高等职业教育“十三五”创新型规划教材

高等数学

（经管类）学习指导

● 主编　周　玮　刘玉菡　王　栋

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十三五”创新型规划教材

高等数学（经管类）学习指导

主　编　周　玮　刘玉菡　王　栋
副主编　于秀萍　张彭飞　陈允峰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共 8 章. 内容包括函数、极限与连续学习指导，导数与微分学习指导，导数的应用学习指导，积分及其应用学习指导，多元函数微分学学习指导，常微分方程学习指导，行列式与矩阵学习指导，线性方程组与线性规划学习指导. 每章都按照教学要求、学习要求、典型例题分析、复习题、复习题答案、自测题、自测题答案 7 部分内容编写. 本书还根据近几年专升本试题编写了经济类各专业的模拟试题及参考答案.

本书特别注重培养学生应用数学的意识，注重数学的应用能力，数学与经济专业的有机结合. 本书可与北京理工大学出版社出版的《高等数学（经管类）》教材配套使用，也可作为经济类专业的数学基础课程的学习辅导用书，也是经济类专业专升本的重要参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（经管类）学习指导 / 周玮，刘玉菡，王栋主编. —北京：北京理工大学出版社，2019.9

ISBN 978-7-5682-7655-9

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①周…　②刘…　③王…　Ⅲ. ①高等数学–高等学校–教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 222720 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京虎彩文化传播有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 10.5
字　　数 / 250 千字
版　　次 / 2019 年 9 月第 1 版　2019 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 / 32.00 元

责任编辑 / 李玉昌
文案编辑 / 李玉昌
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 施胜娟

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前 言

从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部最新制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》为指导，编者结合多年的教学经验以及高职教改成果编写了本书.

本书内容共 8 章，每章都包括教学要求、学习要求、典型例题分析、复习题及答案、自测题及答案等 7 项内容. 本书在编写过程中力求使教学和学习要求明确，重点突出，例题分析翔实精确，习题选题覆盖面宽且注重专业应用，自我测试难易适中.

本书具有以下特点：

1. 严格按照《高职高专教育基础课程教学基本要求》编写，遵照高职数学教学规律，以掌握概念、强化应用为重点，注重培养学生用数学解决实际问题的能力.

2. 典型例题分析涵盖了本章的基本概念、基本性质、运算及应用，某些例题不仅给出了求解的详细过程和多种解法，还给出了解题思路和解法指导，并针对高职高专这一层面学生容易产生疑惑的问题由浅入深地进行了分析说明，便于学生自学.

3. 针对高职学生的接受能力和理解程度，本书精心设计了复习题和自测题，并逐一给出了简解. 考虑到层次教学的使用，本书适当选择了一些历届“专升本”试题，如果读者在复习的基础上，在规定时间内独立完成各章的自测题，再注意复习总结，完全可以达到“专升本”对高等数学的要求.

4. 本书在编写语言上力求通俗易懂，简明扼要，富有启发性，并体现数学的应用性. 各章均设计了一定量的贴近生活、贴近实际的应用题，特别是经济管理方面的经济应用实例，以增强学生对数学的兴趣及应用意识.

参加本书编写的有济南工程职业技术学院周玮（第一、第二章），于秀萍、张彭飞（第三、第四章），刘玉菡（第五、第六章），王栋、陈允峰（第七、第八章）. 全书由周玮统稿、定稿.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编 者

目 录

第一部分 微 积 分

第二部分　线 性 代 数

第一部分

微　积　分

第一章

函数、极限与连续学习指导

函数是客观世界中变量与变量之间相互依赖关系的反映，是高等数学的主要研究对象. 极限是研究微积分的重要工具，并作为重要的思想方法和研究工具，贯穿于高等数学课程的始终. 连续性是运用极限的方法揭示出来的函数的重要性质. 本章主要学习函数、极限、连续的基本概念，无穷小和无穷大，极限的运算等内容. 本章内容在全书中具有基础性的地位和作用.

一、教 学 要 求

1．理解函数的概念和性质，会求函数的定义域.

2．了解基本初等函数、初等函数和分段函数的概念.

3．了解反函数、复合函数的概念，会正确分析复合函数的复合过程.

4．理解极限的概念，掌握函数在一点处极限的定义、左右极限与函数极限的关系.

5．理解无穷小与无穷大的概念及其相互关系，并会对无穷小进行比较.

6．熟练掌握极限的四则运算法则及两个重要极限.

7．掌握函数连续的概念，函数在一点连续的充分必要条件，会求函数的间断点并确定其类型.

8．掌握闭区间上连续函数的性质、最值定理、零点定理、介值定理，并会运用介值定理推证一些简单命题.

9．会求连续函数和分段函数的极限.

10．了解经济函数及简单应用.

重点：函数、初等函数、复合函数的概念；极限的概念及计算；连续的概念及判断.

难点：复合函数的分解；极限、连续的概念及求解；应用介值定理推证简单命题.

二、学 习 要 求

1．熟练掌握六种基本初等函数的定义、性质及其图像.

2．复合函数的分解应注意分解顺序，“由表及里”分解到基本初等函数的形式或基本初等函数的四则运算形式.

3．深刻理解函数极限的概念，强调函数在某点是否有极限与函数在该点是否有定义无关.

4．熟练掌握函数极限的各种求法.

5．判断函数在某一点连续时，必须满足连续的三个条件，对于分段函数需考虑左右极限.

6．判断间断点的类型，主要依据该点的左右极限是否存在.

三、典型例题分析

（一）函数的概念及性质

【例 1】 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{x^2-1}+\arccos x+\sqrt{x}$；

（2）$y=\ln\cos x$；

（3）$y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$；

（4）$y=\arcsin(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

【解】（1）要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ |x|\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases}，即\begin{cases}x\neq\pm 1\\ -1\leqslant x\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

所以，$0\leqslant x<1$，故函数的定义域为$[0,\ 1)$.

（2）要使函数有意义，x 应满足

$$\cos x>0$$

所以，$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，故函数的定义域为

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\quad(k\in\mathbf{Z})$$

（3）要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases}5-x\geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}，即\begin{cases}x\leqslant 5\\ x>1\end{cases}$$

所以，$1<x\leqslant 5$，故函数的定义域为$(1,\ 5]$.

（4）要使函数有意义，x 应满足

$$\begin{cases}|x-1|\leqslant 1\\ 1-x^2>0\end{cases}，即\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\ -1<x<1\end{cases}$$

所以，$0\leqslant x<1$，故函数的定义域为$[0,\ 1)$.

说明：求函数的定义域时应注意以下几点：

（1）若函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零.

（2）若函数的表达式中含有偶次方根，则根式下的表达式必须非负.

（3）若函数的表达式中含有对数，则真数必须大于零.

（4）若函数的表达式中含有 $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$，则必须满足 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

（5）分段函数的定义域是各个部分自变量的取值范围之并集.

（6）若函数式是由几个函数经过四则运算构成的，其定义域是各个函数的定义域的公共部分.

【例 2】 已知 $f(x)$ 的定义域为[0, 1]，求 $f(\ln x)$ 及 $f(\sin x)$ 的定义域.

【解】因为 $f(x)$ 的定义域为[0, 1]，$0\leqslant \ln x\leqslant 1$，故 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，所以 $f(\ln x)$的定义域为[1, e].

同理 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，故

$$2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z})$$

所以 $f(\sin x)$ 的定义域为

$$\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi \quad (k\in \mathbf{Z})\}$$

【例 3】 判断下列函数的奇偶性：

（1） $f(x)=2^x+2^{-x}$；　　（2） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3） $f(x)=x^3-\dfrac{\arctan x}{x}\ (x\neq 0)$；　　（4） $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0\\ 2-x, & x>0\end{cases}$.

【解】（1）因为 $f(-x)=2^{-x}+2^x=f(x)$，所以 $f(x)=2^x+2^{-x}$ 是偶函数.

（2）因为 $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

（3） $f(-x)=(-x)^3-\dfrac{\arctan(-x)}{(-x)}=-x^3-\dfrac{\arctan x}{x}\neq -f(x)$， $f(-x)\neq f(x)$

故 $f(x)=x^3-\dfrac{\arctan x}{x}\ (x\neq 0)$ 既非奇函数也非偶函数.

（4）因为 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0\\ 2-x, & x>0\end{cases}=\begin{cases}x+2, & x<0\\ 2, & x=0\\ 2-x, & x>0\end{cases}$

$$f(-x)=\begin{cases}2-x, & -x<0\\ 2, & x=0\\ 2+x, & -x>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-x, & x>0\\ 2, & x=0\\ 2+x, & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0\\ 2-x, & x>0\end{cases}$$
$$=f(x)$$

所以$f(x)$是偶函数.

说明：判断分段函数的奇偶性，在分段点处存在“≥”或“≤”时，先分成“>”“=”，或“<”“=”，然后再判断.

【例 4】 判断下列函数的有界性：

（1）$y=2x^2+1$；（2）$y=3\sin 2x-5\cos 3x$.

【解】（1）对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，有$|y|=|2x^2+1|=2x^2+1$无界，故函数$y=2x^2+1$在$(-\infty,+\infty)$上无界.

（2）对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，有$|y|=|3\sin 2x-5\cos 3x|\leqslant|3\sin 2x|+|5\cos 3x|\leqslant 3+5=8$，故函数$y=3\sin 2x-5\cos 3x$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

【例 5】 求下列函数的表达式：

（1）设$f(1+x)=x^2+3x+5$，求$f(x)$；

（2）已知$f(2x-1)=x^2$，求$f[f(x)]$；

（3）设$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$g(x)=1+x^2$，求$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$；并确定它们的定义域；

（4）若$f(x)=10^x$，$g(x)=\ln x$，求$f[g(100)]$，$g[f(3)]$.

【解】（1）**解法一**：设$1+x=u$，则$x=u-1$，得

$$f(u)=f(1+x)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$$

故

$$f(x)=x^2+x+3$$

解法二：直接将$f(1+x)$凑成$1+x$的函数，即$f(1+x)=(1+x)^2+(1+x)+3$，故

$$f(x)=x^2+x+3$$

说明：已知$f[g(x)]$，求$f(x)$的表达式，一般设$u=g(x)$，解出$x=\varphi(u)$，代入$f[g(x)]$，求出$f(u)$的表达式，再将u换成x得到$f(x)$. 也可用凑成法.

（2）令$u=2x-1$，则$x=\dfrac{u+1}{2}$，代入$f(2x-1)=x^2$得$f(u)=\left(\dfrac{u+1}{2}\right)^2=\dfrac{(u+1)^2}{4}$，因此

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{4}$$

$$f[f(x)]=\frac{[f(x)+1]^2}{4}=\frac{\left(\dfrac{(x+1)^2}{4}+1\right)^2}{4}=\frac{[(x+1)^2+4]^2}{64}$$

（3）
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x+1}\quad(x\neq -1)$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{1+x+1}=\frac{1+x}{2+x}\quad (x\neq -2)$$

$$g[g(x)]=1+(1+x^2)^2=x^4+2x^2+2\text{，}\quad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

$$f[g(x)]=\frac{1}{1+(1+x^2)}=\frac{1}{x^2+2}\text{，}\quad x\in(-\infty,\ +\infty)$$

$$g[f(x)]=1+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2=\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\quad (x\neq -1)$$

说明：注意复合次序，一般情况下 $f[g(x)]\neq g[f(x)]$.

（4）因为 $g(100)=\ln 100$，所以

$$f[g(100)]=f(\ln 100)=10^{\ln 100}$$

因为 $f(3)=10^3$，所以

$$g[f(3)]=g(10^3)=\ln 10^3=3\ln 10$$

【例 6】 分解下列复合函数：

（1） $y=\cos\frac{1}{x+1}$；　　　　（2） $y=2^{\sin^3 x}$；

（3） $y=\lg^2\arccos x^5$；　　　　（4） $y=\sqrt{\ln\tan x^2}$.

【解】（1） $y=\cos\frac{1}{x+1}$ 可分解为 $y=\cos u$， $u=v^{-1}$， $v=x+1$.

（2） $y=2^{\sin^3 x}$ 可分解为 $y=2^u$， $u=v^3$， $v=\sin x$.

（3）$y=\lg^2\arccos x^5$ 可分解为 $y=u^2$， $u=\lg v$， $v=\arccos\omega$， $\omega=x^5$.

（4）$y=\sqrt{\ln\tan x^2}$ 可分解为 $y=\sqrt{u}$， $u=\ln v$， $v=\tan\omega$， $\omega=x^2$.

（二）极限的求法

1．数列极限的求法，以及等差数列和等比数列前 n 项的极限.

2．利用极限的四则运算法则计算.

3．$\frac{0}{0}$ 型，可用“约零因子法”，或等价代换的方法.

4．$\frac{\infty}{\infty}$ 型，可提取无穷大因子或分子分母同除以适当无穷大，特别地，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, m>n\\ \frac{a_0}{b_0}, m=n\ (a_0,\ b_0\neq 0)\\ \infty, m<n\end{cases}$$

5．$\infty-\infty$ 型，可有理化或通分后转变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

6．利用两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\text{；}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

7．无穷小法：无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小；在同一自变量变化过程中，无穷大的倒数是无穷小；无穷小量的等价代换.

8．分段函数在分界点处的极限，要分别求左、右极限判断极限是否存在.

9．利用连续性求极限，若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；若 $g(x)$ 在 x_0 处连续，$\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right]=f[g(x_0)]$，函数符号可以与极限符号互换.

【例 7】 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n^2+1)}{n^3+4n^2+3}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right)$，其中 n 为自然数；

（4）$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

【解】（1）“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，一般采用分子和分母同除以 n 的最高次幂的方法求极限，分子分母同除以 n^3，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+1)}{n^3+4n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^3}}=\frac{2}{1}=2$$

（2）此数列极限为“$\infty-\infty$”型，将其有理化后求极限，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

（3）因为 $\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}=\dfrac{\dfrac{n(1+2n-1)}{2}}{n+3}=\dfrac{n^2}{n+3}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{n+3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n+3}$，值为无穷大，极限不存在.

（4）因为 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left[1-\dfrac{1}{2^n}\right]$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}2\left[1-\frac{1}{2^n}\right]=2$$

【例 8】 已知 a、b 为常数，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax+b}{x-1}=4$，求 a、b 的值.

【分析】 此题为 $x\to x_0$ 时的有理函数极限式，当 $\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x)=0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=A\,(A\neq0)$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)=0$.

【解】因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=4$，必有$\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=0$，故有$a+b=0$，即$a=-b$，代入$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)}{x-1}=4$，故有 a=4，b=–4.

【例 9】 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$；　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+1}{x^3+3x^2-2}$.

【解】（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{2}=\sqrt{2}$$

说明：此题是$\dfrac{0}{0}$型极限，可通过分母有理化约去零因子，再求极限.

（2）此题是$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，分子分母同除以x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^3+1}{x^3+3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^3}}=\frac{-3}{1}=-3$$

【例 10】 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{x-2}$；　　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$.

【解】（1）由重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x-2}\sin(x-2)=1\times 0=0$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

说明：此类题为带有三角函数的“$\frac{0}{0}$”型，注意选用 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

【例 11】 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+4}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$；（3）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}$；（6）$\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

【解】（1）由重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}\times 4+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{4}\times 4}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{4}=\mathrm{e}^4\times 1=\mathrm{e}^4$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}=\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x)^{\frac{1}{-x}}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}}=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\csc x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$

（6）$\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\mathrm{e}=1$$

说明：此类题为“1^∞”型，注意运用 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{g(u)\to\infty}\left[1+\frac{1}{g(u)}\right]^{g(u)}=\mathrm{e}$.

【例 12】 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}x\sin x$.

【解】（1）当 $x\to 0$ 时，x 是无穷小，因 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\sin\frac{1}{x}$ 是有界函数，故 $x\sin\frac{1}{x}$ 是无穷小，于是 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.