Bifurcation Problems and Numerical Methods for Them

分岔问题及其计算方法

武际可　黄克服　著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

分岔问题及其计算方法

武际可　黄克服　著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

分岔问题是实质非线性问题。随着非线性问题被数学、物理、力学、气象、地球科学、生物学等自然科学以及经济、心理等社会科学日益关注，分岔问题也得到更多的注意。本书是作者及他们的学生在这一领域经过二十多年的研究成果的总结。

本书共分五章，讨论了非线性系统的等价类、稳定性、局部和全局分岔、静分岔与 Hopf 分岔等问题，并且讨论了这些问题的数值计算方法。作为算例，给出了一些重要实际问题的计算结果。

本书可以作为大学力学、数学、物理等专业的教师、研究生和大学生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

分岔问题及其计算方法/武际可，黄克服著．—北京：北京理工大学出版社，2019.7

ISBN 978－7－5682－7280－3

Ⅰ．①分…　Ⅱ．①武…　②黄…　Ⅲ．①非线性理论－研究　Ⅳ．①N93

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 146560 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／
开　　本／710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张／11　　责任编辑／钟　博
字　　数／164 千字　　文案编辑／钟　博
版　　次／2019 年 7 月第 1 版　2019 年 7 月第 1 次印刷　　责任校对／周瑞红
定　　价／66.00 元　　责任印制／李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　　言

分岔问题的实质是非线性问题。随着非线性问题在数学、物理学、力学、气象学、地球科学、生物学等自然科学以及经济、心理等社会科学领域日益重要，分岔问题得到了更多重视。

由于非线性问题的复杂性，数值方法已成为解决分岔问题的主要手段。近十多年来，本书作者对于分岔问题有着共同的兴趣，并在此基础上共同指导了多名博士生和硕士生，和学生们共同发表了多篇论文。本书就是这些工作的一个总结。

从 1999 年起，本书作者有幸得到国家自然科学基金重大项目“大型旋转机械的非线性动力问题研究”的资助，负责有关数值分析方法的子课题。这个项目的支持改善了我们的研究条件，提供了我们与兄弟单位合作和交流的机会。在项目的推动下我们完成了许多新的工作。本书也可以作为参加这个项目的一个总结。

多年来的研究使我们认识到，分岔问题的数值方法是一个广阔的领域，我们的工作只涉及很小的一部分，还只是个开始。达到能够自由处理各种各样的分岔问题的目的，我们还需要走很长的路。本书所总结的工作肯定还存在不少疏漏，

其中提到的一些问题还需要进一步发展，敬请读者指正和完善。

我们对多年来和我们在共同方向上努力工作的研究生们表示感谢，本书也包含了他们的劳动成果，如季海波、李辉、周鲲、王林祥、郑作昌、包燕刚、金明、张彦、林文惠。我们还要对国家自然科学基金委员会资助项目（19990510）表示诚挚的感谢。

附记：本书完稿于 2006 年，因原来所联系的出版单位拖拉，本书的出版工作一拖 12 年。后幸得周立伟院士将本书推荐给北京理工大学出版社本书才得以顺利出版。特此向周立伟院士和北京理工大学出版社致谢。作者还要感谢北京埃特光电子技术有限责任公司对本书出版的资助。

武际可　黄克服

目　　录

绪　论

分岔的概述

道路可以分岔，树枝可以分杈，这在日常生活中是常见的。而在现代自然科学中，特别是在物理学、化学、力学、生态学、气象学中，“分岔”（bifurcation）这个名词频繁地出现。这个名词有多种译法，如“分岔”“分歧”“分支”或“分枝”。它在这里的含义，不像道路分岔或树枝分杈那样具体，有点抽象和难以捉摸，但是在众多的领域中越来越多地被提到，说明它的重要性越来越大，这是从事自然科学研究和教学的人应当了解的。它的含义是什么呢？本书将在这里给予简单介绍。

0.1　从一个例子说起

为了具体说明什么是分岔现象，先举一个比较简单的例子。

如图 0.1.1 所示，考虑一个半径为 a 的光滑圆环，绕它的一根铅垂直径以等角速度 ω 旋转。在圆环上有一个质量为 m 的光滑小环。现在求小环在大环上的位置。

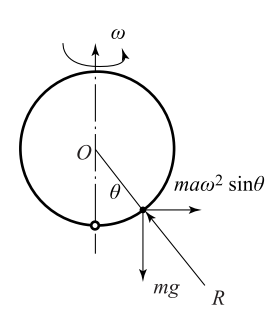

图 0.1.1　分岔示例

设小环处于大环上与铅垂线成 θ 角的位置。小环受大环的约束力 R 必然是垂直于大环的方向，作用在小环上的惯性力是水平方向，重力是铅垂方向。作用在小环上的这三个力应当保持平衡，所以有

$$\frac{ma\omega^2\sin\theta}{mg}=\tan\theta,$$

即

$$\sin\theta\left(\frac{a\omega^2}{g}-\frac{1}{\cos\theta}\right)=0.$$

由这个式子可以计算出 θ 和 ω 的关系，将二者的关系曲线画在图上，得到图 0.1.2 所示的两条线：一条是 $\theta=0$，另一条是

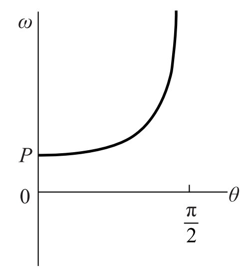

图 0.1.2　θ 与 ω 的关系

$$\theta=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right).$$

后一条曲线是从点

$$P=(\theta,\ \omega)=\left(0,\ \ \pm\sqrt{\frac{g}{a}}\right)$$

分出来的，即 $\omega=\omega^*=\pm\sqrt{\frac{g}{a}}$，$\theta$ 不再是 0，而逐渐随 ω 增加。当 θ 趋近 $\pi/2$ 时，转速 ω 趋于无穷。点 P 就称为分岔点。整个问题的解在分岔点处分为两支，称为分岔现象。

这个例子是一个典型的、简单的分岔问题。在这个例子中，θ 是表征系统状态的量。此外，在系统中还包含一个参量 ω。显然系统的状态是依赖于参量 ω 的。当 $\omega<\omega^*$ 时，系统只有唯一的解，即小环处于 $\theta=0$ 的平衡位置。这时，平衡是稳定的。当 $\omega>\omega^*$ 时，$\theta=0$ 的平衡解是不稳定的，即出现了另外一支解，小环处于

$$\theta=\arccos\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$$

的状态，随大环以角速度 ω 旋转。也就是说，在系统的分岔点处，原来的平衡状态成为不稳定的，即出现了另外一个稳定的状态分支。

从这个例子中，可以看出一个具有分岔现象的系统要有以下几个条件：

（1）要求有一组描述系统状态的量。在上面的例子中，θ 就是这样的量。在一个复杂的系统中，描述系统状态的量可以是很复杂的，它们可以是由许多数组成的向量或矩阵，也可以是描述过程的时间和空间的函数，还可以是由许多函数

组成的函数向量或矩阵。由于使用了复杂的描述状态的数量系统，人们可以描述自然界中十分复杂的现象和过程。例如，刚体绕固定点运动，如导航控制中的陀螺的运动就需要 3 个角度来确定它的状态；飞机的飞行姿态则需要 6 个参数来确定；梁和杆的变形需要用一个定义在长度上的函数来确定它的挠度；确定大气流动情况需要在空间的每一点上都给定 3 个速度分量，它们是空间和时间的 3 个函数；等等。总而言之，只要引进了适当的描述状态的参量系统，自然界中的现象，不论是天上的白云、海里的波浪、反应罐中的化学反应过程，还是股票市场的涨落，都可以描述。

（2）要求有一组表征过程的参量。在上面的例子中，这个参量就是表征旋转角速度的 ω。在实际问题中，为了使问题不过分复杂，这种参量只取一个，也称为系统的分岔参数。不过这个参量的实际意义可以是各式各样的，它可以是转动角速度，还可以是速度、加速度、长度、角度、温度、电磁场强度、时间、质量、密度、黏性系数等。于是本书所讨论的问题就不仅是关于系统的一个状态，而是在参量变化时考虑系统的状态依赖参量变化的过程。上例所讨论的是系统的状态 θ 依赖旋转角速度 ω 变化的过程。在实际的复杂系统中，就是要研究这些复杂系统的状态随所选定的参量的变化过程。

（3）要有一组控制系统状态的方程，即描述系统状态的量所必须满足的方程。在上面的例子中，平衡方程就是这样的方程。这组方程通常是根据系统的状态所遵从的物理化学规律得到的，它的复杂程度和描述系统状态的量的复杂程度是相关的。在上面这个简单的例子中，一个方程就够了，在状态由多个量描述的系统中，一般来说，有多少个量，就要有多少个方程。进一步，如果系统的状态是由函数描述的，则这种方程还需要是常微分方程（状态量是单自变量函数的情形）或偏微分方程（状态量是多自变量函数的情形）。对于分岔现象来说，方程必须是非线性的，即在方程中，问题的未知量，包括系统的分岔参数，它们不能只以一次项的形式出现。

关于非线性，还需要略作介绍。设描述系统的 n 个状态量为 x_1，x_2，…，x_n，如果系统的 n 个控制方程是

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i(i = 1, 2, \cdots, n),$$

其中，$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 都是常数。这种形式的方程称为线性方程。研究表明，由线性方程控制的系统是不可能有分岔现象的。不过也不是所有的由非线性方程所控制的系统都会产生分岔现象。例如，在平面上画一条弯曲的光滑曲线，它不是直线，所以是非线性的。但是这条曲线上并没有分岔点。而本书所举的例子中解曲线是由在分岔点处相交的两条光滑曲线组成的，所以分岔问题是非线性问题，但是它比一般的非线性问题更为复杂，因此分岔问题也称为实质的非线性问题。这是因为，对于一般没有分岔的非线性问题，可以逐段用线性问题来逼近，如同平面曲线可以用逐段的直线去逼近。对于分岔问题，在分岔点附近，是不可能用线性问题去逼近的，就像在上面的例子中，过图 0. 1. 2 中的 P 点作直线，只能逼近解的一支而不能对两支都逼近。

0. 2　形形色色的分岔现象

最常见的分岔有两类：一类是平衡解的分岔，如果在旋转的圆环中来看小环，上面的例子就是一个平衡解的分岔，最初小环在大环的最低点平衡，当旋转参数 ω 超过临界值后，小环就在大环的另一点平衡，这种分岔也叫静分岔；另一类是霍普夫分岔，它是由平衡状态分出一支周期运动，在上面的例子中，如果在固定参考系中看小环，在临界转速后，小环便产生了一个周期运动。

例如，一根理想的弹性直杆，在两端压力 p 的作用下，直杆总是处于一种平衡位置。如果把图 0. 1. 1 中的 ω 轴换作参数 p，把状态 θ 换为杆中点的挠度 w，则在压力 p 的作用下，直杆中点的挠度为零是一种平衡状态。当压力 p 增大时，起初杆还是直的，一旦 p 超过了某个临界压力 p^*，直杆的状态就不再是稳定的了，而是产生了弯曲变形，w 与 p 的关系类似于图 0. 2. 1 所示的曲线。可以看到，当超过临界压力时，挠度随压力的增加是很快的。这是一类典型的静分岔问题。

我们知道，许多结构物都是由受压的杆或其他受压元件组成的，这些结构的受压部分的状态也像受压杆一样，当超过某个临界压力时，结构的挠度或变形会迅速增加而常常导致结构破坏。

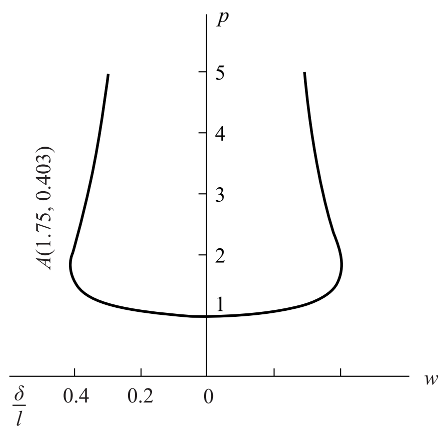

图 0.2.1　w 与 p 的关系曲线

人们常见的口琴上有许多簧片。拿其中的一片来看，当吹的口风小时，簧片不发生运动。而当吹的口风稍大时，即超过了某个临界风速，簧片就会产生周期运动而振动起来。这是一种典型的霍普夫分岔。风琴、唢呐、单簧管、双簧管、号、笛等乐器都是利用这个原理制作的。当然，霍普夫分岔并不只可以被用来制作乐器给人们带来快乐，它也会给人带来烦恼和灾难。

几乎所有的噪声，如树叶的沙沙声、机器的隆隆声、摩擦噪声、水管中流水的嗡嗡声等都是和霍普夫分岔相关的。在 20 世纪三四十年代，航空中曾经发生过一种可怕的空难，即在飞行中当速度超过某个临界值时，机翼产生突然的“颤振”，导致机毁人亡。如果把机翼看作口琴上的簧片，那么“颤振”现象就容易理解了。1940 年美国建造了一座吊桥，即长 853.4 m 的塔科马（Tacoma）大桥。大桥建成后不久，同年 11 月 7 日的一场不大的风（风速仅为 19 m/s）引起了振幅接近数米的“颤振”，在这样大振幅振荡下大桥很快便塌毁了。

在生态学研究中，有一种“捕食者”模型。该模型研究两种动物，如大鱼和小鱼，大鱼吃小鱼。一般来讲，大鱼和小鱼可以在一定的数量上达到平衡。不过，还有一种更为常见的现象是，大鱼、小鱼的数量周期性地振荡变化。当大鱼多时，小鱼就少了，于是大鱼就因为找不到食物而饿死数量（减少）；大鱼少了，小鱼又因为没有天敌而大量繁殖（数量增加）。这种振荡也是一种典型的霍普夫分岔。同样，股票市场的涨落、经济危机的周期性发生、沙漠中沙丘的周期

性起伏、心脏从正常跳动转化为颤动等都属于分岔现象。

1900 年，法国人白纳（Benard）做了一个试验。以温度均匀的水平金属板盛放一薄层液体。当加热金属板且上下的温差不大时，液体处于静止状态，热量是通过热传导的方式自下向上传递的。当温差达到某个临界值时，静止平衡的液体成为不稳定的，液体开始流动。此时流场成规则的胞状结构，在每一胞中，流体自中心至边沿形成环流。这个现象解释了白天在日照下地面温度升高后局部地区风的成因。

在物理学中，19 世纪中叶人们就发现物质的气、液、固三态之间的变化是依赖于压力和温度等参数的，并且发现这些相态之间的变化和临界参数有关，如临界温度、临界压力等。水在普通气压的条件下在 100 ℃时沸腾，变为气相。这 100 ℃就是一种临界温度，也就是一个相变的分岔点。临界现象在磁学、电学中还可以找到许多。

分岔现象的例子已经列举了许多，这些例子足以说明它同现代自然科学与技术的联系十分紧密。这也就是为什么分岔现象近年来得到越来越多的重视。

0.3 分岔现象研究的过去和将来

分岔现象的研究可以追溯到关于平衡的稳定性问题的提出。1644 年，意大利物理学家托里拆利给出了关于平衡的稳定性的最原始的提法。他说：“如果物体的重心可以沿一个球面运动，而且将物体提离球的最低点，则物体不可能保持静止。”1788 年，法国学者拉格朗日在他的《分析力学》中将托里拆利的平衡条件加以推广，提出：“当保守系统处于势能严格极小的状态时，系统处于稳定平衡。”这是判断静力平衡稳定性的最早的一般论述。当平衡系统依赖于参数时，稳定性就可以随参数的变化而发生改变。这种从稳定到不稳定，或者从不稳定到稳定的变化，就是静力平衡问题的分岔。在托里拆利讨论平衡的稳定性之后，过了 100 年，欧拉在 1744 年给出了弹性受压杆在屈曲（直杆平衡不稳定）后的大变形分析，即欧拉弹性线，这可能是关于弹性体平衡分岔的最早的例子。

最早关于动力学分岔的研究，大概是从法国学者庞加莱开始的。1855 年，

他在研究万有引力场作用下的旋转流体团时，经过精密的计算后得到结论：“让我们想象一个旋转的流动物体由于冷却而收缩，但是收缩慢得足以保持均匀，并使旋转在一切部分都一样。一开始，形状很近似一个球的这团物体，变成一个旋转椭球，它将变得越来越扁，然后在某个一定的时刻，它将变成一个有三个不同轴的椭球。再后来，形状不再是椭球，而成了梨形，直到最后这一团物体在它的腰部越来越凹进去，分成两个隔开的、不同的物体为止。”庞加莱还提出了在非线性振动问题中存在极限环的现象。所谓极限环，就是考虑在平面上运动的质点，它的轨道趋近于一条封闭曲线，这条封闭曲线就称为这个问题的极限环。庞加莱的这些研究工作都是针对在天体力学中提出的问题而得到的。

自然科学中的普遍问题，特别是力学中的重大课题，经常是从两方面提出来的：一方面是从天文学中提出来的，另一方面是从地球上的生产实践中提出来的。周期解和极限环的问题也是这样。

1782 年，瓦特发明了蒸汽机上的离心调速器。起初这些调速器工作得很好，可是随着蒸汽机的功率增大，有些调速器就不灵了，蒸汽机的速度产生了振荡现象。这就是一种周期解。如何消除这种有害的振荡，成为改进蒸汽机的关键。后来，这种现象促使人们从理论上加以研究，最早的是麦克斯韦，他在 1868 年发表论文讨论这一问题，并且给出了一个使调速器稳定工作的条件。在二极管（1904 年）和三极管（1906 年）被发明后，人们利用三极管制成了用于通信的振荡器。电子振荡器的状态变化也是一种周期运动。1926 年，人们研究了一个描述电子振荡器状态的微分方程，称为范德伯尔方程，这个方程中只含有一个参数。周期解的形状是随这个参数变化的。它正好具备了前面介绍的关于讨论分岔问题所必需的三个条件，所以它是从一般观点讨论动力学分岔的一个典型例子。

1928 年，苏联力学家安德罗诺夫在讨论振动和极限环时引进了自振的概念。随后德国数学家霍普夫在 1942 年严格论证了一个动力系统从平衡解转化为周期解的条件。这个结论说明分岔在动力系统中是十分普遍的现象，所以后人把从平衡状态进入振荡状态的分岔称为霍普夫分岔，也有人称之为安德罗诺夫 – 霍普夫分岔。

现在看来，分岔可以看作一个依赖于参数的系统，当参数达到某个值，即临

界值时，系统的状态发生了与原来状态明显不同的变化。从这种观点来看，自然界中的许多现象，凡是发生突然变化，而且变化前后有显著不同的情况，都可以从分岔的角度加以研究，不管这个系统是属于科学的、技术的、经济学的、心理学的，还是社会学的。

湍流是常见的现象，不管观察河水的流动还是烟筒中冒出的烟，都可以看见湍流。它被认为是近代科学中的一大难题。所谓湍流，是指流体微团作不规则运动。它和层流不同，层流中流体微团是作光滑的、规则的运动。流体力学中对于层流转为湍流，即湍流的形成机理的研究，是非常重要的基本理论课题。近年来，人们较多地从分岔的观点来研究这一课题，因为人们认为既然湍流和层流有着显著的特点，它们显然是同分岔相联系的。有的人认为无穷多次分岔产生湍流，也有人认为若干次分岔便可以产生湍流。

近年来在整个自然科学界中还有一个非常时髦的名词:“混沌”。所谓混沌，大略说来，是系统呈现出一种不规则的状态。在机械振动中有混沌，在电子运动中有混沌，在小行星的转动中也有混沌。人们把混沌理解为不同系统中的湍流。由于混沌的普遍性，有人提出“处处有湍流”的论点。与对湍流的研究一样，既然系统的规则运动状态同它的混沌状态有着显著的不同，人们也把它看作一种分岔，从分岔的角度加以研究。

总之，对分岔问题的研究，一方面来自各个具体的出现分岔现象的领域，这种研究的目的在于揭示那些具体领域中现象的本质；另一方面，人们把分岔作为一种各个领域共有的普遍规律来研究，旨在发现分岔问题的共同规律。前一方面的研究属于各门具体的学科，而后一方面的研究则是数学或数学物理的课题。由于在分岔研究中，人们遇到越来越复杂的方程，这些方程又都是非线性的，所以大多要借助计算机去发现分岔点和追踪系统分岔后的行为。因此，关于分岔问题在计算机上的数值方法，就成为分岔研究和数值方法的一个重要的研究方向。

第 1 章

动力系统的分岔

1.1　动力系统

1.1.1　动力系统的定义

动力系统的概念来自力学，最早使用这个名词的是法国数学家亨利·庞加莱（Henri Poincaré，1854—1912），他在 1881—1886 年发表的重要著作《微分方程所定义的积分曲线》中，把从力学中的动力学所提出来的常微分方程组称为动力系统。随后，1917 年，美国数学家伯克霍夫（George David Birkhoff，1884—1944）发表了论文《二自由度的动力系统》，系统地发展了庞加莱的思想，1928 年他发表了研究专著《动力系统》，奠定了现今数学动力系统的基础。现在引进动力系统的概念。

设有一个系统 $\boldsymbol{S}$，它在时刻 t 的状态可以由 $\boldsymbol{x}(t)$ 表示，则它在时刻 $t+\Delta t$ 的状态可以单值地由下式确定：

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}(t),\ t,\ \Delta t) \tag{1.1.1}$$

式中，$\boldsymbol{T}$ 是算子，它可以是微分算子、积分算子、矩阵算子等，它可以是线性的，也可以是非线性的，由它确定状态由时刻 t 到下一时刻 $t+\Delta t$ 变化的过程，其中 Δt 可以取任意值，也可以取固定值。

如果 $\boldsymbol{T}$ 不依赖于时间 t，则动力系统称为自治的，否则称为非自治的。有时