 .....	( 119 )
<b>第 5 章 定积分及其应用</b> .....	( 121 )
5.1 定积分的概念 .....	( 121 )
5.1.1 引例 .....	( 121 )
5.1.2 定积分的定义 .....	( 123 )
5.1.3 定积分的几何意义 .....	( 125 )

5.1.4	定积分的性质 .....	(125)
	习题 5.1 .....	(127)
5.2	微积分基本公式 .....	(127)
5.2.1	积分上限函数 .....	(128)
5.2.2	微积分基本公式 .....	(128)
	习题 5.2 .....	(129)
5.3	定积分的计算 .....	(130)
5.3.1	定积分的换元积分法 .....	(130)
5.3.2	定积分的分部积分法 .....	(132)
	习题 5.3 .....	(133)
5.4	广义积分 .....	(133)
5.4.1	无限区间上的广义积分 .....	(133)
* 5.4.2	无界函数的广义积分 .....	(135)
	习题 5.4 .....	(137)
5.5	定积分的应用 .....	(137)
5.5.1	定积分的元素法 .....	(138)
5.5.2	平面图形的面积 .....	(138)
5.5.3	平行截面积为已知的立体的体积 .....	(140)
5.5.4	旋转体的体积 .....	(141)
5.5.5	平面曲线弧长 .....	(143)
5.5.6	物理上的应用 .....	(145)
* 5.5.7	在经济上的应用 .....	(147)
	习题 5.5 .....	(148)
	本章小结 .....	(149)
	综合习题五 .....	(155)
	测试题五 .....	(156)

## 第 6 章 常微分方程 .....

6.1	微分方程的基本概念与分离变量法 .....	(157)
6.1.1	微分方程的基本概念 .....	(157)
6.1.2	分离变量法 .....	(158)
6.1.3	齐次微分方程 .....	(160)

习题 6.1 .....	(161)
6.2 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程 .....	(162)
6.2.1 一阶线性微分方程 .....	(162)
6.2.2 可降阶的高阶微分方程 .....	(164)
习题 6.2 .....	(166)
6.3 二阶常系数线性微分方程 .....	(166)
6.3.1 二阶常系数线性微分方程解的性质 .....	(166)
6.3.2 二阶常系数线性微分方程的求解方法 .....	(167)
* 6.3.3 二阶常系数非齐次线性微分方程 .....	(169)
习题 6.3 .....	(172)
本章小结.....	(173)
综合习题六.....	(174)
测试题六.....	(176)

## 第 7 章 多元函数的微分..... (177)

7.1 多元函数的基本概念 .....	(177)
7.1.1 多元函数的定义 .....	(177)
7.1.2 二元函数的极限 .....	(179)
7.1.3 多元函数的连续性 .....	(180)
习题 7.1 .....	(181)
7.2 偏导数 .....	(181)
7.2.1 偏导数的定义 .....	(181)
7.2.2 高阶偏导数 .....	(183)
习题 7.2 .....	(185)
7.3 全微分 .....	(185)
7.3.1 全微分的定义 .....	(185)
7.3.2 全微分在近似计算中的应用 .....	(187)
习题 7.3 .....	(188)
7.4 多元复合函数的求导法则 .....	(188)
7.4.1 多元复合函数的求导法则 .....	(188)
7.4.2 隐函数的求导公式 .....	(191)
习题 7.4 .....	(192)

7.5 多元函数的极值及其求法 .....	(193)
7.5.1 多元函数的极值 .....	(193)
7.5.2 二元函数的最大、最小值 .....	(195)
7.5.3 条件极值(拉格朗日乘数法) .....	(196)
习题 7.5 .....	(197)
本章小结 .....	(197)
综合习题七 .....	(200)
测试题七 .....	(201)
<b>第 8 章 多元函数的积分</b> .....	<b>(202)</b>
8.1 二重积分的概念与性质 .....	(202)
8.1.1 二重积分的概念 .....	(202)
8.1.2 二重积分的性质 .....	(204)
8.1.3 二重积分的计算法 .....	(204)
习题 8.1 .....	(209)
8.2 对弧长的曲线积分 .....	(209)
8.2.1 对弧长的曲线积分的概念与性质 .....	(209)
8.2.2 对弧长的曲线积分的计算法 .....	(211)
习题 8.2 .....	(212)
本章小结 .....	(213)
综合习题八 .....	(214)
测试题八 .....	(214)
<b>第 9 章 无穷级数</b> .....	<b>(215)</b>
9.1 常数项级数 .....	(215)
9.1.1 数项级数的概念 .....	(215)
9.1.2 正项级数 .....	(218)
9.1.3 绝对收敛与条件收敛 .....	(221)
9.1.4 交错级数及其判别法 .....	(222)
习题 9.1 .....	(223)
9.2 幂级数 .....	(223)
9.2.1 幂级数的概念 .....	(223)

9.2.2 幂级数的性质 .....	(227)
习题 9.2 .....	(228)
9.3 函数展开成幂级数 .....	(228)
泰勒公式与泰勒级数 .....	(228)
习题 9.3 .....	(235)
本章小结 .....	(235)
综合习题九 .....	(238)
测试题九 .....	(239)
习题参考答案 .....	(241)
参考文献 .....	(256)

# 第 1 章 函数与极限

**内容提要** 函数是微积分研究对象,极限是研究微积分的工具.本章先复习中学已经学过的函数及其性质,进而给出基本初等函数与初等函数的定义.然后,重点研究极限的概念和极限求解的相关方法及函数的连续性,为今后的学习打下必要的基础.

**学习要求** 了解函数、复合函数、分段函数的概念;复述无穷大与无穷小的概念、极限的运算法则、函数连续与间断点的概念;熟悉复合函数的复合与分解,能用无穷小的性质求极限、判断无穷小与无穷大;能用极限的运算法则求极限,熟悉两个重要极限以及求极限的应用.

## 1.1 函 数

### 1.1.1 函数的概念

#### 1. 函数的定义

**定义 1** 设  $x$  和  $y$  为两个变量,  $D$  为一个非空数集. 如果对每一个  $x \in D$ , 按照一定的法则  $f$ , 变量  $y$  总有唯一确定的数值与之对应, 则称  $y$  为  $x$  的函数, 记为

$$y = f(x), x \in D.$$

其中数集  $D$  称为该函数的定义域, 记为  $D(f)$ ,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量.

对于确定的  $x_0 \in D$  时, 依法则  $f$  的对应的值称为函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  时的函数值, 记作

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0).$$

函数值的集合  $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$ , 称为函数  $y = f(x)$  的值域.

#### 2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素.

##### (1) 对应规律

函数的对应规律指的是由自变量的取值确定因变量取值的规律.

**例 1** 设  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ , 求  $f(2)$  和  $f(x+1)$ .

**解** 函数  $f$  确定的对应规律为

$$f(\quad) = (\quad)^2 - 2 \times (\quad) + 3,$$

所以  $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3,$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2.$$

## (2) 函数的定义域

在实际问题中,函数的定义域要根据实际问题的具体意义确定.当下考虑函数的实际意义,而仅就抽象的解析式来研究函数时,这时定义域就取解析式有意义的自变量的全体.要使解析式有意义,我们通常考虑以下几点:

- ① 分式中分母不能为零;
- ② 偶次根式的被开方数非负;
- ③ 对数中真数表达式大于零;
- ④ 反三角函数,例如  $\arcsin x, \arccos x,$  要满足  $\{x \mid |x| \leq 1\}$ ;
- ⑤ 多个函数代数和的定义域,应是各项函数定义域的公共部分;
- ⑥ 求复合函数定义域时,可由外层到里层进行,求出使各层函数有意义的定义域取交集;
- ⑦ 对于表示实际问题的解析式,还应该保证符合实际意义.

**例 2** 求函数  $y = \ln(1-x) + \sqrt{x+4}$  的定义域.

**解** 因为负数和零都没有对数,所以  $1-x > 0,$  即  $x < 1;$  又  $x+4 \geq 0,$  即  $x \geq -4,$  故函数的定义域为  $D = \{x \mid -4 \leq x < 1\}.$

**例 3** 求函数  $y = \arcsin \frac{1}{x}$  的定义域.

**解** 除  $x$  不能为零外,且须  $\left| \frac{1}{x} \right| \leq 1,$  即  $|x| \geq 1,$  这个不等式已经把  $x=0$  除外,所以函数的定义域是  $D = \{x \mid -\infty < x \leq -1 \text{ 且 } 1 \leq x < +\infty\}.$

如果两个函数的定义域与对应法则分别相同,则称这两个函数是同一函数.例如,  $u = v^2$  与  $s = t^2$  就是相同的函数,由此可以看出,函数与表示其变量的符号是无关的.

**例 4** 下列函数是否相同,为什么?

(1)  $y = \ln x^2$  与  $y = 2 \ln x;$

(2)  $y = \cos x$  与  $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}.$

**解** (1)  $y = \ln x^2$  与  $y = 2 \ln x$  不是相同函数,因为定义域不同.

(2)  $y = \cos x$  与  $y = \sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$  是不同的函数,因为定义域相同,但是对应规律不同.

### 1.1.2 函数的几种特性

#### 1. 奇偶性

**定义 2** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称,对于任意一个  $x \in D,$  都有

$f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数; 若有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

例如:  $f(x) = x^2$  是偶函数, 因为  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .

又如:  $f(x) = x^3$  是奇函数, 因为  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ .

偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

函数  $y = \sin x$  是奇函数, 函数  $y = \cos x$  是偶函数.

函数  $y = \sin x + \cos x$  既非奇函数, 也非偶函数, 称为非奇非偶函数.

## 2. 函数的周期性

**定义 3** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 若存在不为零的数  $T$  使得对于任意的  $x \in D$ , 都有  $x \pm T \in D$ , 且

$$f(x+T) = f(x).$$

恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数, 其中  $T$  叫做函数的周期, 通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  都是以  $\pi$  为周期的周期函数.

## 3. 函数的单调性

**定义 4** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ ,  $(a, b) \subseteq D$ , 任取  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调增加的; 如果任取  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  内是单调增加的, 在区间  $(-\infty, 0]$  内是单调减少的; 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内函数  $f(x) = x^2$  不是单调的.

又如, 函数  $f(x) = x^3$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内是单调增加的.

如果函数  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内是增函数(或是减函数), 则称函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内是单调函数, 区间  $(a, b)$  叫做函数  $f(x)$  的单调区间. 函数在区间  $(a, b)$  内的单调增加或单调减少的性质, 叫做函数的单调性.

## 4. 函数的有界性

**定义 5** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $I \subseteq D$ , 如果存在正数  $M$ , 使得与任一  $x \in I$  所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)| \leq M,$$

则称  $f(x)$  在  $I$  内有界. 如果这样的  $M$  不存在, 就称函数  $f(x)$  在  $I$  内无界. 这就是说, 如果对于任何正数  $M$ , 总存在  $x_1 \in I$ , 使  $|f(x_1)| > M$ , 那么函数  $f(x)$  在  $I$  内无界.

例如, 函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是有界的, 因为无论  $x$  取任何实数,  $|\sin x| \leq 1$  都能成立. 这里  $M = 1$  (当然也可取大于 1 的任何数作为  $M$ , 而  $|\sin x| \leq M$  成立). 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内无界, 因为不存在这样的正数  $M$ , 使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq M$  对于  $(0, 1)$  内的一切  $x$  都成立. 事实上, 对于任意取定的正数  $M$  (不妨设  $M > 1$ ), 则  $\frac{1}{2M} \in (0, 1)$ , 当  $x_1 = \frac{1}{2M}$  时,  $\left|\frac{1}{x_1}\right| = 2M > M$ . 但是  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $(1, 2)$  内是有界的, 例如可取  $M = 1$  而使  $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1$  对于区间  $(1, 2)$  内的一切  $x$  值都成立.

### 1.1.3 反函数

**定义 6** 设函数的定义域为  $D_f$ , 值域为  $V_f$ . 对于任意的  $y \in V_f$ , 在  $D_f$  上至少可以确定一个  $x$  与  $y$  对应, 且满足  $y = f(x)$ . 如果把  $y$  看作自变量,  $x$  看作因变量, 就可以得到一个新的函数:  $x = f^{-1}(y)$ . 我们称这个新的函数  $x = f^{-1}(y)$  为函数  $y = f(x)$  的反函数, 而把函数  $y = f(x)$  称为直接函数.

例如, 直接函数  $y = f(x) = \frac{3}{4}x + 3$ ,  $x \in R$  的反函数为  $x = f^{-1}(y) = \frac{4}{3}(y - 3)$ ,  $y \in R$ , 并且有  $f^{-1}[f(x)] = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x + 3\right) - 3\right] = x$ ,  $f[f^{-1}(y)] = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y - 3)\right] + 3 = y$ .

由于习惯上  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 于是我们约定  $y = f^{-1}(x)$  也是直接函数  $y = f(x)$  的反函数.

反函数  $x = f^{-1}(y)$  与  $y = f^{-1}(x)$ , 这两种形式都要用到. 应当说明的是函数  $y = f(x)$  与它的反函数  $x = f^{-1}(y)$  具有相同的图形. 而直接函数  $y = f(x)$  与反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形是关于直线  $y = x$  对称的.

### 1.1.4 基本初等函数

- (1) 幂函数 函数  $y = x^\mu$  ( $\mu$  为常数,  $\mu \in R$ );
- (2) 指数函数 函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a$  为常数);
- (3) 对数函数  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $a$  为常数);
- (4) 三角函数  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$ ,  $y = \sec x$ ,  $y = \csc x$ ;

(5) 反三角函数  $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ ;

(6) 常数函数  $y = C$  ( $C$  为常数).

### 1.1.5 复合函数

先看一个例子, 设  $y = \sqrt{u}$ , 而  $u = 1 + x^2$ , 以  $1 + x^2$  代替  $\sqrt{u}$  中的  $u$ , 得  $y = \sqrt{1 + x^2}$ , 我们称它为由  $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2$  复合而成的复合函数.

**定义 7** 设  $y = f(u)$ , 而  $u = \varphi(x)$ , 且函数  $\varphi(x)$  的值域全部或部分包含在函数  $f(u)$  的定义域内, 那么  $y$  通过  $u$  的联系成为  $x$  的函数, 我们把  $y$  叫做  $x$  的复合函数, 记作  $y = f[\varphi(x)]$ , 其中  $u$  叫做中间变量.

**例 5** 试求由函数  $y = u^3, u = \tan x$  复合而成的函数.

**解** 将  $u = \tan x$  代入  $y = u^3$  中, 即得所求复合函数  $y = \tan^3 x$ .

有时, 一个复合函数可能由三个或更多的函数复合而成. 例如, 由函数  $y = 2^u$ ,  $u = \sin v$  和  $v = x^2 + 1$  可以复合成函数  $y = 2^{\sin(x^2+1)}$ , 其中  $u$  和  $v$  都是中间变量. 反之, 分析一个复合函数的复合结构一般由外向里, 每一步都应是基本初等函数的形式.

**例 6** 指出下列复合函数的结构:

$$(1) y = \cos^2 x; \quad (2) y = \sqrt{\cot \frac{x}{2}}; \quad (3) y = e^{\sin \sqrt{x-1}}.$$

**解** (1)  $y = u^2, u = \cos x$ ;

$$(2) y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \frac{x}{2};$$

$$(3) y = e^u, u = \sin v, v = \sqrt{\omega}, \omega = x - 1.$$

### 1.1.6 初等函数

**定义 8** 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成, 并且可用一个数学式子表示的函数, 称为初等函数.

例如,  $y = x^2 - \cos x, y = \ln \sqrt{1 + x^2}$  都是初等函数. 今后我们所讨论的函数, 绝大多数都是初等函数.

#### 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x-2};$$

$$(2) f(x) = \sqrt{3x+2};$$

$$(3) f(x) = \ln(x-5);$$

$$(4) f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-x}.$$