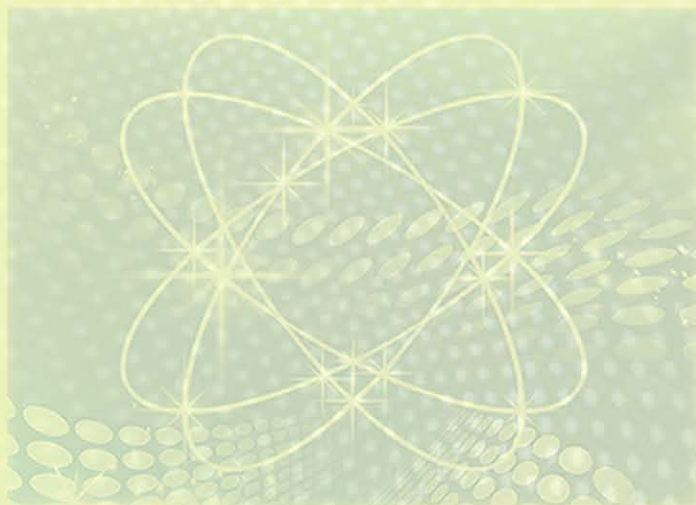


中等职业学校教学配套用书

创新学案 数学 第一册

刘景通 主编



电子科技大学出版社



鸿博教育

丛书主编 刘景通

中等职业学校教学配套用书

ZHONGDENG ZHIYE XUEXIAO JIAOXUE PEITAO YONGSHU

创新学案

CHUANGXIN XUEAN

S

数学

执行主编 仇靖泰

编委 (按姓氏笔画)

毛 韪 仇靖泰 朱汉明

刘小平 薛纪凤

第一册



电子科技大学出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

创新学案. 数学. 第1册 / 刘景通主编. -- 成都 :
电子科技大学出版社, 2013.8

ISBN 978-7-5647-1776-6

I. ①创… II. ①刘… III. ①数学课—中等专业学校—
教学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 181415 号

中等职业学校教学配套用书

创新学案 数学 第一册

丛书主编 刘景通

出 版：电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦 邮编：610051）

策划编辑：吴艳玲

责任编辑：吴艳玲

主 页：www.uestcp.com.cn

电子邮箱：uestcp@uestcp.com.cn

发 行：新华书店经销

印 刷：杭州华艺印刷有限公司

成品尺寸：185 mm × 260 mm 印张：11.25 字数：273 千字

版 次：2013 年 8 月第一版

印 次：2013 年 8 月第一次印刷

书 号：ISBN 978-7-5647-1776-6

定 价：26.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

- ◆ 本社发行部电话：028-83202463；本社邮购电话：028-83208003
- ◆ 本书如有缺页、破损、装订错误，请寄回印刷厂调换。

前 言

近年来，不少学生都有这样的困惑：明明教材都熟悉了，课堂上老师的讲解也听懂了，但考试的时候却取不到好的成绩。原因有很多，但最主要的在于考试是源于教材而高于教材的，教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别，这就要求学生在教材之上、课堂之外能够得到补充和提升，以达到应对考试的要求。鉴于此，我们邀请了一批长年奋斗在教学研究一线的骨干教师，在深入研究考试大纲的基础上，结合教与学的实际情况，精心编写了“创新学案系列”丛书。

本套丛书具有以下两大特点：

一是对教材的深度挖掘。我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识的内涵和外延以及知识间的联系得以充分展现。

二是对课堂教学的补充和拓展。本套丛书不是对课堂教学的简单重复，而是在课堂教学的基础上进行补充和提高，将学生难以理解和掌握的内容进行归纳和总结，提供了一系列全新的学习思路。

本套丛书包括语文、数学、英语三个学科。

语文 按课文编写，与教学同步。针对职高学生的特点，我们以教材为依托，进行了深入的挖掘，力求做到细致与全面并举，实用与创新共存。每篇课文均以作者知识与写作背景为切入点，拓宽学生眼界，加深其对文章的理解。重点字词的罗列，方便学生夯实基础。对课文主旨、文章结构、写作特点、重点语句等的归纳总结全面细致，井然有序，充分展现了知识点之间的联系，使学生对课文的谋篇布局一目了然。所附的配套习题难易适中，知识考查以课内为主，课外为辅，方便学生检测学习效果。

数学 按章节课时编写，与教学同步。全书以考纲为指导，以教材为依托，以知识点为脉络，合理编排。知识点的讲解由浅及深，从基础概括到拓展延伸，从典例解析到误区分析，各板块联系紧密，循序渐进。重点突出解题方法、解题技巧、解题思路的整理，提供多元化思考，力求授人以渔，培养学生融会贯通、举一反三的能力。所附的配套练习题题量适中，梯度设置，方便学生对所学知识的检测，提升应试能力。书中附有各章测试卷，方便老师检测和学生自测。

英语 按单元分课时编写，与教学同步。全书以考试大纲为导向，以教材为脉络，整合单元知识要点，归纳出重点单词、短语及语法等，在此基础上提炼重点知识并辅以典型例题，进行详细解析，以语法项目为联系，从词到句，从时态到语态，对教材进行了全面梳理，具有很强的实用性和综合性。每一课时后均附有针对性极强的练习，方便学生学以致用，更好地掌握所学知识。书中附有各章测试卷，方便老师检测和学生自测。

由于时间仓促，书中错漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

本丛书编写组

E-mail: hongbo0571@163.com

目 录

第 1 章 集合

§ 1.1 集合与元素	2
§ 1.2 集合的表示法(一)	5
§ 1.2 集合的表示法(二)	8
§ 1.3 集合之间的关系(一)	11
§ 1.3 集合之间的关系(二)	13
§ 1.4 集合的运算(一)	15
§ 1.4 集合的运算(二)	18
§ 1.4 集合的运算(三)	20
§ 1.5 充要条件(一)	22
§ 1.5 充要条件(二)	25

第 2 章 不等式

§ 2.1 不等式的基本性质(一)	28
§ 2.1 不等式的基本性质(二)	31
§ 2.2 区间	34
§ 2.3 一元二次不等式(一)	37
§ 2.3 一元二次不等式(二)	40
§ 2.3 一元二次不等式(三)	43
§ 2.4 含绝对值的不等式	46

第 3 章 函数

§ 3.1 函数的概念(一)	50
§ 3.1 函数的概念(二)	53
§ 3.2 函数的表示法(一)	55
§ 3.2 函数的表示法(二)	58
§ 3.3 函数的单调性(一)	61
§ 3.3 函数的单调性(二)	64
§ 3.4 函数的奇偶性(一)	67
§ 3.4 函数的奇偶性(二)	70
§ 3.5 函数的实际应用(一)	73

§ 3.5 函数的实际应用(二)	78
------------------------	----

第4章 指数函数与对数函数

§ 4.1 实数指数幂(一)	84
§ 4.1 实数指数幂(二)	86
§ 4.2 幂函数	88
§ 4.3 指数函数	91
§ 4.4 对数的概念	95
§ 4.5 对数的运算	97
§ 4.6 对数函数	100
§ 4.7 利用计算器求对数值	103
§ 4.8 指数函数、对数函数的实际应用	105

第5章 三角函数

§ 5.1 角的概念推广	110
§ 5.2 弧度制	114
§ 5.3 任意角的三角函数	117
§ 5.4 同角三角函数的基本关系	121
§ 5.5 三角函数的诱导公式	125
§ 5.6 正弦函数的图象与性质	128
§ 5.7 余弦函数的图象与性质	131
§ 5.8 已知三角函数值求角	135

附:

第1章 集合测试卷	139
第2章 不等式测试卷	143
第3章 函数测试卷	147
第4章 指数函数与对数函数测试卷	151
第5章 三角函数测试卷	155
参考答案	159



第1章

集合

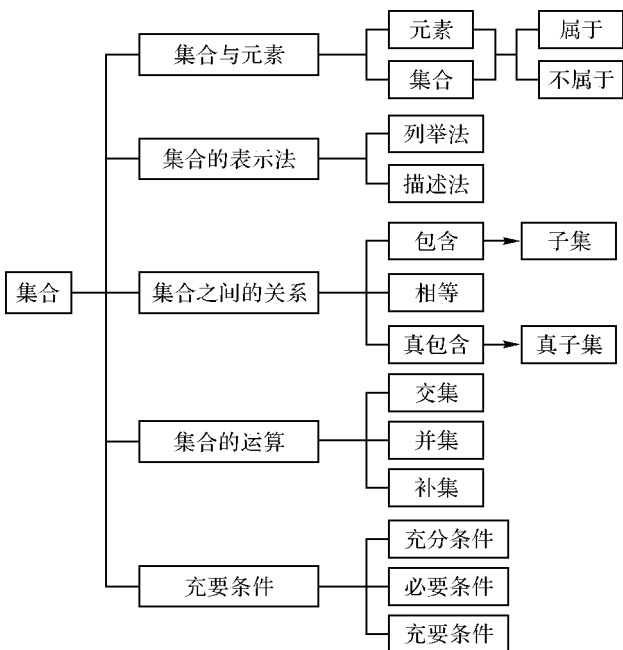
内容概述

本章主要学习集合的初步知识,包括集合与元素、集合的表示法、集合之间的关系、集合的运算和充要条件等内容.

通过本章知识的学习,需达到以下要求:

1. 了解集合的含义,体会元素与集合的关系,初步掌握集合的表示方法.
2. 明确集合间包含与相等关系的意义,能识别给定集合的子集与真子集.
3. 理解全集、空集、交集、并集、补集等概念,能够正确地进行一些简单集合间的交集、并集、补集运算.
4. 理解充分必要条件,能依据条件与结论间关系,判断是充分而不必要条件、必要而不充分条件、充要条件,还是既不充分也不必要条件.
5. 体会数形结合、分类讨论等数学思想方法,提高观察、分析、抽象、类比等能力.

知识结构



§ 1.1 集合与元素

学习目标

1. 正确地理解集合、元素及数集的含义,并能加以区分;牢记相关集合符号,尤其是几种常用数集的符号.
2. 体会集合与元素的“属于”、“不属于”关系,掌握相关连接符号,并会判断.

知识精讲

1. 集合:由某些_____组成的_____.通常用大写英文字母 A, B, C, \dots 表示.
2. 元素:构成集合的_____称为集合的元素,它具有_____性、_____性和_____性.
3. 集合与元素间的关系:若 a 是 A 的元素,记作_____ ;若 a 不是 A 的元素,记作_____.
4. 集合的分类:按元素的多少,集合可分为三类:含有有限个元素的集合称为_____ ;含有无限个元素的集合称为_____ ;不含任何元素的集合称为_____ ,记作_____,如: $\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$.
5. 数集:如果集合中的元素是数,那么这样的集合叫做数集.常见数集及其符号如下表:

数集名称	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号					

应用举例

例 1 下列各组对象能组成集合的是 ()

- A. 所有较小的实数
B. 好心的人
C. 所有的直角三角形
D. $\sqrt{2}$ 的近似值

解 选 C.

[方法小结]判断某些元素是否能构成集合,可根据集合的基本概念,抓住元素的特性.

例 2 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空:

- (1) 2 _____ $\{1 < x \leq \sqrt{3}\}$;
(2) 7 _____ $\{x \mid x = n^2 + 3, n \in \mathbf{Z}\}$.

解 (1) \notin ; (2) \in .

[方法小结]元素与集合之间是 \in 与 \notin 的关系.

例 3 已知 $x^2 \in \{0, 1, x\}$,求实数 x 的值.

解 由题意得 $x^2 = 0$, 或 $x^2 = 1$, 或 $x^2 = x$,

$$\therefore x=0, -1, 1.$$

$$\text{又} \because x \neq 0, 1,$$

$$\therefore x = -1.$$

[方法小结]集合中的元素满足确定性、互异性和无序性,解题时互异性容易被忽视.

拓展提高

例4 方程组 $\begin{cases} x=3+2y \\ 5x+y=4 \end{cases}$ 的解构成的集合为 ()

A. $x=1, y=-1$

B. $(1, -1)$

C. $\{1, -1\}$

D. $\{(1, -1)\}$

解 解方程组 $\begin{cases} x=3+2y \\ 5x+y=4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$,

\therefore 方程组的解集为 $\{(1, -1)\}$, 选 D.

[方法小结]本题的关键是要注意点集的写法.

例5 已知 $1 \in \{x | 3x^2 + px - 1 = 0\}$, 求出 p 的值, 并求出集合中的所有元素.

解 $\because 1 \in \{x | 3x^2 + px - 1 = 0\}$,

$\therefore 1$ 是方程 $3x^2 + px - 1 = 0$ 的根,

$\therefore 3 + p - 1 = 0$, 解得 $p = -2$.

$\therefore 3x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根为 $-\frac{1}{3}$ 和 1 .

\therefore 集合中的所有元素为 $-\frac{1}{3}$ 和 1 .

[方法小结]本题的关键是要求出 p , 而求 p 的关键是对条件 $1 \in \{x | 3x^2 + px - 1 = 0\}$ 的理解, 即理解元素与集合的关系. 若 $1 \in \{x | 3x^2 + px - 1 = 0\}$, 则 1 就是方程 $3x^2 + px - 1 = 0$ 的根, 满足该方程. 另外要注意的就是一元二次方程的解法.

疑点剖析

1. 由实数 $x, -x, |x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中, 所含元素个数最多有 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

错解: 选 B.

错因: 对 $x, -x, |x|$ 没有仔细分析所致.

正解: 由于 $\sqrt{x^2} = |x|, -\sqrt[3]{x^3} = -x$, 因此无论 $x \geq 0$ 或 $x < 0$, 都最多只有两个元素 x 和 $-x$, 因此正确答案选 A.

2. 确定整数 x, y , 使得 $\{2x, x+y\} = \{7, 4\}$.

错解: 由题意得 $\begin{cases} 2x=7, \\ x+y=4, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=\frac{7}{2}, \\ y=\frac{1}{2}, \end{cases} \therefore x, y$ 的值分别是 $\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$.

错因: 首先元素相同应该有两种情况, 要分类说明; 其次条件中所要求的 x, y 取值是整数, 要注意取舍.

正解:由集合相等的定义得 $\begin{cases} 2x=7, \\ x+y=4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x=4, \\ x+y=7, \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x=\frac{7}{2}, \\ y=\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2, \\ y=5. \end{cases}$$

又 $\because x, y$ 是整数, $\therefore x, y$ 的值分别是 2, 5.

巩固训练

1. 下列对象能否构成集合?

- (1) 本班女同学;
- (2) 中华人民共和国的直辖市;
- (3) 所有能被 2 整除的整数;
- (4) 校内喜欢街舞的学生.

2. 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空:

(1) $-\sqrt{9}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{N} , -7 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{N} , $\frac{3}{4}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{N} , $-\sqrt{3}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Z} , -6 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Z} ,

17 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Z} ;

(2) $-\sqrt{5}-1$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Q} , 23.4 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Q} , $\frac{3}{4}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{Q} , $-2\sqrt{7}-2$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{R} ,

$\frac{3}{5}-8$ $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{R} , -3.4 $\underline{\hspace{1cm}}$ \mathbf{R} .

3. 指出下列各组集合中含有的元素,判断其是否相同,并指出哪些集合是有限集,哪些是无限集或是空集.

(1) A : 方程 $(x+1)(x-1)=0$ 的解构成的集合, B : 1 的平方根构成的集合;

(2) A : 能被 2 整除的数构成的集合, B : 所有的偶数构成的集合;

(3) 方程 $x^2+(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$ 在自然数集内的解集 C , 在整数集内的解集 D , 在有理数集内的解集 E , 在实数集内的解集 F .

4. 数集 $\{0, 1, x^2-x\}$ 中的 x 不能取哪些数值?

5. 已知集合 A 是由小于 5 的非负偶数构成的集合, B 是由 $0, x, x^2$ 构成的集合, 若这两个集合的元素相同, 求 x 的值.

6. 已知 $-3 \in \{m-1, 3m, m^2+1\}$, 求 m .

§ 1.2 集合的表示法 (一)

学习目标

理解集合中元素的特性, 掌握集合的表示法——列举法与描述法及其一般形式, 学会把文字语言转化为符号语言(集合语言).

知识精讲

集合的表示法

1. 列举法: 把集合中的元素 _____, 写在 _____.

注: 用列举法表示集合时, 元素之间要用逗号分隔.

一般形式为: $\{\text{元素 } 1, \text{元素 } 2, \text{元素 } 3, \dots\}$.

2. 描述法: 用集合中元素的 _____ 来表示集合的方法.

注: 元素的共同特征可以是描述性的语言, 也可以是描述性的式子.

一般形式为: $\{x | x \text{ 具有的共同特征}\}$.

3. 符号法: 如 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{N}^*$ (或 \mathbf{N}_+).

4. 图形法: 如数轴或画维恩图.

应用举例

例 1 用列举法表示下列集合:

(1) 不超过 8 的正偶数;

(2) 绝对值不超过 6 的自然数;

(3) 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解;

(4) $B = \{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$.

解 (1) 即小于或者等于 8 的正偶数, 即 $\{2, 4, 6, 8\}$;

(2) 即 $|x| \leq 6$ 的自然数, 即 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(3) \because 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的解为 $x_1 = 3, x_2 = -1, \therefore$ 解集为 $\{-1, 3\}$;

(4) 对 x, y 在正整数范围内进行取值, 找到符合题意的, 解集为 $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

[方法小结] 运用列举法表示集合时, 必须先明确所表示集合元素的特性, 然后再找出符合题意的元素, 并注意: ①元素间用“,”隔开; ②元素不重复、不考虑顺序; ③如果表示的是无限集, 必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号.

例 2 用描述法表示下列集合:

(1) 由 4 和 6 的所有公倍数组成的集合;

(2) 平面直角坐标系中第四象限内的点组成的集合;

(3) $A = \{-2, -4, -6, -8, -10, \dots\}$;

(4) 不等式 $3x - 2 > 4$ 的解集;

(5) 全体的三角形.

解 (1) 4 和 6 的公倍数必是 12 的倍数, 即 $12n, n \in \mathbf{N}^*$, 故集合为 $\{x \mid x = 12n, n \in \mathbf{N}^*\}$;

(2) 第四象限内点的坐标特征是 $x > 0, y < 0$, 故集合为 $\{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$;

(3) 根据各数特征, 可表示为 $A = \{x \mid x = -2n, n \in \mathbf{N}^*\}$;

(4) $\{x \mid x > 2\}$;

(5) $\{x \mid x \text{ 是三角形}\}$ 或 $\{\text{三角形}\}$.

[方法小结] 用描述法表示集合时, 需寻找元素的共同特征. 一般形式为 $\{x \mid x \text{ 具有的共同特征}\}$. 另外(1), (3)中要注意对 n 的性质进行进一步描述; (2)是点的集合; (5)在不致混淆的情况下, 可以省去竖线及左边部分, 不可表示为 $\{\text{三角形集}\}$ 或 $\{\text{全体的三角形}\}$.

例 3 方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 的解集为 _____.

解 解方程组 $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = -1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \end{cases}$

\therefore 方程组的解集为 $\{(0, 1)\}$.

[方法小结] 注意点集的写法.

拓展提高

例 4 已知集合 $A = \left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}\right\}$, 用列举法表示集合 A .

解 $\because \frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{N}, \therefore 6-x = 1, 2, 3, 4, 6$, 即 $x = 5, 4, 3, 2, 0$,

$\therefore A = \{0, 2, 3, 4, 5\}$.

[方法小结] 解答时在考虑 $x \in \mathbf{N}$ 的同时还要考虑到 $\frac{12}{6-x} \in \mathbf{N}$.

例5 已知集合 $M = \{x \mid x^2 + px - 3 = 0\}$, 且 $1 \in M$, 用列举法写出集合 M .

解 $\because 1 \in \{x \mid x^2 + px - 3 = 0\}$,

$\therefore 1 + p - 3 = 0$, 解得 $p = 2$,

\therefore 方程 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 的根为 -3 和 1 ,

\therefore 集合 $M = \{-3, 1\}$.

[方法小结] 关键是对集合与元素关系的把握, 另外要注意的就是一元二次方程的解法.

疑点剖析

1. 小于3的整数组成的集合为_____.

错解: $\{0, 1, 2\}$.

错因: 误认为小于3的整数就是非负整数.

正解: $\{2, 1, 0, -1, -2, -3, \dots\}$.

2. 设集合 $A = \{(x, y) \mid x + y = 5, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$, 试用列举法表示集合 A .

错解: 令 $x = 0, 1, 2, 3, \dots, \therefore y = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \dots$

$\therefore A = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), \dots\}$.

错因: 忽视了 x, y 均是自然数.

正解: 令 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \therefore y = 5, 4, 3, 2, 1, 0$.

$\therefore A = \{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)\}$.

巩固训练

1. 下列集合中, 表示同一个集合的是 ()

A. $M = \{(1, 2)\}, N = \{(2, 1)\}$

B. $M = \{1, 2\}, N = \{2, 1\}$

C. $M = \{1, 2\}, N = \{(1, 2)\}$

D. $M = \{(x, y) \mid x + y = 1\}, N = \{y \mid x + y = 1\}$

2. 若集合 $A = \{y \mid y = -x^2 + 5x - 4, x \in \mathbf{R}\}$, 则 ()

A. $1 \in A$ 且 $4 \notin A$

B. $1 \in A$ 且 $4 \in A$

C. $1 \notin A$ 且 $4 \in A$

D. $1 \notin A$ 且 $4 \notin A$

3. 若集合 $A = \{0, 1, 2\}, B = \{y \mid y = x^2 - 1, x \in A\}$, 则 $B =$ _____.

4. 如果 a, b 是非零实数, 那么 $\frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$ 可能取的值组成的集合为_____.

5. 用列举法表示下列集合:

(1) 大于1且小于6的整数组成的集合;

(2) 一周内七天的名称组成的集合;

(3) 方程 $x^2 - 25 = 0$ 的解构成的集合;

(4) $B = \{(x, y) \mid 2x + y = 7, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$.

6. 用描述法表示下列集合:

- (1) 不等式 $3x-6 < 0$ 的解集;
- (2) 平面直角坐标系中第三象限内的点组成的集合;
- (3) 所有能被 2 整除的整数;
- (4) 一次函数 $y=4x-1$ 图象上的点组成的集合.

§ 1.2 集合的表示法 (二)

学习目标

1. 理解集合中元素的特性,掌握集合的表示法——列举法与描述法及其互换,知道表示集合时应依据题意选择适当的集合表示法.

2. 明确不同集合的元素具有不同特征与规律,能找出集合元素的几种常见形态,意识到不同集合需要用不同的方式体现,意识到集合的表示方法——列举法与描述法间存在一定的关系.

知识精讲

1. 列举法适用于_____情况,描述法适用于_____,在具体解题时要注意灵活选择.

2. 集合中元素具有_____、_____和_____.

3. 在用描述法表示集合时要注意语言的精炼和式子的规范.

应用举例

例 1 分别用列举法,描述法表示“被 3 除余 1”的自然数集合.

解 列举法表示为 $\{1, 4, 7, 10, \dots\}$; 描述法表示为 $\{x \mid x=3n+1, n \in \mathbf{N}\}$.

[方法小结]两种表示法各有所长,但不论哪种都必须先明确所表示集合中元素的特点,然后再找出符合题意的元素,最后根据实际需求选择恰当的代表法.

例 2 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 大于 -3 小于 5 的整数构成的集合;
- (2) 方程 $x^2-3x-4=0$ 的根的全体构成的集合;
- (3) 被 3 除余 2 的整数构成的集合;

(4) 第一、三象限角平分线上的点构成的集合.

解 (1) $\{x \mid -3 < x < 5 \text{ 且 } x \in \mathbf{Z}\}$ 或 $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;

(2) $\{x \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$ 或 $\{4, -1\}$;

(3) $\{x \mid x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$;

(4) $\{(x, y) \mid y = x, x \in \mathbf{R}\}$.

[方法小结]集合的表示方法要依据对象的特点或个数的多少,采用适当的形式,如个数少的有限集合可采用列举法,而其他的大多数都采用描述法.在描述法中,要注意代表元素所表示的含义.

例 3 下列各描述中,正确表示集合的个数有 ()

① $\{1, 2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, \dots\}$; ② $\{1, 2, 3, 2, 1\}$; ③ $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$;

④ $\{x \mid x \text{ 为我班高个子同学}\}$; ⑤ $\{x \mid x \text{ 为平方等于负数的实数}\}$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

解 ①集合中元素的规律不明显,不能用列举法表示;②不符合集合中元素的互异性;③表示实数集 \mathbf{R} ;④不符合集合中元素的确定性;⑤表示空集 \emptyset ,所以只有③⑤两个正确.故选 B.

[方法小结]判断一个列举法或描述法能否构成集合,关键看对象是否具有确定性、互异性和无序性.

拓展提高

例 4 设集合 $A = \{(x, y) \mid x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$, 试用列举法表示集合 A .

解 $\because x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}, \therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 6$; 当 $x = 1$ 时, $y = 5$; 当 $x = 2$ 时, $y = 4$; 当 $x = 3$ 时, $y = 3$; 当 $x = 4$ 时, $y = 2$; 当 $x = 5$ 时, $y = 1$; 当 $x = 6$ 时, $y = 0$.

$\therefore A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$.

[方法小结]解答时要注意 x, y 间的相“削”关系,即 x 增 y 减.

例 5 已知集合 $A = \{2, a^2 + 1, a^2 - a\}$, $B = \{0, 7, a^2 - a - 5, 2 - a\}$, 若 $5 \in A$, 求集合 B .

解 ①若 $a^2 + 1 = 5$, 得 $a = 2$ (依据集合 A 中元素的互异性可舍去) 或 $a = -2$, 此时 $B = \{0, 7, 1, 4\}$;

②若 $a^2 - a = 5$, 得 $a^2 - a - 5 = 0$, 由集合 B 中元素互异性知不符合题意.

综上所述,集合 $B = \{0, 7, 1, 4\}$.

[方法小结]因为 $5 \in A$, 所以 $a^2 + 1$ 与 $a^2 - a$ 都有可能为 5, 因此要分情况解, 另外还要注意根据集合元素的互异性进行检验.

疑点剖析

1. 非零实数 a, b, c 构成数 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的集合用列举法表示为 ()

A. $\{-4, 4\}$

B. $\{0, 4\}$

C. $\{-4, 0\}$

D. $\{-4, 0, 4\}$

错解: 选 A.

错因: 只考虑了 a, b, c 同号的情况, 忽略了异号情况.

正解: 选 D.

2. 方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解集为 ()

A. $x=4, y=1$

B. $\{x=4, y=1\}$

C. $\{(x, y) | x=4 \text{ 或 } y=1\}$

D. $\{(4, 1)\}$

错解: 选 B 或 C.

错因: 一是没考虑集合中的元素是点; 二是不能区分集合中“或”与“且”.

正解: 选 D.

巩固训练

1. 下列集合中, 包含的元素与另外三个集合不完全相同的是 ()

A. $\{x | x=1\}$

B. $\{x | x^2=1\}$

C. $\{1\}$

D. $\{x | (x-1)^2=0\}$

2. 用列举法表示集合 $\{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ 为 ()

A. $\{1, -1\}$

B. $\{1\}$

C. $\{x=1\}$

D. $\{x^2 - 2x + 1 = 0\}$

3. 定义运算: $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 若 $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{2, 3, 6\}$, 则 $N - M =$ _____.

4. 若集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 中只含有一个元素, 则 a 的值为 _____.

5. 选择适当的方法表示下列集合:

(1) 不等式 $3x \geq 4 - 2x$ 的解集;

(2) 绝对值不大于 3 的整数构成的集合;

(3) 所有偶数构成的集合.

6. 已知 $1 \in \{x | x^2 + ax + b + 1 = 0\}$, $2 \in \{x | x^2 + ax - b = 0\}$, 求 a, b 的值, 并用列举法表示集合 $\{x | x^2 + ax - b = 0\}$.