

主编◎沪树仁



# 上海新高考试题

# 分层精编

精选三年试题 覆盖全部考点

专项精编 分层训练

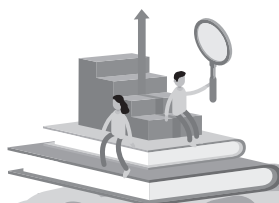
基础题 夯实根基 融合提升

提高题 激活思维 举一反三

## 数学

 同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

主编◎沪树仁



新高考试题

层精编



## 图书在版编目(CIP)数据

上海新高考试题分层精编. 数学 / 沪树仁主编. —  
上海: 同济大学出版社, 2019. 12  
ISBN 978-7-5608-8930-6

I. ①上... II. ①沪... III. ①中学数学课—高中—习  
题集—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 287968 号

---

---

## 上海新高考试题分层精编 数学

沪树仁 主编

出品人 华春荣 策划 赵俊丽 责任编辑 徐慧平

责任校对 徐春莲 封面设计 渲彩轩

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店、网络书店

排版制作 南京展望文化发展有限公司

印 刷 浙江广育爱多印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 20.5

字 数 512000

版 次 2019 年 12 月第 1 版 2019 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-8930-6

---

定 价 78.00 元

---

---

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

## ◆ 前 言

上海新高考数学已实施三年,纵观这三年的考试真题、模拟题,不难发现,新高考试题注重对数学基础知识和基本技能的考查;同时,近三年的考试真题也体现出对考生数学能力的要求。数学的命题有一定的稳定性,强调知识的灵活交叉应用。

新高考数学不分文理科,所考知识点除原文理共有的知识外,针对文理拓展内容,除积化和差与和差化积、极坐标、随机变量的分布列与数学期望的知识点全部都纳入考试范围。新高考数学题型也发生了很大的变化:填空题由14题变成了12题,分值由每题4分变成了前6题每题4分,后6题每题5分,解答题第一道题增加2分。考点多,但是题量减少,所以一道涉及多个相关知识点和多种方法运用的题目就会经常出现,难度也主要体现在对能力要求的提高,尤其是逻辑推理能力、科学计算能力、数据分析及数学应用能力,这些也是新课标中特别强调的四种能力。

在编辑《上海新高考试题分类汇编》的过程中,我们整理了近三年各区县的“一模”“二模”试题,总结出其“变”与“不变”的特点。“变”是指每年的考点或考查方式都会有所调整,所以每年的目录会有微小调整。“不变”是指常能看到一些“熟悉”的面孔——有带比较深刻“旧高考”烙印的试题;也有在各区县间反复考查的好题。

基于对近三年模拟试题及真题的研究与分析,汇编形成了本套丛书——《上海新高考试题分层精编》。作为《上海新高考试题分类汇编》的姐妹篇,在其统整一年模拟试题的基础上,本书进一步聚焦新高考的特点,汇集三年模拟题精华,覆盖了全部考点,更为系统地梳理题型,总体呈现出更全、更细、更精的特点。

《上海新高考试题分层精编》在板块设置方面,也有相应的设计与调整。“分层”体现在“基础题”和“提高题”两个板块,既有对基础知识的点拨和训练,也有对思维能力的培养和提升。“精编”体现在对过去三年模拟题的去粗取精,留下最本质、最有利于学生深入掌握和融会贯通学科知识的题目加以强化训练。

# ◆ 目 录

## 第 1 章 集合与命题 / 1

- 1.1 集合 / 1
- 1.2 命题 / 3
- 1.3 充分条件与必要条件 / 3

## 第 2 章 不等式 / 6

- 2.1 不等式的性质 / 6
- 2.2 解不等式 / 7
- 2.3 基本不等式 / 9
- 2.4 不等式恒成立和有解问题 / 10

## 第 3 章 函数的基本性质 / 13

- 3.1 函数的概念 / 13
- 3.2 函数的性质 / 14
- 3.3 函数的最值 / 21
- 3.4 函数的零点 / 25
- 3.5 反函数 / 27
- 3.6 函数综合问题 / 29

## 第 4 章 幂函数、指数函数和对数函数 / 34

- 4.1 幂函数、指数函数和对数函数 / 34
- 4.2 函数应用题 / 53

## 第 5 章 三角比 / 60

- 5.1 三角比及三角变换 / 60
- 5.2 解三角形 / 62
- 5.3 解三角形应用题 / 70

## 第 6 章 三角函数 / 77

- 6.1 三角函数的性质 / 77
- 6.2 三角函数的图像 / 81
- 6.3 三角函数综合问题 / 85

## 第 7 章 数列 / 93

- 7.1 等差数列 / 93
- 7.2 等比数列 / 96
- 7.3 数列的通项 / 100
- 7.4 数列的极限 / 103
- 7.5 数列综合问题 / 106
- 7.6 数列应用题 / 127

## 第 8 章 向量 / 129

- 8.1 向量的坐标表示 / 129
- 8.2 向量的线性运算 / 132
- 8.3 向量的数量积 / 135

## 第 9 章 矩阵和行列式 / 139

- 9.1 矩阵 / 139
- 9.2 行列式 / 140

## 第 10 章 直线与线性规划 / 143

- 10.1 直线方程 / 143
- 10.2 线性规划 / 145

## 第 11 章 圆锥曲线 / 148

- 11.1 圆 / 148
- 11.2 椭圆 / 152
- 11.3 双曲线 / 165
- 11.4 抛物线 / 178
- 11.5 曲线和方程 / 187
- 11.6 参数方程 / 189

## 第 12 章 复数 / 191

- 12.1 复数的概念和运算 / 191
- 12.2 复数的几何意义 / 193

12.3 实系数一元二次方程 / 195	<b>第 15 章 排列组合与二项式定理 / 227</b>
<b>第 13 章 空间直线与平面 / 198</b>	15.1 排列组合 / 227
13.1 空间直线与直线的位置关系 / 198	15.2 二项式定理 / 230
13.2 空间直线与平面的位置关系 / 199	<b>第 16 章 概率论初步 / 234</b>
13.3 空间平面与平面的位置关系 / 200	16.1 古典概型 / 234
<b>第 14 章 简单几何体 / 202</b>	16.2 概率运算 / 236
14.1 空间角与距离 / 202	<b>第 17 章 基本统计方法 / 239</b>
14.2 三视图 / 205	17.1 总体和样本 / 239
14.3 多面体 / 211	17.2 抽样技术 / 240
14.4 旋转体 / 220	<b>参考答案 / 242</b>

# 第1章 集合与命题

## 1.1 集 合

### 基础题

#### 类型1 用列举法表示的集合的运算

1. (2017·奉贤·一模)已知集合  $A = \{-2, -1\}$ ,  $B = \{-1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
2. (2018·青浦·一模)设全集  $U = \mathbf{Z}$ , 集合  $M = \{1, 2\}$ ,  $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , 则  $P \cap \complement_U M =$  \_\_\_\_\_.
3. (2019·崇明·二模)已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ , 则  $\complement_U(A \cap B) =$  \_\_\_\_\_.

#### 类型2 已知运算结果,求参数值

4. (2018·杨浦·一模)已知集合  $A = \{1, 2, m\}$ ,  $B = \{3, 4\}$ , 若  $A \cap B = \{3\}$ , 则实数  $m =$  \_\_\_\_\_.
5. (2018·崇明·一模)已知集合  $A = \{1, 2, 5\}$ ,  $B = \{2, a\}$ , 若  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.
6. (2018·虹口·二模)已知  $A = (-\infty, a]$ ,  $B = [1, 2]$ , 且  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则实数  $a$  的范围是 \_\_\_\_\_.

#### 类型3 用描述法表示的集合的运算

7. (2017·虹口·一模)已知集合  $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{x \mid x = 2k, k \in A\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
8. (2017·松江·一模)设集合  $M = \{x \mid x^2 = x\}$ ,  $N = \{x \mid \lg x \leq 0\}$ , 则  $M \cap N =$  \_\_\_\_\_.
9. (2017·普陀·一模)若集合  $A = \{x \mid y^2 = x, y \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y \mid y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

## 提高题

### 类型1 不等式解集的运算

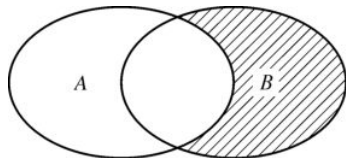
- (2017·虹口·二模) 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{x \mid (x-1)(x-5) < 0\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
- (2017·静安·二模) 已知集合  $A = \{x \mid \ln x > 0\}$ ,  $B = \{x \mid 2^x < 3\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.
- (2018·黄浦·一模) 已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x \mid |x-1| > 1\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{x-3}{x+1} < 0\right\}$ , 则  $(\complement_U A) \cap B =$  \_\_\_\_\_.
- (2019·松江·一模) 设集合  $A = \{x \mid x > 1\}$ ,  $B = \left\{x \mid \frac{x}{x-3} < 0\right\}$ , 则  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_.

### 类型2 集合运算性质的运用

- (2017·杨浦·一模) 已知  $A = (-\infty, 0]$ ,  $B = (a, +\infty)$ , 若  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- (2017·杨浦·二模) 已知集合  $A = \{1, 3, a^2\}$ ,  $B = \{a+1, a+2\}$ . 若  $B \cup A = A$ , 则实数  $a =$  \_\_\_\_\_.
- (2018·金山·一模) 若非空集合  $A, B, C$  满足  $A \cup B = C$ , 且  $B$  不是  $A$  的子集, 则( ).  
 A. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件  
 B. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件  
 C. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件  
 D. “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”的必要条件
- (2019·静安·一模) 已知集合  $A = \{y \mid y = \log_{\frac{1}{2}} x - x, 1 \leq x \leq 2\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 - 5tx + 1 \leq 0\}$ , 若  $A \cap B = A$ , 则实数  $t$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

### 类型3 新定义和图表

- (2018·杨浦·二模) 设  $A, B$  是非空集合, 定义:  $A \times B = \{x \mid x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$ . 已知  $A = \{x \mid y = \sqrt{2x - x^2}\}$ ,  $B = \{x \mid x > 1\}$ , 则  $A \times B$  等于( ).  
 A.  $[0, 1] \cup (2, +\infty)$       B.  $[0, 1) \cup (2, +\infty)$   
 C.  $[0, 1]$       D.  $[0, 2]$
- (2018·静安·二模) 设全集  $U = \mathbf{Z}$ , 集合  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则图中阴影部分表示的集合用列举法表示为 \_\_\_\_\_.



(第10题图)

## 1.2 命 题

### 基础题

#### 类型1 四种命题形式

- (2017·嘉定·二模)命题“若 $x=1$ ,则 $x^2-3x+2=0$ ”的逆否命题是( ).  
 A. 若 $x \neq 1$ ,则 $x^2-3x+2 \neq 0$       B. 若 $x^2-3x+2=0$ ,则 $x=1$   
 C. 若 $x^2-3x+2=0$ ,则 $x \neq 1$       D. 若 $x^2-3x+2 \neq 0$ ,则 $x \neq 1$
- (2018·虹口·一模)命题:“若 $x^2=1$ ,则 $x=1$ ”的逆否命题为( ).  
 A. 若 $x \neq 1$ ,则 $x \neq 1$ 或 $x \neq -1$       B. 若 $x=1$ ,则 $x=1$ 或 $x=-1$   
 C. 若 $x \neq 1$ ,则 $x \neq 1$ 且 $x \neq -1$       D. 若 $x=1$ ,则 $x=1$ 且 $x=-1$
- (2019·青浦·一模)写出命题“若 $am^2 < bm^2$ ,则 $a < b$ ”的逆命题: \_\_\_\_\_.

#### 类型2 命题真假的判断

- (2017·杨浦·一模)若“ $a > b$ ”,则“ $a^3 > b^3$ ”是\_\_\_\_\_命题(填“真”或“假”).
- (2019·松江·二模)17世纪,法国数学家费马提出猜想:“当整数 $n > 2$ 时,关于 $x, y, z$ 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 没有正整数解”,经过三百多年,1995年英国数学家安德鲁·怀尔斯给出了证明,使它终成费马大定理,则下面命题中,正确的是( ).  
 ① 对任意正整数 $n$ ,关于 $x, y, z$ 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 都没有正整数解;  
 ② 当整数 $n > 2$ 时,关于 $x, y, z$ 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解;  
 ③ 当正整数 $n \leq 2$ 时,关于 $x, y, z$ 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解;  
 ④ 若关于 $x, y, z$ 的方程 $x^n + y^n = z^n$ 至少存在一组正整数解,则正整数 $n \leq 2$ .  
 A. ①②      B. ①③      C. ②④      D. ③④

## 1.3 充分条件与必要条件

### 基础题

#### 类型1 以集合包含关系为背景

- (2017·静安·一模)若“ $x < 0$ ”是“ $x < a$ ”的充分非必要条件,则 $a$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.



2. (2019·松江·一模)若  $a > 0, b > 0$ , 则  $\begin{cases} x + y > a + b, \\ x \cdot y > a \cdot b \end{cases}$  是  $\begin{cases} x > a, \\ y > b \end{cases}$  的( ).
- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件

### 类型2 以函数性质为背景

3. (2017·静安·二模)已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则 “ $\log_3 a > \log_3 b$ ” 是 “ $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$ ” 的( ).
- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件

### 类型3 以集合包含关系为背景

4. (2018·闵行、松江·二模) “ $xy=0$ ” 是 “ $x=0$  且  $y=0$ ” 成立的( ).
- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件

### 类型4 以逆否命题为背景

5. (2018·浦东·二模)唐代诗人杜牧有两句诗为:“今来海上升高望,不到蓬莱不成仙.”其中后一句中“成仙”是“到蓬莱”的( ).
- A. 充分条件  
B. 必要条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件

## ◆ 第2章 不等式

### 2.1 不等式的性质

#### 基础题

1. (2017·普陀·一模)若  $a < b < 0$ , 则下列不等关系中, 不能成立的是( ).

A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B.  $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C.  $a^{\frac{1}{3}} < b^{\frac{1}{3}}$

D.  $a^2 > b^2$

2. (2018·闵行·一模)若  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则一定有( ).

A.  $ad > bc$

B.  $ad < bc$

C.  $ac < bd$

D.  $ac > bd$

3. (2019·崇明·一模)若  $a < 0 < b$ , 则下列不等式恒成立的是( ).

A.  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B.  $-a > b$

C.  $a^2 > b^2$

D.  $a^3 < b^3$

4. (2019·闵行·一模)若  $a$  为实数, 则“ $a < -1$ ”是“ $\frac{1}{a} > -1$ ”的( ).

A. 充要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 既非充分也非必要条件

5. (2019·长宁、嘉定·二模)已知  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $\frac{1}{x} > 1$ ”是“ $x < 1$ ”的( ).

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

#### 提高题

1. (2019·普陀·二模)设实数  $a, b, c$  满足  $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ , 且  $abc = 10, a^{\lg a} \cdot b^{\lg b} \cdot c^{\lg c} \geq 10$ , 则  $a + b + c =$  \_\_\_\_\_.

## 2.2 解不等式

## 基础题

## 类型1 不含参数的不等式

1. (2018·青浦·二模)不等式  $|x-3| < 2$  的解集为\_\_\_\_\_.
2. (2018·普陀·一模)不等式  $\frac{1}{|x-1|} \geq 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
3. (2019·徐汇·二模)不等式  $\frac{x+1}{x} > 1$  的解集为\_\_\_\_\_.
4. (2019·黄浦·一模)不等式  $\frac{x}{x-1} < 0$  的解集为\_\_\_\_\_.

## 类型2 不等式解集的运算

5. (2017·崇明·一模)已知  $M = \{x \mid |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $P = \left\{x \mid \frac{1-x}{x+2} \geq 0, x \in \mathbf{R}\right\}$ , 则  $M \cap P =$ \_\_\_\_\_.
6. (2018·金山·二模)已知集合  $P = \{x \mid (x+1)(x-3) < 0\}$ ,  $Q = \{x \mid |x| > 2\}$ , 则  $P \cap Q =$ \_\_\_\_\_.
7. (2018·徐汇·二模)已知全集  $U = \mathbf{R}$ , 集合  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$ , 则  $\complement_U A =$ \_\_\_\_\_.
8. (2019·松江·二模)已知集合  $A = \{x \mid |x-1| < 1\}$ ,  $B = \{x \mid x > 1\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.

## 类型3 指数、对数不等式

9. (2017·青浦·一模)已知集合  $A = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq 2^x < 16\right\}$ ,  $B = \{x \mid y = \log_2(9-x^2)\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
10. (2019·浦东·一模)不等式  $\left| \begin{matrix} \log_2 x & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right| > 0$  的解集为\_\_\_\_\_.
11. (2019·青浦·一模)不等式  $2^{x^2-4x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$  的解集为\_\_\_\_\_.

12. (2019·长宁、嘉定·一模)求下列不等式的解集:

(1)  $|2x - 3| < 5$ ;

(2)  $4^x - 4 \cdot 2^x - 12 > 0$ .

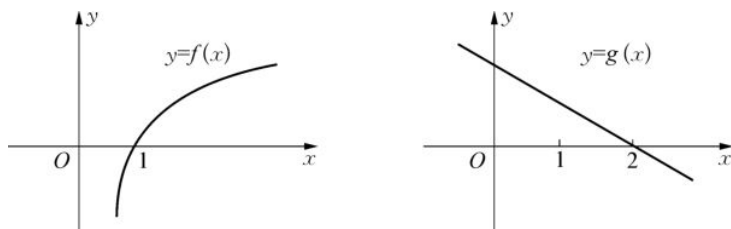
### 提高题

#### 类型1 含参数不等式

- (2017·闵行·一模)若关于  $x$  的不等式  $\frac{x-a}{x-b} > 0$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 的解集为  $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$ , 则  $a+b =$  \_\_\_\_\_.
- (2017·奉贤·二模)设集合  $A = \{x \mid |x-2| \leq 3\}$ ,  $B = \{x \mid x < t\}$ , 若  $A \cap B = \emptyset$ , 则实数  $t$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.
- (2019·杨浦·一模)若函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$  的定义域为集合  $A$ , 集合  $B = (a, a+1)$ , 且  $B \subseteq A$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

#### 类型2 利用函数单调性解不等式

- (2017·徐汇·一模)已知函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的单调函数,  $f^{-1}(x)$  是它的反函数, 点  $A(-1, 3)$  和点  $B(1, 1)$  均在函数  $f(x)$  的图像上, 则不等式  $|f^{-1}(2^x)| < 1$  的解集为( ).  
 A.  $(-1, 1)$       B.  $(1, 3)$       C.  $(0, \log_2 3)$       D.  $(1, \log_2 3)$
- (2019·长宁、嘉定·一模)已知函数  $f(x) = \log_a x$  和  $g(x) = k(x-2)$  的图像如图所示, 则不等式  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.



(第5题图)

## 类型3 综合题

6. (2017·徐汇·一模)若使集合  $A = \{x \mid (kx - k^2 - 6)(x - 4) > 0, x \in \mathbf{Z}\}$  中的元素个数最少,则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
7. (2017·静安·二模)若适合不等式  $|x^2 - 4x + k| + |x - 3| \leq 5$  的  $x$  的最大值为 3,则实数  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

## 2.3 基本不等式

## 基础题

## 类型1 直接利用两个基本不等式

1. (2017·崇明·一模)已知  $x, y \in \mathbf{R}^+$ , 且  $x + 2y = 1$ , 则  $xy$  的最大值为\_\_\_\_\_.
2. (2019·徐汇·一模)若实数  $x, y$  满足  $xy = 1$ , 则  $2x^2 + y^2$  的最小值为\_\_\_\_\_.
3. (2019·杨浦·一模)若实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 = 1$ , 则  $xy$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 类型2 考查基本不等式成立条件

4. (2017·宝山·一模)已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab > 0$ ”是“ $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ”的( ).
- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件
5. (2018·青浦·一模)“ $a > b$ ”是“ $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$ ”成立的( ).
- A. 充分非必要条件  
B. 必要非充分条件  
C. 充要条件  
D. 既非充分也非必要条件

## 提高题

## 类型1 基本不等式变形用

1. (2017·闵行·一模)已知  $x, y$  满足曲线方程  $x^2 + \frac{1}{y^2} = 2$ , 则  $x^2 + y^2$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

2. (2017·长宁、嘉定·一模) 设向量  $\overrightarrow{OA}=(1, -2)$ ,  $\overrightarrow{OB}=(a, -1)$ ,  $\overrightarrow{OC}=(-b, 0)$ , 其中  $O$  为坐标原点,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 若  $A, B, C$  三点共线, 则  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$  的最小值为\_\_\_\_\_.
3. (2017·静安·二模) 设  $a > 0$ , 若对于任意的  $x > 0$ , 都有  $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \leq 2x$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4. (2018·长宁、嘉定·二模) 若实数  $x, y$  满足  $4^x + 4^y = 2^{x+1} + 2^{y+1}$ , 则  $S = 2^x + 2^y$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

## 类型2 基本不等式多次用

5. (2017·杨浦·二模) 已知  $a > 0, b > 0$ , 当  $(a+4b)^2 + \frac{1}{ab}$  取到最小值时,  $b =$ \_\_\_\_\_.
6. (2019·杨浦·一模) 当  $0 < x < a$  时, 不等式  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2} \geq 2$  恒成立, 则实数  $a$  的最大值为\_\_\_\_\_.
7. (2019·宝山·二模) 在线段  $A_1A_2$  的两端点各置一个光源, 已知  $A_1, A_2$  光源的发光强度之比为  $1:2$ , 则该线段上光照度最小的一点到  $A_1, A_2$  的距离之比为\_\_\_\_\_. (光学定律:  $P$  点的光照度与  $P$  点到光源距离的平方成反比, 与光源的发光强度成正比)
8. (2018·普陀·二模) 已知  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ , 若  $k(xy + yz + zx) > 5(x^2 + y^2 + z^2)$ , 则对此不等式的描述中, 正确的是( ).
- A. 若  $k=5$ , 则至少存在一个以  $x, y, z$  为边长的等边三角形
- B. 若  $k=6$ , 则对任意满足不等式的  $x, y, z$ , 都存在以  $x, y, z$  为边长的三角形
- C. 若  $k=7$ , 则对任意满足不等式的  $x, y, z$ , 都存在以  $x, y, z$  为边长的三角形
- D. 若  $k=8$ , 则对满足不等式的  $x, y, z$ , 不存在以  $x, y, z$  为边长的直角三角形

## 2.4 不等式恒成立和有解问题

### 基础题

1. (2017·奉贤·一模) 若对任意正实数  $a$ , 不等式  $x^2 \leq 1+a$  恒成立, 则实数  $x$  的最小值为\_\_\_\_\_.
2. (2017·浦东·一模) 若关于  $x$  的不等式  $|2^x - m| - \frac{1}{2^x} < 0$  在区间  $[0, 1]$  内恒成立, 则实数  $m$  的范围为\_\_\_\_\_.

## 提高题

### 类型1 不等式恒成立问题

- (2017·长宁、嘉定·一模) 如果对一切正实数  $x, y$ , 不等式  $\frac{y}{4} - \cos^2 x \geq a \sin x - \frac{9}{y}$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是( ).  
 A.  $(-\infty, \frac{4}{3}]$       B.  $[3, +\infty)$       C.  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$       D.  $[-3, 3]$
- (2017·嘉定·二模) 已知  $f(x)$  是偶函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是增函数, 若  $f(ax + 1) \leq f(x - 2)$  在  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是( ).  
 A.  $[-2, 1]$       B.  $[-2, 0]$   
 C.  $[-1, 1]$       D.  $[-1, 0]$
- (2018·徐汇·一模) 若不等式  $(-1)^n \cdot a < 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  对任意正整数  $n$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- (2018·长宁、嘉定·一模) 若不等式  $x^2 - 2y^2 \leq cx(y - x)$  对满足  $x > y > 0$  的任意实数  $x, y$  恒成立, 则实数  $c$  的最大值为\_\_\_\_\_.
- (2018·浦东·二模) 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上是增函数, 如果对于任意  $x \in [1, 2]$ ,  $f(ax + 1) \leq f(x - 3)$  恒成立, 那么实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- (2018·宝山·二模) 已知奇函数  $f(x)$  定义域为  $\mathbf{R}$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x + \frac{m^2}{x} - 1$  (这里  $m$  为正常数), 若  $f(x) \leq m - 2$  对一切  $x \leq 0$  成立, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- (2019·浦东·二模) 已知  $f(x) = 2x^2 + 2x + b$  是定义在  $[-1, 0]$  上的函数, 若  $f[f(x)] \leq 0$  在定义域上恒成立, 而且存在实数  $x_0$  满足:  $f[f(x_0)] = x_0$  且  $f(x_0) \neq x_0$ , 则实数  $b$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

### 类型2 不等式有解问题

- (2018·松江·一模) 若存在  $x \in [0, +\infty)$  使  $\left| \frac{2^x}{m} - \frac{2^x}{x} \right| < 1$  成立, 则实数  $m$  的取值范围是( ).  
 A.  $(-\infty, 1)$       B.  $(-1, +\infty)$       C.  $(-\infty, -1]$       D.  $[1, +\infty)$
- (2018·青浦·一模) 已知函数  $f(x) = m(x - m)(x + m + 2)$  和  $g(x) = 3^x - 3$  同时满足以下两个条件: ① 对任意实数  $x$  都有  $f(x) < 0$  或  $g(x) < 0$ ; ② 总存在  $x_0 \in (-\infty, -2)$ , 使  $f(x_0)g(x_0) < 0$  成立. 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.