王华鹏 主编

学生用书

中考新导引

ZHONGKAO XIN DAOYIN

数学

浙江教育出版社

中考新导引

数学

顾 问:蒋荣清
主 编:王华鹏
编 委:丁福珍 王万丰 王华鹏 王晓君 李梦虎
张显钢 徐连弟 徐晓红 裘建忠 徐明华

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考新导引. 数学 / 王华鹏主编. — 杭州 : 浙江教育出版社, 2016.1
ISBN 978-7-5536-4015-0

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①中学数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 311532 号

中考新导引 数学
ZHONGKAO XIN DAOYIN SHUXUE

主　　编　王华鹏

出版发行　浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号　邮编:310013)
责任编辑　葛　武
责任校对　余晓克　田兴姣
责任印务　吴梦菁
图文制作　猫头鹰工作室
印　　刷　南京玄武湖印刷实业有限公司
开　　本　880 mm×1230 mm　1/16
印　　张　20.25
字　　数　663 000
版　　次　2016 年 1 月第 1 版
印　　次　2016 年 1 月第 1 次印刷
标准书号　ISBN　978-7-5536-4015-0
定　　价　31.80 元

联系电话:0571-85170300-80928
e-mail:zjjy@zjcb.com　网址:www.zjeph.com

前 言

在中考复习阶段，一本好的复习用书往往能积极引导教师的教与学生的学，从而起到事半功倍的复习效果。《中考新导引》就是基于这样的追求而产生的，本书以浙江省特级教师王华鹏为主编，浙江省特级教师蒋荣清为顾问，台州市名教师教研员丁福珍、王万丰、王华鹏、王晓君、李梦虎、张显钢、徐连弟、徐晓红、裘建忠、徐明华等参与编写。本书具有以下特点：

1. 内容划分科学合理，突出中考热点

本书内容共分八章 47 节，是编写组依据《义务教育数学课程标准(2011 年版)》和《2016 年浙江省初中毕业生学业考试说明》，综合自己中考命题与复习教学的经验体会，精心设计，编纂而成。突出了对核心知识与基本技能的关注，以及对数学学习能力、问题解决能力、探究操作能力、数学思想方法等中考热点的重视。

2. 体例结构立意深远，富含教育价值

本书不是题目的堆积和罗列，而是一个有机整合的教学体系，包括知识回顾、典例解剖、错例警示、巩固落实、单元检测五个部分。

知识回顾分为知识要点与基础自测两小部分，其中知识要点部分追求简明精炼，突出重点，避免太细过杂，对于一些非核心的知识点在基础自测或巩固落实中予以体现。典例解剖部分设置了“思路分析、解答过程、解题回顾、学习感悟、变式迁移”五个环节，力图从解题的知识结构、思维结构和解题的元认知结构三个方面入手，完善并发展学生数学解题的认知结构。

每章开始我们都提供一张全章知识导图，使学生在整体感知前提下展开相关内容的复习。在每节巩固作业后面，我们设置了作业反思栏目，让学生在教师指导下自主整理、反思归纳，力图使复习教学与习题训练的过程成为有意义学习的过程。

3. 选题新颖题量适中，利于高效复习

我们要求典例解剖、基础自测、巩固落实以及单元测试的选题应先根据课标与考试说明整体规划知识能力结构再寻找或编拟题目，保证题目的连贯性、完整性和层次性，从而紧扣高频考点并涵盖各单元的所有知识点，做到全覆盖无死角。特别在例题设计上力求经典，富含教育价值，紧扣本节教学重难点，内在逻辑尽量一致便于上课的自然深入，有些例题配 1–2 个变式迁移，供上课选用。素材选取与背景设计清新自然，题目层次性强。

4. 配套资料优化组合，方便教学使用

本套复习资料包括教师用书、学生用书、跟踪训练、测试卷以及配套光盘与参考答案，可以切实减轻教师备课负担。学生上课用书与跟踪训练分离，使用灵活，讲究实效，方便教师的教与学生的学。

编写新颖性、实用性强的复习用书难度很大，加上众口难调和时间紧迫，书中不足之处在所难免，我们真诚地希望广大师生批评指正，使此书在今后的修订中能够进一步完善。

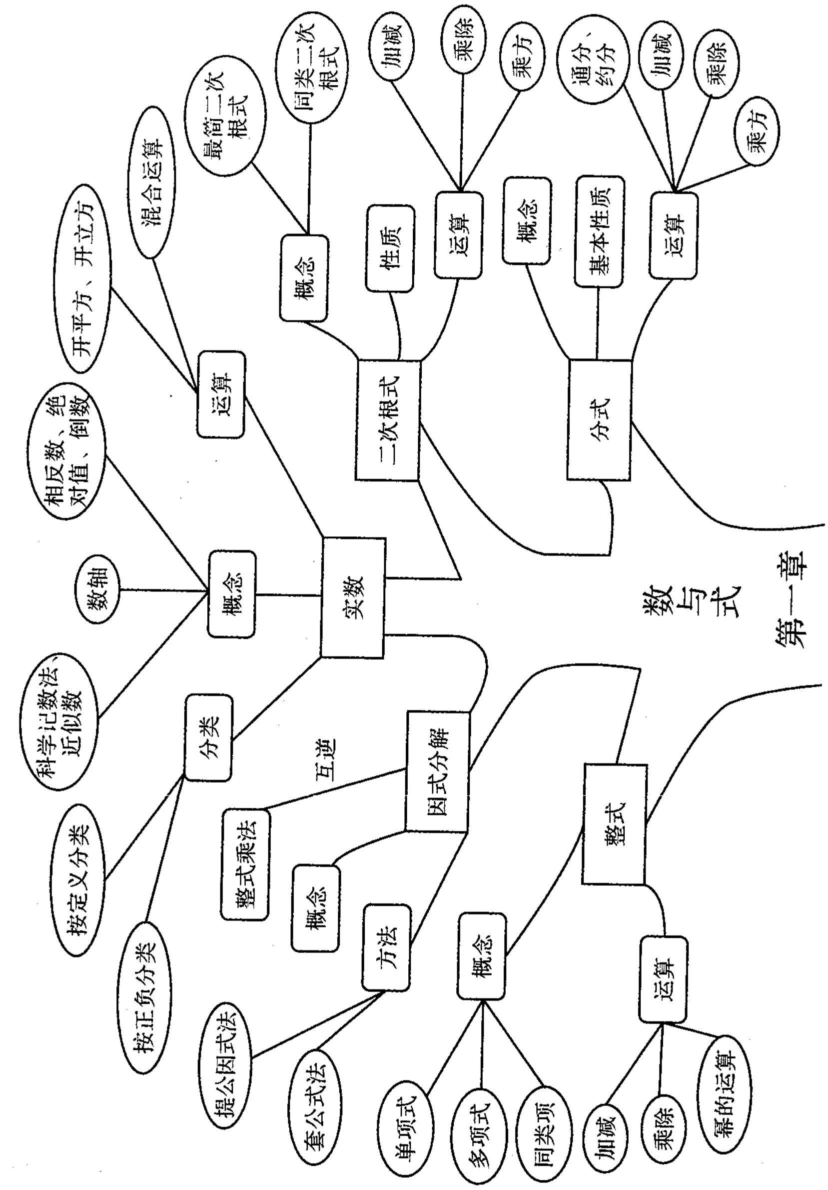
编者

2015 年 10 月

目录
contents

第一章　数与式

本章知识梳理



§1.1 实数

一、知识回顾

(一)知识要点

1. 实数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - ________
    - 分数 ——有限小数或无限循环小数
      - ________
      - 负分数
  - 无理数 ——无限不循环小数
    - 正无理数
    - ________

2. 实数的基本概念和性质

(1)________和数轴上的点是一一对应的.

(2)a 的相反数是________,0 的相反数是______.

(3)实数 a 的倒数是________,________没有倒数.

(4)数轴上表示实数 a 的点与________的距离叫做实数 a 的绝对值,其中 $|a|=$________.

(5)若 $x^2=a(a\geqslant 0)$,则 x 叫做 a 的________,记作 $\pm\sqrt{a}$,其中 $\sqrt{a}$ 叫做 a 的________.

(二)基础自测

1.(衢州中考题)-3 的相反数是 ( )

A. 3　　B. -3　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{1}{3}$

2.(宁波中考题)据报道,2015 年,中国高端装备制造业收入将超过 6 万亿元.其中 6 万亿元用科学记数法可表示为 ( )

A. 0.6×10^{13} 元

B. 60×10^{11} 元

C. 6×10^{12} 元

D. 6×10^{13} 元

3.(湘潭中考题)下列四个实数中,属于无理数的是 ( )

A. 0　　B. $\sqrt{2}$

C. -2　　D. $\dfrac{2}{7}$

4.(南京中考题)8 的算术平方根是 ( )

A. 4　　B. ±4

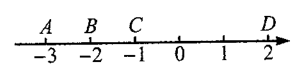
C. $2\sqrt{2}$　　D. $\pm2\sqrt{2}$

5.(珠海中考题)计算 $12-7\times(-4)+8\div(-2)$ 的结果是 ( )

A. -24　　B. -20

C. 6　　D. 36

6.(金华中考题)如图,数轴上的 A,B,C,D 四点中,与表示数 $-\sqrt{3}$ 的点最接近的是 ( )



第 6 题

A. 点 A　　B. 点 B

C. 点 C　　D. 点 D

二、典例解剖

例 1　在下列实数:$\sqrt{8}$,$\sqrt[3]{-8}$,$\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$,$\dfrac{22}{7}$,π,3.141 59,$\sqrt{27}$ 中,是无理数的有 ( )

A. 2 个　B. 3 个　C. 4 个　D. 5 个

【思路分析】 根据无理数的定义:无限不循环小数称为无理数.例如 $\sqrt{27}$,$\sqrt{8}$ 等开不尽的方根、化简后含有 π 的代数式,有规律但无限不循环的人为构造数,如0.101 001 000 1…(两个 1 之间依次多一个 0)等都是无理数.

【解答过程】 B

【解题回顾】 解决本题的依据是什么?

【学习感悟】 1."有限小数""无限循环小数"都可化为分数;反之,任何分数都可化为"有限小数"或"无限循环小数".

2. 有理数与无理数的本质区别在于前者是"有限小数"或"无限循环小数",后者是"无限不循环小数".

例 2　计算：

(1)$3^2\div\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2^4\div\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(2)$\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times(-20)$.

【思路分析】　(1)遵循运算法则，先算乘方，确定$\left(-\frac{1}{3}\right)^3$的符号，再算除法，最后算减法.

(2)方法一：先算小括号里面的，再进行乘法运算.方法二：利用分配律.

【解答过程】　(1)$3^2\div\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2^4\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=9\div\left(-\frac{1}{27}\right)-16\div\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-243+32$

$=-211$.

(2)方法一：

$\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times(-20)$

$=\left(\frac{16}{20}-\frac{15}{20}+\frac{10}{20}\right)\times(-20)$

$=\frac{11}{20}\times(-20)$

$=-11$.

方法二：

$\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\times(-20)$

$=\frac{4}{5}\times(-20)-\frac{3}{4}\times(-20)+\frac{1}{2}\times(-20)$

$=-16+15-10$

$=-11$.

【解题回顾】　1. 实数的运算法则有哪些？

2. 实数运算遵循怎样的运算顺序？

【学习感悟】　1. 实数的运算顺序是先算乘方或开方，再算乘除，最后算加减.如果有括号，先算小括号里面的，再算中括号里面的，最后算大括号里面的. 同级运算应从左到右，依次进行.

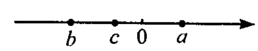
2. 合理运用运算律，能给运算带来简便.

变式迁移 1　计算：

(1)$2\,015^0+\sqrt{12}+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(2)$2\cos45^\circ-(\pi+1)^0+\sqrt{\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

例 3　已知实数 a,b,c 在数轴上的位置如图所示，化简 $a+|a+b|-\sqrt{c^2}-|b-c|$.



例 3

【思路分析】　a,b 两数异号，且$|b|>|a|$，则 $a+b<0$，所以$|a+b|=-(a+b)$；$\sqrt{c^2}$的结果为$|c|$，由题意知 $c<0$，所以$\sqrt{c^2}=-c$；由 $b<c$ 得$|b-c|=-(b-c)$，再化简即可.

【解答过程】　由题意：$a>0,b<0$ 且$|b|>|a|$，

$\therefore|a+b|=-(a+b)$.

又$\because b<c<0,\therefore\sqrt{c^2}=-c,|b-c|=-(b-c)$.

$\therefore$原式$=a-(a+b)+c+(b-c)=0$

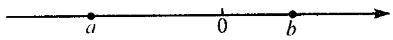
【解题回顾】　1. 如何化简$|a+b|$与$|b-c|$？

2. 你能说出$|b-c|$的几何意义吗？试一试.

3. 比较实数的大小有哪些注意事项？

【学习感悟】　借用数轴，既能直观地比较实数的大小，又能直观地理解$|b-c|$的几何意义，即数轴上实数 b 与 c 所对应的点之间的距离.

变式迁移 2 实数 a，b 在数轴上的位置如图所示，则下列各式中，正确的是 ( )



变式迁移 2

A. $a>b$　　B. $a>-b$

C. $-a>b$　　D. $-a<-b$

例 4 （台州中考题）任何实数 a，可用$[a]$表示不超过 a 的最大整数.如$[4]=4$，$[\sqrt{3}]=1$.现对 72 进行如下操作：$72\xrightarrow{\text{第 1 次}}[\sqrt{72}]=8\xrightarrow{\text{第 2 次}}[\sqrt{8}]=2\xrightarrow{\text{第 3 次}}[\sqrt{2}]=1$，这样对 72 只需进行 3 次操作就变为 1.类似地，(1)对 81 只需进行________次操作就变为 1；(2)只需进行 3 次操作就变为 1 的所有正整数中，最大的是________.

【思路分析】 (1)根据规律，$[\sqrt{81}]=9$，$[\sqrt{9}]=3$，$[\sqrt{3}]=1$ 依次求出，只需进行 3 次操作.

(2)要想求只需进行 3 次操作就变为 1 的所有正整数.不妨先解决“只需进行 3 次操作就变为 2 的所有正整数中，最小的是________”这个问题，再结合逆运算——平方运算“$2^2=4$，$4^2=16$，$16^2=256$”($[\sqrt{256}]=16$，$[\sqrt{16}]=4$，$[\sqrt{4}]=2$，$[\sqrt{2}]=1$，需要 4 次操作)，所以 $256-1=255$.而$[\sqrt{255}]=15$，$[\sqrt{15}]=3$，$[\sqrt{3}]=1$，只需进行 3 次操作，恰好满足这一条件，即最大的正整数为 255.

【解答过程】 (1)3　(2)255

【解题回顾】 1. 解答阅读理解型问题，关键步骤是什么？

2. 对第(2)问，需进行逆向思考.若把(2)改为“只需进行 5 次操作就变为 1 的所有正整数中，最大的是________”，你来试一试.

【学习感悟】 根据提供的新定义，要充分挖掘概念的内涵与外延，对关键字、词要化抽象为具体.例如，把本题中的“求平方根运算”逆向转化为“平方运算”.有实例的，对照实例解读，进行不断尝试，直到找出规律为止.

三、错例警示

易错点：绝对值概念的理解.

例题 若实数 a 满足 $a-|a|=2a$，则 ( )

A. $a>0$　　B. $a<0$

C. $a\geqslant 0$　　D. $a\leqslant 0$

【典型错误】 B

【错因分析】 由 $a-|a|=2a$ 得$|a|=-a$，就误认为“绝对值等于它的相反数的数是负数”，故错选 B，其实，“绝对值等于它的相反数的数是非正数”.

【正确解答】 D

【启发体会】 “一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数.”反过来并不成立.因为 0 的绝对值是它本身，它的相反数也是它本身，所以绝对值等于它的相反数的数是非正数.

§1.2　整式

一、知识回顾

（一）知识要点

1. 整式及相关概念

(1)________的积叫单项式，单独一个数字或一个字母也是单项式；所有________的指数和叫单项式的次数；单项式中的数字因数叫做这个单项式的________.

(2)几个单项式的和叫________；每个单项式叫多项式的________；次数最高的项的次数叫多项式的次数. 单项式与多项式统称________.

(3)所含________相同，并且相同字母的________也相同的项叫做同类项.

2. 整式的运算

(1)整式的加减运算实质上就是合并同类项.

合并同类项法则即字母及字母的指数部分不变，系数相加.

(2)幂的运算性质：$a^m \cdot a^n=$________；$(a^m)^n=$________；$(ab)^n=$________；$a^m \div a^n=$________$(a\neq 0)$；$a^0=$________$(a\neq 0)$；$a^{-m}=$________$(a\neq 0)$.

(3)单项式乘多项式：$m(a+b)=$________；

多项式乘多项式：

$(a+b)(c+d)=$________________.

(4)乘法公式：$(a+b)(a-b)=$________；

$(a\pm b)^2=$________________.

（二）基础自测

1. 下列代数式中，不属于单项式的是　（　　）

A. 1　　B. a

C. $-2b$　　D. $x+1$

2. 多项式 $x^2-\frac{3}{2}x-2$ 的常数项是________，一次项系数是________，二次项系数是________.

3.（湖州中考题）当 $x=1$ 时，代数式 $4-3x$ 的值是　（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

4.（淮安中考题）计算 $-a^2+3a^2$ 的结果为　（　　）

A. $2a^2$　　B. $-2a^2$

C. $4a^2$　　D. $-4a^2$

5.（贵港中考题）下列运算正确的是　（　　）

A. $2a-a=1$　　B. $(a-1)^2=a^2-1$

C. $a\cdot a^2=a^3$　　D. $(2a)^2=2a^2$

6.（南通中考题）若 $x^2+16x+k$ 是完全平方式，则 $k=$　（　　）

A. 64　　B. 48

C. 32　　D. 16

7. 若 $2^m=8$，$2^n=2$，则 $2^{m+2n}=$　（　　）

A. 32　　B. 16　　C. 12　　D. 4

二、典例解剖

例 1　化简：$-(x^2-2x-2)+2(x^2-1)$.

【思路分析】　先对 $-(x^2-2x-2)$ 和 $2(x^2-1)$ 进行去括号，把运算转化为整式的加减运算，再合并同类项即可.

【解答过程】　$-(x^2-2x-2)+2(x^2-1)$

$=-x^2+2x+2+2x^2-2$

$=x^2+2x$.

【解题回顾】　去括号的易错点是什么？

【学习感悟】　1. 实数运算的所有运算法则以及运算律，在整式运算中仍然适用.

2. 括号前面因数（或因式）带负号时，去括号后各项的符号要改变，还要防止漏乘.

3. 合理运用乘法公式可以减少运算量.

变式迁移 1　化简：

(1)$-\frac{1}{2}(4n+6)+\frac{1}{3}(9-3n)$.

(2)$(2a+1)(2a-1)-4a(a-1)$.

例 2　（沈阳中考题）先化简，再求值：$[(a+b)^2-(a-b)^2]\cdot a$，其中 $a=-1$，$b=5$.

【思路分析】　方法一：直接利用完全平方公式将 $(a+b)^2$，$(a-b)^2$ 展开，再化简求值.

方法二：分别将 $a+b$，$a-b$ 看成整体，运用整体思想，利用平方差公式将中括号内化简，再化简求值.

【解答过程】　（以方法二为例）

$[(a+b)^2-(a-b)^2]\cdot a$

$=(a+b+a-b)(a+b-a+b)\cdot a$

$=2a\cdot 2b\cdot a$

$=4a^2b.$

当 $a=-1,b=5$ 时，原式 $=4\times(-1)^2\times 5=20.$

【解题回顾】 1. 化简 $(a+b)^2-(a-b)^2$ 时，你觉得应注意哪些易错点？

2. 若代数式改为 $[(a+b+c)^2-(a-b+c)^2]\cdot a$，你会如何解答？

【学习感悟】 1. 化简求值时，要关注易错点，确保化简结果的正确性.

2. 借助整体思想，合理运用乘法公式可以减少运算量，从而提高计算的准确性.

例 3 图形拼接可以用来解释代数恒等式.图 1 可用来解释 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$，图 2 可验证的恒等式是 ( )

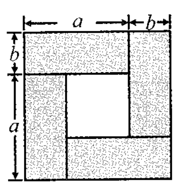


图 1

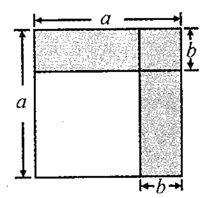


图 2

例 3

A. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

D. $(a-b)(a+2b)=a^2-2b^2+ab$

【思路分析】 图 2 中空白部分小正方形的面积为 $(a-b)^2$，大正方形面积为 a^2，小正方形面积等于大正方形面积减去 2 个长、宽分别为 a,b 的长方形的面积，加上一个边长为 b 的正方形的面积.

【解答过程】 A

【解题回顾】 你会用图形验证平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 吗？试一试.

【学习感悟】 几何图形的面积叠加法是验证代数恒等式的捷径之一.

变式迁移 2 用几何图形验证例 3 中 D 选项：$(a-b)(a+2b)=a^2-2b^2+ab.$

变式迁移 3 一个大正方形和四个全等的小正方形按下图的图 1、图 2 两种方式摆放，则图 2 的大正方形中未被小正方形覆盖部分的面积是________(用含 a,b 的代数式表示).

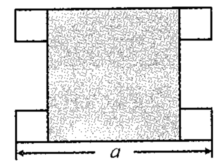


图 1

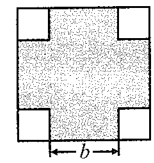


图 2

变式迁移 3

三、错例警示

易错点 1：混淆幂的运算法则.

例题 计算：

(1) $x^4\cdot x^4$.

(2) $(a^{m+1})^2$.

(3) $(-2a^2b)^2$.

(4) $(m-n)^6\div(n-m)^3$.

【典型错误】 (1) $x^4\cdot x^4=2x^4$.

(2) $(a^{m+1})^2=a^{2m+1}$.

(3) $(-2a^2b)^2=-4a^4b^2$.

(4) $(m-n)^6\div(n-m)^3=(m-n)^{6-3}$

$=(m-n)^3$.

【错因分析】 对于幂运算的法则理解不透彻，故有上述错解.

【正确解答】 (1) $x^4\cdot x^4=x^8$.

(2) $(a^{m+1})^2=a^{2m+2}$.

(3) $(-2a^2b)^2=4a^4b^2$.

(4) $(m-n)^6\div(n-m)^3=(n-m)^{6-3}=(n-m)^3$.

【启发体会】 幂的基本运算形式有四种：同底数幂的乘法、同底数幂的除法、幂的乘方与积的乘方，计算时，透彻理解对应的运算法则，并合理运用法则.

易错点 2：不理解乘法公式的意义.

例题 判断下列计算正确与否：

$(-a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

【错因分析】 对于乘法公式只停留在死记硬背上，故有记忆混乱.

【正确解答】 错误.$(-a+b)(a-b)=-a^2+2ab-b^2$.

【启发体会】 $-a+b$ 可以看成 $-a$ 与 b 的和，$a-b$ 可以看成 a 与 b 的差，显然不是两数的和与这两数的差的积，因此不满足平方差公式的条件.

§1.3 因式分解

一、知识回顾

(一)知识要点

1. 因式分解的概念

把一个多项式化成几个整式________的形式叫做因式分解，也叫________. 因式分解与整式乘法是一种互逆的恒等变形.

2. 因式分解的方法

(1)提取公因式法：$ma+mb+mc=$________.

(2)运用公式法：

①平方差公式：$a^2-b^2=$________；

②完全平方公式：$a^2\pm 2ab+b^2=$________.

3. 分解因式的注意点

(1)若多项式的各项有公因式，则应该先________.

(2)如果没有公因式，那么看能否运用公式法，再试着运用公式法进行因式分解.

(3)因式分解后，检查每一个因式是否能继续分解，直到每一个因式都________________.

(二)基础自测

1. (绍兴中考题)因式分解：$x^2-4=$________.

2. 下列式子变形中，属于因式分解的是 (　　)

A. $x^2-5x+6=x(x-5)+6$

B. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

C. $(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

D. $x^2-5x+6=(x+2)(x+3)$

3. (金华中考题)把代数式 $2x^2-18$ 分解因式，结果正确的是 (　　)

A. $2(x^2-9)$

B. $2(x-3)^2$

C. $2(x+3)(x-3)$

D. $2(x+9)(x-9)$

4. (漳州中考题)若代数式 x^2+ax 可以分解因式，则常数 a 不可以取 (　　)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

5. 下列各式中，能用完全平方公式进行因式分解的是 (　　)

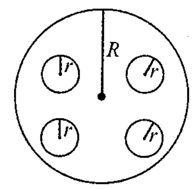
A. x^2+1

B. x^2+2x-1

C. x^2+x+1

D. x^2+4x+4

6. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上，冲去半径为 r 的四个小圆. 当 $R=7.8$ cm，$r=1.1$ cm 时，剩余部分的面积为________cm²(保留 π).



第 6 题

二、典例解剖

例 1 (1)在实数范围内分解因式：m^4-64.

(2)分解因式：$3x^4-12x^2$.

【思路分析】 (1)先利用平方差公式得到$(m^2+8)(m^2-8)$，由题意可知，在实数范围内分解因式，再次利用平方差公式对 m^2-8 进行因式分解即可.

(2)根据公因式的定义，先对 $3x^4-12x^2$ 提取公因式 $3x^2$，得到 $3x^2(x^2-4)$，再利用平方差公式对 x^2-2^2 进行因式分解即可.

【解答过程】 (1)$m^4-64=(m^2+8)(m^2-8)$

$=(m^2+8)(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})$.

(2)$3x^4-12x^2=3x^2(x^2-4)$

$=3x^2(x+2)(x-2)$.

【解题回顾】 1. 对一个多项式进行因式分解，最先考虑的方法是什么？

2. 对于因式分解的最后结果，应该注意什么？

3. 验证因式分解结果是否正确，可以采用什么方法？

【学习感悟】 1. 对一个多项式进行因式分解时，首先考虑提取公因式法，再考虑公式法，最后结果分解到不能再分解为止.

2. 验证因式分解结果是否正确，可将结果进行整式乘法运算，判断是否与被分解的多项式相同.

例 2 若 x^2+ax-3 可分解为 $(x-3)(x-b)$，则 $a+b$ 的值为 ( )

A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

【思路分析】 利用多项式的乘法运算法则，把 $(x-3)(x-b)$ 展开得：$(x-3)(x-b)=x^2-(b+3)x+3b=x^2+ax-3$，然后根据对应项的系数相等列出方程组 $\begin{cases}-(b+3)=a,\\3b=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=-1,\end{cases}$ 再代入代数式进行计算即可.

【解答过程】 C

【解题回顾】 1. 因式分解与整式乘法有什么关系？

2. 把 $(x-3)(x-b)$ 化简后，$-(b+3)x$ 对应项是 $+ax$ 还是 -3？若对应的项相等，则它们的系数有什么关系？

【学习感悟】 1. 用多项式乘多项式的运算法则展开，并且把 b 看作常数，合并关于 x 的同类项，然后根据对应项的系数相等，列出方程组 $\begin{cases}-(b+3)=a,\\3b=-3,\end{cases}$ 再求解.

2. 因式分解与整式的乘法是互逆变形.

变式迁移 若 $x^2+mx-n=(x-3)(x+1)$，则 m,n 的值分别是 ( )

A. $m=3,n=-1$ B. $m=-2,n=-3$

C. $m=-2,n=3$ D. $m=2,n=3$

例 3 已知 $a^2+b^2+6a-10b+34=0$，求 $a+b$ 的值.

【思路分析】 先将原方程化为 $(a^2+6a+9)+(b^2-10b+25)=0$ 的形式，再利用完全平方公式进行因式分解，从而得到 $(a+3)^2+(b-5)^2=0$，将多项式转化成两个非负数和的形式.

【解答过程】 由题意，得

$a^2+6a+9+b^2-10b+25=0$，

$\therefore (a+3)^2+(b-5)^2=0$，

$\therefore \begin{cases}a+3=0,\\b-5=0,\end{cases}\therefore \begin{cases}a=-3,\\b=5.\end{cases}$

$\therefore a+b=-3+5=2.$

【解题回顾】 1. 观察等式，各项的未知数及其次数有什么特点？

2. 结合完全平方公式将原方程重新组合变形为 $(a^2+6a+9)+(b^2-10b+25)=0$，将等式转化为两个非负数的和等于 0 的形式，接着应该如何解答？

【学习感悟】 遇到一个方程含有多个未知数的问题，常可以将等式转化为几个非负数和的形式，利用方程组加以解决.初中阶段常见的非负数形式有绝对值、算术平方根和完全平方式.

例 4 （厦门中考题）设 $a=19^2\times918$，$b=888^2-30^2$，$c=1\,053^2-747^2$，将数 a,b,c 按从小到大的顺序排列，结果是________.

【思路分析】 本题中 b,c 都是平方差的形式，运用平方差公式进行变形，得到：

$b=888^2-30^2=(888-30)(888+30)$

$=858\times918$，

$c=1\,053^2-747^2=(1\,053+747)(1\,053-747)$

$=1\,800\times306=600\times918$，

不难发现 a,b,c 都有一个公共的因数 918，只要比较另一个因数即可.

【解答过程】 $a<c<b$.

【解题回顾】 1. 平方差公式有什么特征？

2. 观察 b,c 的特征，你发现它们有什么特点？

3. 要比较 $19^2\times918$，888^2-30^2，$1\,053^2-747^2$ 三个数的大小，你是怎么思考的？

【学习感悟】 比较两个数（或式）的大小，我们常用的方法有作差法或作商法. 作差法是比较差与 0 的大小关系；作商法是比较商与 1 的大小关系. 当作差法或作商法都行不通的时候，我们不妨利用因式分解将其进行分解因数（式），再进行比较判断.

例 5 阅读理解：观察下列因式分解的过程.

(1) $x^2-xy+4x-4y=(x^2-xy)+(4x-4y)$

$=x(x-y)+4(x-y)=(x-y)(x+4)$.

(2) $a^2-b^2-c^2+2bc=a^2-(b^2+c^2-2bc)$

$=a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$.

第(1)题分解后能直接提取公因式，第(2)题分解后能直接运用公式进行因式分解.

仿照上述分解因式的方法，把下列各式因式分解：

(1)$a^2-ab+ac-bc$.

(2)$x^2-4y^2-z^2+4yz$.

【思路分析】 (1)仿照例5第(1)题分解后能直接提取公因式$a-b$.(2)仿照例5第(2)题分解后能直接运用完全平方公式进行因式分解.

【解答过程】 (1)$a^2-ab+ac-bc$

$=(a^2-ab)+(ac-bc)$

$=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a-b)(a+c)$.

(2)$x^2-4y^2-z^2+4yz$

$=x^2-(4y^2+z^2-4yz)$

$=x^2-(2y-z)^2$

$=(x+2y-z)(x-2y+z)$.

【解题回顾】 若要对一个超过三项的多项式进行因式分解，可以尝试运用分组分解法.

三、错例警示

易错点：因式分解的方法与步骤.

例题 因式分解：

(1)$20m^3n-15m^2n^2+5m^2n$.

(2)$4x^2-16y^2$.

(3)$3x^2-18x+27$.

【典型错误】 (1)$20m^3n-15m^2n^2+5m^2n$

$=5m^2n(4m-3n)$.

(2)$4x^2-16y^2=(2x+4y)(2x-4y)$.

(3)$3x^2-18x+27=3(x^2-6x+9)$.

【错因分析】 因式分解时，(1)漏项，(2)没提取公因式，(3)分解不彻底.

【正确解答】 (1)$20m^3n-15m^2n^2+5m^2n$

$=5m^2n(4m-3n+1)$.

(2)$4x^2-16y^2=4(x+2y)(x-2y)$.

(3)$3x^2-18x+27=3(x^2-6x+9)=3(x-3)^2$.

【启发体会】 掌握因式分解的思路：

1. 要看能否提取公因式.

2. 要看多项式的项数，若是二项式，尝试用平方差公式进行分解；若是三项式，尝试用完全平方公式进行分解.

3. 分解的结果必须彻底.

§1.4 分式

一、知识回顾

(一)知识要点

1. 分式的概念

(1)一般地,如果 A,B 表示两个整式,并且 B 中含有字母,那么式子$\frac{A}{B}(B\neq0)$叫做分式,其中 A 为分子,B 为分母.

(2)与分式有关的条件:

①当________时,分式$\frac{A}{B}$有意义;

②当________时,分式$\frac{A}{B}$无意义;

③当________且________时,分式$\frac{A}{B}$的值为 0.

2. 分式的基本性质

(1)分式的分子和分母同乘(或除以)一个不等于 0 的整式,分式的值________.

用式子表示:$\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$,$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$,其中 A,B,C 是整式,$C\neq0$.

(2)分式的符号法则:分式的分子、分母与分式本身的符号,改变其中任何两个,分式的值________.

用式子表示:$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$.

3. 分式的运算

(1)分式的约分:根据分式的基本性质,把一个分式的分子与分母的________约去,叫做分式的约分.一个分式的分子与分母没有公因式时,叫做________.

(2)分式的通分:根据分式的基本性质,把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母分式,叫做分式的________.

(3)分式的加减法:

①$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$;②$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

(4)分式的乘除法:

①$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd}$;

②$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

(5)分式的乘方:$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

(二)基础自测

1. 下列式子中,属于分式的是 ( )

A. $\frac{x}{3}$　　B. $\frac{x+1}{2}$

C. $\frac{x}{x+y}$　　D. $\frac{x}{2}+y$

2. 要使分式$\frac{3}{a+1}$有意义,则 a 的取值范围应满足________.

3. (丽水中考题)分式$\frac{1}{1-x}$可变形为 ( )

A. $-\frac{1}{x-1}$　　B. $\frac{1}{1+x}$

C. $-\frac{1}{1+x}$　　D. $\frac{1}{x-1}$

4. (衡阳中考题)若分式$\frac{x-2}{x+1}$的值为 0,则 x 的值为 ( )

A. 2 或 -1　B. 0　　C. 2　　D. -1

5. (济南中考题)计算$\frac{2x}{x+3}+\frac{6}{x+3}$的结果是 ( )

A. 2　　B. 3

C. $x+2$　　D. $2x+6$

6. (益阳中考题)下列等式中,成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{3}{a+b}$　　B. $\frac{2}{2a+b}=\frac{1}{a+b}$

C. $\frac{ab}{ab-b^2}=\frac{a}{a-b}$　　D. $\frac{a}{-a+b}=-\frac{a}{a+b}$

7. (济南中考题)化简$\frac{m-1}{m}\div\frac{m-1}{m^2}$的结果是 ( )

A. m　　B. $\frac{1}{m}$

C. $m-1$　　D. $\frac{1}{m-1}$

二、典例解剖

例 1 要使分式$\frac{x+1}{x-2}$有意义,则 x 的取值应满足 ( )

A. $x\neq2$　　B. $x\neq-1$

C. $x>2$　　D. $x=-1$

【思路分析】 分式$\frac{x+1}{x-2}$有意义的条件是分母 $x-2$ 不为 0,即 $x-2\neq0$,解这个不等式求出 x 的

取值范围.

【解答过程】 A

【解题回顾】 要使分式$\frac{A}{B}$有意义,需满足什么条件?

【学习感悟】 分式有意义,重点关注分式的分母不能为0,然后把问题转化为求解不等式.

变式迁移1 (1)当$x=$______时,分式$\frac{x-1}{x+1}$无意义.

(2)(毕节中考题)若分式$\frac{x^2-1}{x-1}$的值为0,则x的值为 ( )

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

例2 (淄博中考题)下列运算错误的是( )

A. $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=1$

B. $\frac{-a-b}{a+b}=-1$

C. $\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$

D. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-a}{b+a}$

【思路分析】 化简过程列表如下:

选项	正误	正确化简过程
A	正确	$\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1$
B	正确	$\frac{-a-b}{a+b}=\frac{-(a+b)}{a+b}=-\frac{a+b}{a+b}=-1$
C	正确	$\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{(0.5a+b)\times10}{(0.2a-0.3b)\times10}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$
D	错误	$\frac{a-b}{a+b}=\frac{-(b-a)}{b+a}=-\frac{b-a}{b+a}$

【解答过程】 D

【解题回顾】 1. 分式变形的依据是什么?

2. $a-b$与$b-a$有什么关系?$(a-b)^n$与$(b-a)^n$又有什么关系?

【学习感悟】 1. 分式变形的依据是分式的基本性质.

2. 分式变形时,分子、分母应看作一个整体来考虑.

3. $(a-b)^n$与$(b-a)^n$的关系是:当n为非零偶数时,它们相等;当n为奇数时,它们互为相反数.

例3 (达州中考题)化简求值:

$\left(1+\frac{1}{a}\right)\div\frac{a^2-1}{a}-\frac{2a-1}{a^2-2a+1}$,$a$取$-1,0,1,2$中一个合适的数.

【思路分析】 根据运算法则,先算$1+\frac{1}{a}$,同时把除法转化成乘法,再把a^2-1及a^2-2a+1因式分解,最后按照运算顺序进行化简.

【解答过程】

$$原式=\frac{a+1}{a}\times\frac{a}{(a-1)(a+1)}-\frac{2a-1}{(a-1)^2}$$
$$=\frac{1}{a-1}-\frac{2a-1}{(a-1)^2}$$
$$=\frac{a-1-2a+1}{(a-1)^2}$$
$$=-\frac{a}{(a-1)^2},$$

∴当$a=2$时,原式$=-\frac{2}{(2-1)^2}=-2$.

【解题回顾】 1. 分式通分和约分的法则是什么?

2. 类比实数运算,分式的运算顺序是怎样的?

3. 分式运算时,若分子或分母是多项式,则应该先考虑做什么?

4. 化简后,能选取$a=0$或$a=1$代入计算吗?为什么?

【学习感悟】 对于分式的化简求值题型,一般解题思路为:(1)先对分子、分母中的多项式进行因式分解,利用通分、约分的相关知识对分式进行化简;(2)选择合适的字母取值代入化简后的代数式计算结果,注意字母取值时一定要使原分式有意义,而不是只关注化简后的代数式.

变式迁移2 先化简$\frac{x-4}{x^2-9}\div\left(1-\frac{1}{x-3}\right)$,再从不等式$2x-3<7$的正整数解中,选一个使原式有意义的数代入求值.

例 4 已知 a,b 满足 $ab=1$，$M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$，$N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$，试比较 M,N 的大小.

【思路分析】 要比较 M,N 的大小，通常用作差法，先求出 $M-N$ 的结果.若化简后结果为零，则 $M=N$；若化简后结果大于零，则 $M>N$；若化简后结果小于零，则 $M<N$.另外，也可以对 N 进行变形，把 N 中的 1 都用 ab 去代替，然后约分，可以发现化简后的结果与 M 相同，即 $M=N$.

【解答过程】 方法一：

$$M-N=\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\right)-\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)$$
$$=\frac{1-a}{1+a}+\frac{1-b}{1+b}$$
$$=\frac{(1-a)(1+b)+(1-b)(1+a)}{(1+a)(1+b)}$$
$$=\frac{2-2ab}{(1+a)(1+b)}$$

$\because ab=1$，$\therefore M-N=0$，即 $M=N$.

方法二：

$\because ab=1$，

$$\therefore N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$
$$=\frac{a}{ab+a}+\frac{b}{ab+b}$$
$$=\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a}$$
$$=M.$$

$\therefore M=N$.

【解题回顾】 1. 比较两个式子大小的方法有哪些？

2. 能否把 M,N 分别化简，再比较 M,N 的大小？试一试.

【学习感悟】 比较两个分式的大小，通常用作差法.本题的作差法即分式的加减运算，因此熟练地通分与约分是解题的关键.本题的方法二，实质上是“换元”，即巧妙地用 ab 去代替 1，再进行化简，从而得 $M=N$.

三、错例警示

易错点：分式运算顺序混乱不清.

例题 计算：$\frac{2a-4}{a^2+4a+4}\div\frac{a-2}{a+2}\cdot(a+2)$.

【典型错误】 $\frac{2a-4}{a^2+4a+4}\div\frac{a-2}{a+2}\cdot(a+2)=\frac{2a-4}{a^2+4a+4}\div(a-2)=\frac{2}{a^2+4a+4}$.

【错因分析】 计算时，没有遵循分式运算顺序，分式的乘除混合运算属于同级运算，运算应该从左到右依次进行.

【正确解答】 $\frac{2a-4}{a^2+4a+4}\div\frac{a-2}{a+2}\cdot(a+2)=\frac{2(a-2)}{(a+2)^2}\cdot\frac{(a+2)^2}{(a-2)}=2$.

【启发体会】 在分式的混合运算时，一定要遵循正确的分式运算顺序.