

主编◎王彩侠 程林凤 逢世友

# 高等数学 考研解题方法 指导

详细提炼章节重点  
全面指导解题方法  
深度剖析典型例题

轻松备考 事半功倍  
自信源于方法

 同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

# 高等数学考研解题 方法指导

主 编 王彩侠 程林凤 逢世友

副主编 汪 赛 祈永强

主 审 王升瑞



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书结合高等数学的具体教学,精选大量典型例题,以分析解决问题的思路、方法和技巧为突破口,对高等数学内容进行了高起点、全方位的综合论述.同时,书中每章配有习题与解答过程,供读者进行同步练习,巩固所学知识.为了形象直观地表述教学内容,提高教学质量和方便读者自学,本书还配备了相应的多媒体课件.

全书共7章,内容为函数与极根,一元函数微分学,一元函数积分法及其应用,多元函数微分法及其应用,多元函数积分学,无穷级数,微分方程.

本书可以作为高等院校工科及经管类学生学习高等数学的辅导教材,也可以作为备考研究生入学考试的复习参考书及教师进行考研辅导的选用教材.

### 图书在版编目(CIP)数据

高等数学考研解题方法指导 / 王彩侠, 程林凤, 逢世友主编. — 上海: 同济大学出版社, 2020. 2

ISBN 978-7-5608-8647-3

I. ①高… II. ①王…②程…③逢… III. ①高等数学—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 018095 号

---

---

## 高等数学考研解题方法指导

主编 王彩侠 程林凤 逢世友 副主编 汪 赛 祈永强 主审 王升瑞  
责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐逢乔 封面设计 渲彩轩

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)  
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店  
印 刷 常熟市华顺印刷有限公司  
开 本 787 mm×1092 mm 1/16  
印 张 21.75  
印 数 1—2100  
字 数 543 000  
版 次 2020 年 2 月第 1 版 2020 年 2 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5608-8647-3

定 价 68.00 元

---

---

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

# 前 言

科学方法是打开科学殿堂大门的钥匙,就数学解题方法而言,必须把学习数学知识和掌握科学的解题方法二者结合起来,只有知识是不能转化为能力的,必须以科学的思维方法为中介才能实现.

高等数学在高等工科院校的教学中是一门十分重要的基础理论课程,它的内容和方法是学生必备的基础知识.怎样才能更好地掌握高等数学中的基本概念、定理公式及解题技巧,以达到融会贯通的目的呢?为此,我们根据高等数学内容,结合多年积累的教学经验,编写本书.旨在对高等数学传统教材中的各章节内容进行重新组合,对某些方法进行系统、系统的提炼总结.比如,对求极限的方法编者总结了十几种,读者由此可领会极限在高等数学中的重要地位;又如,在多元函数积分学部分,编者对各类积分概念进行了系统整合,对几个重要公式的联系及应用进行了系统分析,这对全面理解相关知识,提高综合运用能力起着重要作用.书中每章都针对性地精选了大量典型例题,在对解题的思路、方法和技巧进行分析指导的同时,对解题中常见的错误也给予了指正.本书既有以内容为体系的横向学习,也有以方法为线索的纵向归纳.

本书可作为学习高等数学的辅导教材,对工科与经济管理类本科学生备考研究生入学考试也是一本有益的复习参考书.本书既可以配合高等数学课程(滞后约10周)分两个学期使用,也可以在高等数学课程结束后集中开设选修课使用,或对优秀学生开设讲座使用.

本书第1章由祈永强编写,第2,5章由王彩侠编写,第3,4章由程林凤编写,第6章由逢世友编写,第7章由汪赛编写.本书经编者多次讨论,交换意见,最后由王升瑞统稿、审阅,并编制了多媒体课件.由于时间仓促,加之编者的水平有限,书中如有错误,恳请读者批评指正.

编 者

2020年2月

# 目 录

## 前言

第 1 章 函数与极限 .....	1
1.1 主要内容及方法指导 .....	1
1.1.1 函数的定义域、对应法则及函数值 .....	1
1.1.2 函数的几种特性 .....	1
1.1.3 函数的极限 .....	2
1.1.4 极限的性质、存在准则及重要公式 .....	2
1.1.5 函数的连续性 .....	4
1.1.6 闭区间上连续函数的性质 .....	4
1.1.7 函数的间断点 .....	4
1.1.8 求极限的基本方法 .....	5
1.1.9 求未定式的极限 .....	6
1.1.10 利用导数或定积分定义求极限 .....	7
1.1.11 利用中值定理求极限 .....	7
1.1.12 利用泰勒公式求极限 .....	8
1.1.13 利用无穷级数收敛的定义、性质或已知结果求极限 .....	8
1.1.14 判断函数极限不存在的主要方法 .....	9
1.2 典型例题解析 .....	9
1.2.1 求函数的定义域、函数值及函数表达式 .....	9
1.2.2 函数基本特性的判定 .....	10
1.2.3 函数的连续性及间断点的判定 .....	11
1.2.4 闭区间上连续函数性质的应用 .....	13
1.2.5 高等数学中常用求极限的方法总结 .....	13
1.2.6 一题多解举例 .....	29
1.2.7 确定极限式中的常数值 .....	31
习题 1 .....	34
答案 .....	37
第 2 章 一元函数微分学 .....	41
2.1 主要内容及方法指导 .....	41

2.1.1	基本概念	41
2.1.2	求导公式及求导法则	43
2.1.3	微分中值定理	46
2.1.4	导数的应用	50
2.2	典型例题解析	54
2.2.1	利用导数的定义解题	54
2.2.2	利用导数的四则运算法则及复合函数的求导法则解题	55
2.2.3	隐函数、参数方程的求导方法	58
2.2.4	反函数求导方法	59
2.2.5	利用对数求导法解题	60
2.2.6	应用导数的几何意义及相关变化率解题	61
2.2.7	应用高阶导数的求导法则及公式解题	62
2.2.8	分段函数中未知常数的求法	63
2.2.9	一些特殊函数的求导问题	64
2.2.10	证明含有中值问题的相关结论	67
2.2.11	利用微分中值定理证明含抽象函数的不等式	72
2.2.12	讨论方程根的情况	76
2.2.13	证明恒等式	78
2.2.14	利用导数判别函数的单调性、极值与最值	79
2.2.15	利用导数研究函数的凹凸性及拐点	81
2.2.16	求曲线的渐近线及曲率半径	83
2.2.17	导数在证明不等式方面的应用	84
	习题 2	88
	答案	92
第 3 章	一元函数积分法及其应用	103
3.1	主要内容及方法指导	103
3.1.1	原函数与不定积分	103
3.1.2	定积分及其性质	104
3.1.3	微积分基本定理间的关系	104
3.1.4	变限积分函数求导数和求极限的方法	105
3.1.5	需要注意的几个问题	105
3.1.6	直接积分法	106
3.1.7	换元积分法	106
3.1.8	分部积分法	107
3.1.9	有理函数的不定积分法	108
3.1.10	三角有理函数的积分法	108
3.1.11	简单无理函数的积分法	108

3.1.12	计算定积分的常用公式	109
3.1.13	特殊形式的定积分计算方法	109
3.1.14	利用各种积分技巧计算定积分	110
3.1.15	定积分命题的证明方法	111
3.1.16	反常积分的计算方法	111
3.1.17	定积分解决实际问题的步骤和特点	111
3.1.18	平面图形的面积	112
3.1.19	立体的体积	112
3.1.20	平面曲线的弧长	113
3.1.21	旋转体的侧面积	113
3.1.22	变力所做的功	113
3.1.23	液体侧压力	113
3.2	典型例题解析	114
3.2.1	用原函数概念解题	114
3.2.2	用定积分概念与性质解题	115
3.2.3	与变限积分函数有关的问题	117
3.2.4	直接积分法	119
3.2.5	换元积分法	120
3.2.6	分部积分法	122
3.2.7	有理函数积分法	126
3.2.8	简单无理函数的积分	126
3.2.9	三角有理函数的积分	128
3.2.10	利用牛顿-莱布尼兹公式求定积分	128
3.2.11	利用换元积分法计算定积分	129
3.2.12	利用分部积分公式计算定积分	130
3.2.13	分段函数或绝对值函数的定积分	131
3.2.14	对称区间上的定积分	133
3.2.15	周期函数的定积分	134
3.2.16	反常积分	134
3.2.17	定积分等式的证明	135
3.2.18	定积分不等式的证明	136
3.2.19	平面图形的面积	137
3.2.20	平面曲线的弧长	139
3.2.21	立体体积	140
3.2.22	侧面积	140
3.2.23	综合应用举例	141
3.2.24	定积分在物理学中的应用	143
习题 3		144

答案 .....	149
<b>第 4 章 多元函数微分法及其应用 .....</b>	<b>159</b>
4.1 主要内容及方法指导 .....	159
4.1.1 向量 .....	159
4.1.2 平面和直线 .....	160
4.1.3 空间曲面与曲线 .....	162
4.1.4 多元函数的概念 .....	162
4.1.5 二元函数的极限 .....	163
4.1.6 二元函数的连续性 .....	163
4.1.7 二元函数几个基本概念间的关系 .....	164
4.1.8 高阶偏导数 .....	164
4.1.9 偏导数的计算方法 .....	164
4.1.10 全微分的计算方法 .....	164
4.1.11 复合函数求导方法 .....	165
4.1.12 隐函数求导方法 .....	166
4.1.13 高阶偏导数的计算方法 .....	166
4.1.14 方向导数的计算方法 .....	167
4.1.15 偏导数的几何应用 .....	167
4.1.16 多元函数的极值 .....	168
4.1.17 多元函数的最值 .....	169
4.2 典型例题解析 .....	170
4.2.1 向量的运算和关系 .....	170
4.2.2 向量方法的应用 .....	171
4.2.3 求平面方程与直线方程 .....	172
4.2.4 求与平面和直线有关的其他问题 .....	173
4.2.5 求空间曲面方程与曲线方程 .....	176
4.2.6 求二元函数的定义域 .....	177
4.2.7 求函数值或函数表达式 .....	177
4.2.8 二元函数极限问题的讨论 .....	178
4.2.9 二元函数基本概念有关问题的讨论 .....	179
4.2.10 求显函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数或全微分 .....	182
4.2.11 求抽象复合函数的一阶、二阶偏导数 .....	183
4.2.12 求隐函数的偏导数、全微分 .....	184
4.2.13 求方向导数和梯度 .....	186
4.2.14 偏导数在微分方程中的应用 .....	188
4.2.15 多元函数微分法的几何应用 .....	188
4.2.16 求二元函数的无条件极值 .....	189

4.2.17 求二元函数的条件极值 .....	191
4.2.18 求二元函数的最值 .....	192
习题 4 .....	194
答案 .....	198
<b>第 5 章 多元函数积分学</b> .....	<b>205</b>
5.1 主要内容及方法指导 .....	205
5.1.1 重积分与第一类线面积分的统一定义、性质及应用 .....	205
5.1.2 第二类线、面积分的定义、性质及应用 .....	210
5.1.3 各类积分的计算法 .....	212
5.1.4 各类积分之间的联系 .....	217
5.1.5 使用格林公式、高斯公式及斯托克斯公式时应注意的问题 .....	218
5.1.6 平面上曲线积分与路径的无关性 .....	219
5.2 典型例题解析 .....	220
5.2.1 选择合适的坐标系和积分顺序计算二重积分 .....	220
5.2.2 交换二次积分的积分顺序 .....	224
5.2.3 选择合适的坐标系和积分顺序计算三重积分 .....	225
5.2.4 被积函数中含有绝对值、取整等特殊函数的重积分计算 .....	229
5.2.5 利用对称性、形心公式等方法计算重积分 .....	230
5.2.6 重积分的应用及相关问题 .....	233
5.2.7 曲线积分的计算方法 .....	237
5.2.8 利用格林公式和积分与路径的无关性计算第二类曲线积分 .....	241
5.2.9 曲线积分的应用及相关问题 .....	245
5.2.10 曲面积分的计算方法 .....	246
5.2.11 利用高斯公式计算曲面积分 .....	250
5.2.12 利用斯托克斯公式计算空间曲线积分 .....	253
5.2.13 曲面积分的应用及相关问题 .....	254
习题 5 .....	256
答案 .....	261
<b>第 6 章 无穷级数</b> .....	<b>269</b>
6.1 内容提要及方法指导 .....	269
6.1.1 数项级数的判敛法 .....	269
6.1.2 幂级数的收敛域及求和法 .....	271
6.1.3 函数的幂级数和三角级数的展开法 .....	273
6.2 典型例题解析 .....	275
6.2.1 利用级数的定义与性质讨论级数的敛散性 .....	275
6.2.2 正项级数的判敛问题 .....	276

6.2.3	任意项级数的判敛问题 .....	278
6.2.4	数项级数的证明题 .....	281
6.2.5	求幂级数的收敛域 .....	282
6.2.6	求幂级数的和函数 .....	284
6.2.7	利用幂级数求数项级数的和 .....	286
6.2.8	函数的幂级数展开法 .....	287
6.2.9	函数的傅立叶级数展开法 .....	290
习题 6	.....	293
答案	.....	297
<b>第 7 章</b>	<b>微分方程</b> .....	<b>304</b>
7.1	主要内容及方法指导 .....	304
7.1.1	一阶微分方程的类型及解法 .....	304
7.1.2	可降阶的微分方程及其解法 .....	306
7.1.3	二阶线性微分方程及其解法 .....	307
7.1.4	用微分方程解应用问题的方法步骤 .....	308
7.2	典型例题解析 .....	308
7.2.1	一阶标准类型微分方程求解 .....	308
7.2.2	一阶可化为标准类型方程的求解 .....	310
7.2.3	可降阶微分方程的求解 .....	313
7.2.4	二阶线性微分方程的求解 .....	314
7.2.5	微分方程综合题 .....	315
7.2.6	微分方程在几何、物理等方面的应用 .....	323
习题 7	.....	327
答案	.....	331

# 第 1 章 函数与极限

微积分学是高等数学的主要内容,微积分的基础是函数、极限和连续性,其中函数是研究的主要对象,极限是研究问题的工具,连续性是研究问题的桥梁.本章主要是深化对函数、极限及连续性概念的理解,从高等数学整体的角度理解并熟练掌握求极限的常用方法.

## 1.1 主要内容及方法指导

### 1.1.1 函数的定义域、对应法则及函数值

函数的定义域及对应法则称为函数的两要素.求函数的定义域通常可归结为解不等式或不等式组(使式子有意义而得到的不等式).但若讨论由实际问题所确定的函数的定义域,还要考虑自变量在实际问题中的意义.

求解析式所表示的函数定义域的基本原则是:

(1) 不能使函数的值域超出实数域的范围.例如,偶次根式其根号内的值不能为负;对数的真数应大于零等.

(2) 不能使函数值不存在或不确定.例如,分式中的分母不能为零;反正弦函数  $y = \arcsin x$  应满足  $|x| \leq 1$ ;正切函数  $y = \tan x$  应满足  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k$  为整数)等.

(3) 由有限个函数的四则运算构成的函数,其定义域是各函数定义域的公共部分.

(4) 单调函数的反函数的定义域是这个函数的值域.

(5) 分段函数的定义域是自变量在各段取值集合的总体.

学习函数的对应法则,主要是对函数符号能正确理解和熟练应用.特别应注意的是,两个用不同式子表达的函数,只要它们的定义域和对应法则相同,就视为同一个函数.高等数学中讨论的函数主要有初等函数(指由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数)和分段函数.要注意理解复合函数的意义、特性及运算法则.应注意的是,分段函数是一个函数,只不过是在定义域的不同区间内表达式不同而已.

求函数值要求对函数概念有清晰的认识.特别是在求分段函数的函数值时,一定要弄清楚什么时候用什么表达式计算.

### 1.1.2 函数的几种特性

函数的四大特性,即有界性、单调性、奇偶性和周期性.其中奇偶性的表述如下:

设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ ,且当  $x \in D$  时,有  $-x \in D$ ,则

若  $f(-x) = -f(x)$ ,称  $f(x)$  为奇函数;若  $f(-x) = f(x)$ ,称  $f(x)$  为偶函数.

也可以等价地表述为

$$f(x) + f(-x) = \begin{cases} 2f(x), & f(x) \text{ 为偶函数,} \\ 0, & f(x) \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

### 1.1.3 函数的极限

极限是研究函数的主要工具之一,高等数学中许多概念的建立和定理的证明都要用到它.例如,函数的连续、导数、定积分、重积分、线面积分以及级数的收敛性等都是用极限描述的,可以说用极限建立了微积分的基本内容;反过来,这些概念又丰富了求极限的方法.因此极限是微积分学的基础,是高等数学的基本推理工具,没有极限就没有高等数学的严密结构,所以必须加强对极限重要性的理解.

函数极限中自变量的变化过程有六种情况,其定义分别如下:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x < -X \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0, \text{当 } x > X \text{ 时, } |f(x) - A| < \epsilon.$$

式中,符号“ $\forall$ ”表示任意,“ $\exists$ ”表示存在.

**注意** (1) 数列极限是函数极限的特殊情况.

(2) 极限的定义是描述性的,它没有提供求极限的具体方法,但却可以用来验证极限,在用定义验证极限时,要对任意给定的正数  $\epsilon$ ,从结论  $|f(x) - A| < \epsilon$  出发,找相应“存在”的正数  $\delta$  或  $X$ .

(3) 通常记  $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ,  $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,分别称为  $f(x)$  在点  $x_0$  处的左极限和右极限.

### 1.1.4 极限的性质、存在准则及重要公式

#### 1. 极限的性质

极限的基本性质有:唯一性、有界性及局部保号性.

极限的四则运算法则:

对同一自变量的变化过程,设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ,  $A$  和  $B$  为有限常数,则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB.$$

特别地,对常数  $C$ ,有  $\lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = CA$ .

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0).$$

上述性质可推广到有限次四则运算情形.

无穷小的运算法则:

(1) 有限个无穷小的代数和(积)仍是无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

(3) 若当  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$  存在或为  $\infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$ .

(4) 若  $\beta = o(\alpha)$ , 则  $\alpha \pm \beta \sim \alpha$  (和差取大原则).

## 2. 极限的存在准则

**准则1(单调有界准则)** 单调有界数列必有极限.(函数的相应准则略)

**准则2(夹逼准则)** (1) 若存在正整数  $N$ , 当  $n > N$  时, 恒有  $y_n \leq x_n \leq z_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

(2) 若存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 恒有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

## 3. 极限的重要公式及重要关系

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

(4) 当  $x \rightarrow 0$  时, 有以下常用等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \arctan x \sim x,$$

$$\arcsin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (\mu > 0), \quad \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \sim x.$$

值得注意的是, 以上公式中的  $x$  可以同时换成函数  $f(x)$ . 例如,  $f(x) \rightarrow 0$  时, 有  $\sin f(x) \sim f(x)$ . 又如,

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1, \quad \lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e.$$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = C$  ( $C \neq 0, k > 0$ ), 则  $f(x)$  是  $x$  的  $k$  阶无穷小.

$$(6) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A.$$

$$(7) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{或 } x \rightarrow \infty}} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中, } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{或 } x \rightarrow \infty}} \alpha = 0.$$

(8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{或 } x \rightarrow \infty}} f(x) = A$  (或  $\infty$ )  $\Leftrightarrow$  对任意以  $x_0$  (或  $\infty$ ) 为极限的数列  $\{x_n\}$  ( $x_n \neq x_0$ ), 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \text{ (或 } \infty \text{)}.$$

(9) 无穷小(不为零)的倒数是无穷大, 无穷大的倒数是无穷小.

### 1.1.5 函数的连续性

函数的连续性包括函数在一点的连续性和函数在某区间  $I$  上的连续性,后者以前者为基础.函数  $f(x)$  在一点的连续性定义是以函数概念和极限概念为基础的,描述函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的连续性有下面四种等价形式:

$$(1) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \text{ 其中, } \Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0);$$

$$(3) f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0);$$

$$(4) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon; \text{ 当 } |\Delta x| < \delta \text{ 时, } |\Delta y| < \varepsilon.$$

在具体讨论函数的连续性问题时,可根据问题的要求从中选择一种形式.一般地,检验初等函数的连续性时通常用形式(1)或形式(2);求连续函数的极限时通常用形式(2);讨论分段函数在分界点的连续性时,通常用形式(3);论证问题时通常用形式(4).

如果对区间  $I$  上每一点  $x$ ,函数  $f(x)$  都连续,则称函数在区间  $I$  上连续;如果函数在定义域内每一点都连续,则称函数是连续函数.

### 1.1.6 闭区间上连续函数的性质

当函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续时,有下列性质:

**性质 1(有界性定理)**  $\forall x \in [a, b], \exists K > 0, \text{ 有 } |f(x)| \leq K.$

**性质 2(最值定理)**  $\exists x_1, x_2 \in [a, b], \text{ 有 } f(x_1) = m, f(x_2) = M, \text{ 其中, } m = \min_{x \in [a, b]} f(x), M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$

**性质 3(介值定理)**  $\forall C \in [m, M] \text{ (} m \text{ 和 } M \text{ 的意义同性质 2), } \exists \xi \in [a, b], \text{ 使 } f(\xi) = C.$

**推论(零点定理)** 当  $f(a) \cdot f(b) < 0$  时,则  $\exists \xi \in (a, b), \text{ 使 } f(\xi) = 0.$

闭区间上连续函数的重要性质,在讨论方程根的存在性及最值等问题中都非常有用,因此必须充分理解并会运用.

### 1.1.7 函数的间断点

讨论函数的间断点,可利用连续概念及其等价命题的否命题.由于函数在点  $x_0$  连续必须同时满足下列条件:

- (1)  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有定义;
- (2) 左极限  $f(x_0^-)$  与右极限  $f(x_0^+)$  都存在;
- (3)  $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$

不符合上述三个条件之一的点  $x_0$  称为  $f(x)$  的间断点.

间断点分为两类:

若  $f(x_0^-)$  与  $f(x_0^+)$  均存在称为第一类间断点,否则称为第二类间断点.具体地,第一类间断点又分为可去间断点[当  $f(x_0^-) = f(x_0^+)$  时]和跳跃间断点[当  $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$  时].

第二类间断点有无穷间断点[ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ]和振荡间断点等.

### 1.1.8 求极限的基本方法

熟练地掌握计算函数或数列的极限是学习高等数学的基本要求. 求极限的方法很多, 下面介绍求极限的基本方法, 再介绍用其他微积分知识求极限的特殊方法.

#### 1. 利用极限定义求极限

对于某些抽象形式的极限(如用递推关系式给出的数列极限), 如果不易判断极限是否存在, 则可用某种方法先形式地求出极限, 再用极限定义验证.

#### 2. 利用极限存在准则求极限

极限存在准则不仅可判断数列或函数的极限是否存在, 而且也是求极限的有效方法.

(1) 利用夹逼准则求极限, 关键在于对已知函数或数列的通项同时放大与缩小, 寻找两个形式尽量简单的函数或数列, 从两侧逼近相同的极限. 这种夹逼求极限的方法, 也可用于近似计算与定积分估值.

(2) 利用单调有界准则求极限, 多用于求由递推关系式给出的数列的极限.

证明有界性的常用方法有: 从数列的递推关系式观察, 用已知不等式推出, 利用归纳法证明, 利用单调性证明.

证明单调性的常用方法有: 比值法——讨论  $x_{n+1}/x_n$  与 1 的关系; 差值法——讨论  $x_{n+1} - x_n$  与 0 的关系; 由  $x_n$  找出一个连续函数  $f(x)$ , 使  $f(n) = x_n$ , 考察  $f(x)$  是否具有单调性; 用数学归纳法或其他方法直接比较  $x_{n+1}$  与  $x_n$  的大小.

(3) 对由递推关系给出的数列, 求极限时一般还可用解方程的方法, 但必须证明极限存在, 否则可能会出现错误.

例如, 数列  $x_1 = 2$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 若令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 则由递推关系有  $A = A^2 - 1$ , 解得  $A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , 舍去负值, 有  $A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , 但实际上  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

#### 3. 利用极限或无穷小的运算法则求极限

对于比较简单的极限式, 可以利用极限的四则运算法则与无穷小的运算法则直接计算求得, 但要特别注意必须满足法则使用的条件.

#### 4. 利用函数的连续性求极限

如果  $x_0$  属于函数  $f(x)$  的连续区间, 则由函数的连续性可知  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 应当注意, 许多未定式的极限可以通过恒等变形(如分解因式, 分子分母同乘共轭根式或同除无穷大、无穷小因式, 三角函数恒等变形等)或变量代换, 转化为连续函数的极限.

#### 5. 利用变量代换求极限

当极限式比较复杂时, 有时可通过变量代换使问题得到简化.

例如, 求复合函数的极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$ , 可令  $u = \varphi(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} u = a$ , 便有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow a} f(u).$$

#### 6. 利用等价无穷小求极限

利用等价无穷小替代极限式中的函数表达式是简化极限计算的一种常用的方法, 熟悉的等价无穷小对于计算极限是极为有用的. 但应注意, 做乘除运算时, 可尽量运用表达

式简单的等价无穷小代换复杂函数;做加减运算时,不能随便用等价无穷小代换.

### 7. 利用重要极限公式求极限

在求极限时,经常使用重要极限式  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  与  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ,关键是抓住它们的特征.

通常,含有三角函数及反三角函数的  $\frac{0}{0}$  型极限式,可利用  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  来计算; $1^\infty$  型极限式,可利用  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  或  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  来计算.

### 1.1.9 求未定式的极限

形如  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  形式的极限称为未定式极限,求未定式的极限主要用如下方法:

(1) 通过适当的代数或三角恒等变换等方法,消去零因式及无穷大因式,转化成连续函数的极限等简单形式.

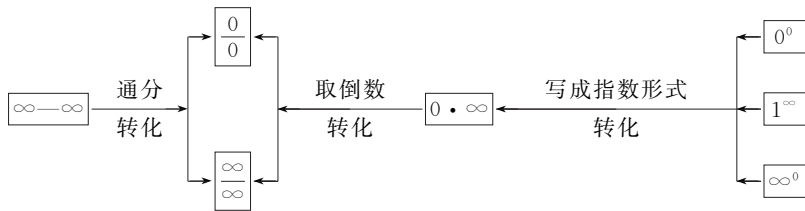
(2) 通过适当的变量代换或等价无穷小代换,使未定式转化成容易求极限的形式,或转化成两个重要极限的形式.

(3) 利用洛必达法则. 对同一自变量的变化过程,若  $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$  呈  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型,且  $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在或为  $\infty$ ,则  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

使用洛必达法则求未定式的极限时必须注意:

(1) 只有  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式,且满足洛必达法则的条件才可用,其他几种形式的未定式必须先转化成  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型再考虑能否用.

通常的转化方法如下:



一般地,设  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ,则有  $\lim u^v = \lim e^{v \ln u} = e^{\lim \frac{\ln u}{\frac{1}{v}}}$ ,

这样,可将  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  型未定式转化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型.

(2) 当导数之比的极限既不存在也不为  $\infty$  时,则不能用洛必达法则,但这一条件可边用边验证,若不满足再改用其他方法.

例如,  $\frac{\infty}{\infty}$  型极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

但若用洛必达法则,就有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

若由于  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  不存在,得原极限不存在.显然这种方法是错误的.因为它不满足洛必达法则条件,故不能用.

(3) 将洛必达法则与其他求极限的方法(尤其是等价无穷小)联合使用,常可以简化计算.如果函数中某些因式的极限已确定,可将这些因式分离出来求极限,对余下的未定式部分使用洛必达法则,以使问题简化.例如

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2}(\sin x - x)}{\ln(1+x^3)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2+x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

(4) 若数列的极限为未定式,可先将  $n$  换为连续变量  $x$ ,然后对极限过程  $x \rightarrow +\infty$  使用洛必达法则计算极限,最后再利用数列极限与函数极限的关系写出相应数列的极限.

(5) 洛必达法则不是万能的,有时会出现循环式.

$$\text{例如, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

由于产生循环,无法求出极限.但分子和分母同除以  $e^x$ ,可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

### 1.1.10 利用导数或定积分定义求极限

如果函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的导数存在,可考虑利用导数定义求函数的极限;如果数列的通项可转化为积分和  $\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$  的形式,且定积分  $\int_0^1 f(x) dx$  存在,则由定积分定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

一般地,若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx.$$

### 1.1.11 利用中值定理求极限

如果函数  $f(x)$  含有区间两端点增量形式的因子,可考虑用微分中值定理求极限.对某些含有定积分表达式的极限问题,可用积分中值定理去掉积分号,化为普通的函数极限问题进行计算.