湘教版

湘教考苑

"单元学习全优用书"

★ 一线名师的重要讲义

梳理单元知识 / 对比历年热考题型 / 巩固本单元的重点知识

★ 优生必看的精华笔记

以教材单元为基本结构 / 依据历年热考题型 / 汇总本单元的知识重点

★ 紧贴考点的拓展演练

遵循教材和考纲 / 以图表概述单元结构 / 轻松把握知识要点

9 数学 九年级下册

单元整合与测评

DANYUAN ZHENGHE YU CEPING

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

湖南教育出版社

湘教版

本册主编 康　军　戴洪昱

丛书编委 李　珺　康　军
仇玉云　吴课朋
戴美红　曾灿辉
肖　耘　刘寒晓
龙凤云　彭智旭

"单元学习全优用书"

★ 一线名师的重要讲义

梳理单元知识 / 对比历年热考题型 / 巩固本单元的重点知识

★ 优生必看的精华笔记

以教材单元为基本结构 / 依据历年热考题型 / 汇总本单元的知识重点

★ 紧贴考点的拓展演练

遵循教材和考纲 / 以图表概述单元结构 / 轻松把握知识要点

9 数学

九年级下册

单元整合与测评

DANYUAN ZHENGHE YU CEPING

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

单元整合与测评. 数学九年级. 下册：湘教版/《单元整合与测评》编写组编. —长沙：湖南教育出版社，2016.1
ISBN 978-7-5539-3058-9

Ⅰ. ①单… Ⅱ. ①单… Ⅲ. ①中学数学课－初中－习题集
Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 292344 号

单元整合与测评
数 学　九年级下册(湘教版)
本书编写组　编

责任编辑：钟劲松
出版发行：湖南教育出版社
地　　址：长沙市韶山北路 443 号
网　　址：http://www.hneph.com
电子邮箱：hnjycbs@sina.com
微信服务号：多点学习
客　　服：电话 0731-85486979
经　　销：湖南省新华书店
印　　刷：湖南长福彩色印务有限公司
开　　本：787×1092　1/16
印　　张：8
字　　数：250 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5539-3058-9
定　　价：18.00 元

CONTENTS 目录

第 1 章　二次函数

第 2 章　圆

第 3 章　投影与视图

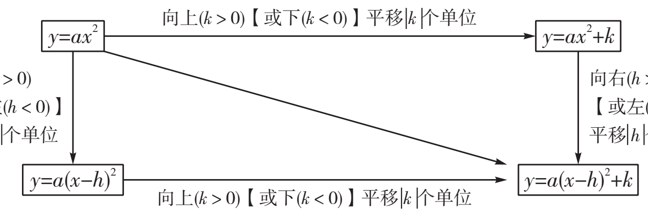
第 4 章　概率

初中数学知识总结

第 1 章

二次函数

单元知识梳理

<table>
<tr><td>知识点</td><td colspan="4">内容</td></tr>
<tr><td>二次函数的概念</td><td colspan="4">一般地，如果 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 是常数，$a\neq0$)，那么 y 叫做 x 的二次函数</td></tr>
<tr><td rowspan="7">二次函数的 5 种形式
①$y=ax^2$
②$y=ax^2+k$
③$y=a(x-h)^2$
④$y=a(x-h)^2+k$
⑤$y=ax^2+bx+c$ 的性质与图象及之间关系</td><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>函数解析式</td><td>开口方向</td><td>对称轴</td><td>顶点坐标</td></tr>
<tr><td>$y=ax^2$</td><td rowspan="5">当 $a>0$ 时开口向上；当 $a<0$ 时开口向下</td><td>$x=0$(y 轴)</td><td>(0，0)</td></tr>
<tr><td>$y=ax^2+k$</td><td>$x=0$(y 轴)</td><td>(0，k)</td></tr>
<tr><td>$y=a(x-h)^2$</td><td>$x=h$</td><td>(h，0)</td></tr>
<tr><td>$y=a(x-h)^2+k$</td><td>$x=h$</td><td>(h，k)</td></tr>
<tr><td>$y=ax^2+bx+c$</td><td>$x=-\frac{b}{2a}$</td><td>$\left(-\frac{b}{2a}，\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$</td></tr>
<tr><td>二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质</td><td colspan="4">1. 当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}，\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 有最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.
2. 当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}，\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 有最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.</td></tr>
</table>

知识点	内容
求抛物线的顶点、对称轴的方法	1. 公式法：$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，∴顶点是$\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 2. 配方法：运用配方法将抛物线的解析式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，得到顶点为$(h,\ k)$,对称轴是 $x=h$ 3. 运用抛物线的对称性：由于抛物线是以对称轴为轴的轴对称图形，所以抛物线上纵坐标相等的两个点连线的垂直平分线是抛物线的对称轴，对称轴与抛物线的交点是顶点
抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 中，a、b、c 的作用	1. a 决定开口方向及开口大小，这与 $y=ax^2$ 中的 a 完全一样 2. b 和 a 共同决定抛物线对称轴的位置. 由于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，故：①$b=0$ 时，对称轴为 y 轴；②$\frac{b}{a}>0$ 时，对称轴在 y 轴左侧；③$\frac{b}{a}<0$ 时，对称轴在 y 轴右侧 3. c 的大小决定抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交点的位置 当 $x=0$ 时，$y=c$，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴有且只有一个交点$(0,\ c)$：①$c=0$，抛物线经过原点；②$c>0$，与 y 轴交于正半轴；③$c<0$，与 y 轴交于负半轴
用待定系数法求二次函数的解析式	一般式：$y=ax^2+bx+c$. 已知图象上三点或三对 x、y 的值，通常选择一般式 顶点式：$y=a(x-h)^2+k$. 已知图象的顶点或对称轴，通常选择顶点式 交点式：已知图象与 x 轴的交点坐标 x_1、x_2，通常选用交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$
二次函数与一元二次方程的关系	1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 当函数 y 的值为 0 时的情况 2. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点有三种情况：有两个交点、有一个交点、没有交点；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有交点时，交点的横坐标就是当 $y=0$ 时自变量 x 的值，即一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 3. 当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个交点时，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有一个交点时，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根；当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴没有交点时，则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根
二次函数的应用	1. 二次函数常用来解决最优化问题，这类问题实际上就是求函数的最大(小)值. 一般而言，最大(小)值会在顶点处取得，达到最大(小)值时的 x 即为顶点横坐标值，最大(小)值也就是顶点纵坐标值 2. 二次函数的应用包括以下方面：分析和表示不同背景下实际问题中变量之间的二次函数关系；运用二次函数的知识解决实际问题中的最大(小)值

重点知识详解

1.1 二次函数

知识点拨

知识点1 二次函数的概念

如果函数的表达式是自变量的二次多项式，这样的函数称为二次函数，它的一般形式为：$y=ax^2+bx+c$（其中 a，b，c 为常数，$a\neq0$）.

判断一个函数是否为二次函数的方法和步骤：

(1)先将函数进行整理，使其右边是含有自变量的代数式，左边是因变量；

(2)判断右边含自变量的代数式是否为整式；

(3)判断含自变量的项的最高次数是否为2；

(4)判断二次项的系数是否为零.

例1 下列函数中，是二次函数的是(　　)

A. $y=68x^2+1$　　B. $y=8x+1$

C. $y=\frac{8}{x}$　　D. $y=-\frac{8}{x^2}+1$

解：根据二次函数的定义选A.

知识点2 二次函数的一般形式

任何一个二次函数的解析式都可以化成 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数，$a\neq0$）的形式，因此，把 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 为常数，$a\neq0$）叫做二次函数的一般形式. 其中 ax^2、bx、c 分别是二次项、一次项和常数项；而 a，b，c 分别是二次项系数、一次项系数和常数项.

例2 将二次函数 $y=-2(x-2)^2$ 化成一般形式，其中二次项系数为________，一次项系数为________，常数项为________.

分析：通过去括号、移项，可以把方程化成二次函数的一般形式，然后确定二次项系数、一次项系数、常数项.

解：$y=-2(x-2)^2$ 变形为：$y=-2x^2+8x-8$，

所以二次项系数为-2，一次项系数为8，常数项为-8.

故答案为：-2，8，-8.

整合突破

1. 下列函数中，是二次函数的是(　　)

A. $y=2-x^2$

B. $y=x^2-\frac{1}{x}$

C. $y=(x-2)^2-x^2$

D. $y=x^3-2x+1$

2. 函数 $y=(m^2+m)\cdot x^{m^2-2m-1}$ 是二次函数，那么 m 的值是(　　)

A. 2　　B. -1 或 3

C. 3　　D. ±1

【答案】 1. A　2. C

整合突破

3. 把下列二次函数化成一般形式，并指出二次项系数、一次项系数、常数项.

(1) $y=x^2+(x+1)^2$；

(2) $y=(2x+3)(x-1)+5$；

(3) $y=4x^2-12x(1+x)$；

(4) $y=(x+1)(x-1)$.

【答案】 3. (1) $y=2x^2+2x+1$　(2) $y=2x^2+x+2$　(3) $y=-8x^2-12x$　(4) $y=x^2-1$

知识点3 根据实际情境建立二次函数模型

在生产和生活中有大量的实际问题和二次函数有着密切的联系，解决此类问题的关键是把实际问题转化为二次函数问题，要注意分析问题中量与量之间的关系，正确地写出二次函数表达式.

列函数表达式的步骤：

(1)审清题意，找出实际问题中的已知量、未知量，将文字、图形语言转化为数学符号语言；

(2)找出等量关系，找到已知量和未知量间的关系，并用等式表示；

(3)列函数表达式，设出表示变量的字母，把等量关系用含字母的代数式替换，并将解析式写成用自变量表示因变量的形式.

例3 某商店将每件进价为8元的商品按每件10元出售，一天可售出100件，此店想通过降低售价增加销售量的办法来提高利润，经过市场调查，发现这种商品单价每降低0.1元，其销售量可增加10件. 设这种商品的售价降低x元时，销售利润是y元，求y与x之间的函数表达式，并求出x的取值范围.

分析：在这个问题中，此商品每天的利润与其降价的幅度有关，每降价x元，则多售$100x$件，每件获得的利润是$(10-x-8)$元.

解：由题意可知y与x之间的函数表达式是$y=(10-x-8)(100+100x)$,

即$y=-100x^2+100x+200$.

由于进价为8元，原售价为10元，故x的取值范围是$0\leqslant x\leqslant 2$.

点评：一定要注意x的取值范围不能只考虑$x\geqslant 0$，还要考虑每件商品的利润，即x不能大于2.

整合突破

4. 在一块长方形镜面玻璃的四周镶上与它的周长相等的边框，制成一面镜子，镜子的长与宽的比是2∶1，已知镜面玻璃的价格是每平方米120元，边框的价格是每米30元，另外制作这面镜子还需加工费45元. 设制作这面镜子的总费用是y元，镜子的宽是x m.

(1)求y与x之间的函数表达式；

(2)如果制作这面镜子共花了195元，求这面镜子的长和宽.

【答案】 4. (1) $y=240x^2+180x+45$　(2)长为1 m，宽为0.5 m

1.2 二次函数的图象与性质

知识点拨

知识点1 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象与性质

二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图象

$y=ax^2$ 的图象是一条抛物线，其顶点是坐标原点，对称轴是 y 轴. 开口方向由 a 的符号决定，①当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，顶点为其最低点；②当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，顶点为其最高点.

抛物线 $y=ax^2$ 的开口大小由 a 的绝对值决定，$|a|$ 越大，抛物线的开口越窄；$|a|$ 越小，抛物线的开口越宽.

抛物线是向两边无限延伸的.

二次函数 $y=ax^2$ 的性质

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a>0$	向上	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x=0$ 时，y 有最小值 0
$a<0$	向下	$(0, 0)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小； $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大； $x=0$ 时，y 有最大值 0

例1 已知抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $A(-2,-8)$.

(1)求此抛物线的函数解析式；

(2)判断点 $B(-1,-4)$ 是否在此抛物线上；

(3)求出此抛物线上纵坐标为 -6 的点的坐标.

解：(1)把 $(-2,-8)$ 代入 $y=ax^2$，得 $-8=a(-2)^2$，解出 $a=-2$，所求函数解析式为 $y=-2x^2$.

(2)因为 $-4\neq-2\times(-1)^2$，

所以点 $B(-1,-4)$ 不在此抛物线上.

(3)由 $-6=-2x^2$，得 $x^2=3$，$x=\pm\sqrt{3}$，

所以纵坐标为 -6 的点有两个，

它们分别是 $(-\sqrt{3},-6)$ 和 $(\sqrt{3},-6)$.

知识点2 二次函数 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象与性质

二次函数 $y=ax^2+k(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线，它的对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,k)$，它与 $y=ax^2$ 的图象形状相同，只是位置不同. 函数 $y=ax^2+k$ 的图象是由抛物线 $y=ax^2$ 向上(或下)平移 $|k|$ 个单位得到的.

整合突破

1. 抛物线 $y=3x^2$，$y=-2x^2$，$y=0.7x^2$ 共有的性质是(　　)

A. 开口向下

B. 对称轴是 y 轴

C. 都有最高点

D. y 随 x 的增大而增大

2. 通过列表、描点、连线的方法画函数 $y=-x^2$ 的图象.

【答案】 1. B 2. 略

整合突破

3. 在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{3}x^2+2$ 的图象与函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象有什么关系?

二次函数 $y=ax^2+k$ 的性质：

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a>0$	向上	$(0,k)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=0$ 时，y 有最小值 k
$a<0$	向下	$(0,k)$	y 轴	$x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=0$ 时，y 有最大值 k

例 2 如果将抛物线 $y=x^2+2$ 向下平移 1 个单位长度，那么所得新抛物线的解析式是(　　)

A. $y=(x-1)^2+2$　　B. $y=(x+1)^2+2$

C. $y=x^2+1$　　D. $y=x^2+3$

解：选 C. 根据“上加下减”得新抛物线的解析式是 $y=x^2+2-1=x^2+1$.

知识点 3 二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象与性质

二次函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象是一条抛物线，它的对称轴是平行于 y 轴或与 y 轴重合的直线 $x=h$，顶点坐标是 $(h,0)$，它与 $y=ax^2$ 的图象形状相同，位置不同，函数 $y=a(x-h)^2(a\neq0)$ 的图象是由抛物线 $y=ax^2$ 向右(向左)平移 $|h|$ 个单位得到的.

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的性质：

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a>0$	向上	$(h,0)$	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=h$ 时，y 有最小值 0
$a<0$	向下	$(h,0)$	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=h$ 时，y 有最大值 0

例 3 (1)抛物线 $y=2(x-3)^2$ 的顶点在(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. x 轴上　　D. y 轴上

(2)将二次函数 $y=-(x-1)^2$ 的图象向左平移 3 个单位得到的抛物线的对称轴为(　　)

A. 直线 $x=0$　　B. 直线 $x=4$

C. 直线 $x=-2$　　D. 直线 $x=3$

解：(1)选 C. 抛物线 $y=2(x-3)^2$ 是由抛物线 $y=2x^2$ 向

4. 画一次函数 $y=-2x+5$ 的图象，请从图象和表达式两个角度探索其性质($y=kx+b$，$k<0$ 时，图象的变化情况).

【答案】3. 函数 $y=\frac{1}{3}x^2+2$ 的图象是由函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 的图象向上平移 2 个单位得到的.

4. 图略. 当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

整合突破

5. 已知抛物线 $y=-(x+2)^2$，当 x ________时，y 随 x 的增大而增大；当 x ________时，y 随 x 的增大而减小.

6. 函数 $y=3(x+6)^2$ 的图象是由函数________的图象向左平移 5 个单位得到的，其图象开口向________，对称轴是________，顶点坐标是________.

7. 求二次函数 $y=-6(x-2)^2$ 的顶点坐标和对称轴.

8. 已知二次函数 $y=(x-1)^2$.

(1)平面直角坐标系中画出这个函数的图象；

(2)根据图象，写出当 $x<0$ 时，y 的取值范围.

右平移 3 个单位得到的，$y=2x^2$ 的顶点坐标是(0，0)，所以抛物线 $y=2(x-3)^2$ 的顶点为(3，0)，顶点在 x 轴上.

(2)选 C. 抛物线 $y=-(x-1)^2$ 的对称轴是直线 $x=1$，二次函数 $y=-(x-1)^2$ 的图象向左平移 3 个单位后，此时对称轴为直线 $x=-2$.

点评：抛物线 $y=a(x-h)^2$ 的平移情况：抛物线 $y=a(x-h)^2$ 是在 $y=ax^2$ 基础上左右平移得到的，左右平移不改变抛物线的开口方向及大小，但改变对称轴及顶点坐标.

知识点 4 二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的(a、h、k 是常数，$a\neq0$)的图象与性质

$y=a(x-h)^2+k$ 的图象是由抛物线 $y=ax^2$ 的图象向左(或向右)平移 $|h|$ 个单位，再向上(或向下)平移 $|k|$ 个单位得到的.

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的性质：

a 的符号	开口方向	顶点坐标	对称轴	性质
$a>0$	向上	$(h，k)$	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x=h$ 时，y 有最小值 k
$a<0$	向下	$(h，k)$	$x=h$	$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x=h$ 时，y 有最大值 k

例 4 函数 $y=2(x+3)^2+1$ 的图象是由函数________的图象向左平移 2 个单位得到的，其图象开口向________，对称轴是________，顶点坐标是________.

解：函数 $y=2(x+3)^2+1$ 的图象是由函数 $y=2(x+1)^2+1$ 的图象向左平移 2 个单位得到的，因为 $a=2>0$，所以开口向上，对称轴是直线 $x=-3$，顶点坐标是(-3，1).

答案：$y=2(x+1)^2+1$　上　直线 $x=-3$　(-3，1)

点评：抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 是在 $y=ax^2+k$ 基础上左右平移得到的，左右平移不改变抛物线的开口方向及大小，但改变对称轴及顶点坐标.

知识点 5 抛物线的平移规律

在原有函数的基础上“h 值正右移，负左移；k 值正上移，负下移”. 概括成八个字“左加右减，上加下减”.

保持抛物线 $y=ax^2$ 的形状不变，将其顶点平移到$(h，k)$处，具体平移方法如下：

【答案】5. <-2，>-2　6. $y=3(x+1)^2$，上，$x=-6$，(-6，0)　7. (2，0)，$x=2$　8. (1)略　(2)$y>1$

整合突破

9. 将二次函数 $y=-(x+1)^2+3$ 的图象向右平移 3 个单位得到的抛物线的对称轴为(　　)

A. 直线 $x=0$

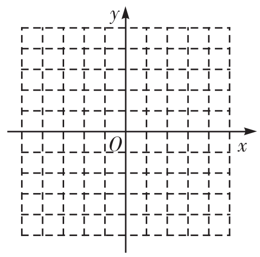
B. 直线 $x=2$

C. 直线 $x=-2$

D. 直线 $x=3$

10. 已知二次函数 $y=-(x-1)^2+4$.

(1)用列表描点法，在所给的如图坐标系中画出这个二次函数的图象；

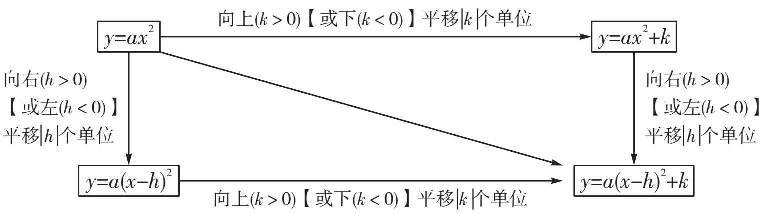


(2)根据图象写出当 y 为正数时 x 的取值范围.

【答案】9. B　10. (1)略　(2)$-1<x<3$

整合突破

11. 将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向上平移 2 个单位长度，再向右平移 3 个单位长度后，得到的抛物线的解析式为(　　)



例 5 将抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 向左平移 1 个单位，再向下平移 3 个单位后所得抛物线的解析式为(　　)

A. $y=(x-2)^2$　　B. $y=(x-2)^2+6$

C. $y=x^2+6$　　D. $y=x^2$

解：选 D. 抛物线 $y=(x-1)^2+3$ 向左平移 1 个单位，变为 $y=(x-1+1)^2+3$ 即 $y=x^2+3$；再向下平移 3 个单位后所得抛物线的解析式为 $y=x^2+3-3$ 即 $y=x^2$.

知识点 6 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象与性质

将 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 配方成 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$，得顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的性质有：

(1)当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 有最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

(2)当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$时，y 有最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例 6 把二次函数 $y=-\frac{1}{4}x^2-x+3$ 用配方法化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式为(　　)

A. $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2$

B. $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

C. $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2+4$

A. $y=(x-1)^2+4$

B. $y=(x-4)^2+4$

C. $y=(x+2)^2+6$

D. $y=(x-4)^2+6$

12. 把二次函数 $y=2x^2$ 的图象向左平移 1 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，平移后抛物线的解析式为________.

【答案】 11. B　12. $y=2(x+1)^2-2$

整合突破

13. 二次函数 $y=-3x^2-6x+5$ 的图象的顶点坐标是(　　)

A. $(-1,8)$

B. $(1,8)$

C. $(-1,2)$

D. $(1,-4)$

14. 将抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$向下平移 3 个单位，再向左平移 4 个单位得到抛物线 $y=-2x^2-4x+5$，则原抛物线的顶点坐标是________.

15. 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$.

(1)用配方法确定它的顶点坐标、对称轴.

(2)x 取何值时，y 随 x 增大而减小?

(3)x 取何值时，抛物线在 x 轴上方?

D. $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

解：$y=-\frac{1}{4}x^2-x+3=-\frac{1}{4}(x^2+4x-12)$

$=-\frac{1}{4}(x^2+4x+4-12-4)=-\frac{1}{4}[(x+2)^2-16]$

$=-\frac{1}{4}(x+2)^2+4.$

选 C.

知识点 7 二次函数的最值及其应用

二次函数的最值情况：

(1)顶点式 $y=a(x-h)^2+k$

当 $a>0$，$x=h$ 时，y 有最小值 k，无最大值；

当 $a<0$，$x=h$ 时，y 有最大值 k，无最小值.

(2)一般式 $y=ax^2+bx+c$

当 $a>0$ 时，函数在 $x=-\frac{b}{2a}$处取得最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最大值；

当 $a<0$ 时，函数在 $x=-\frac{b}{2a}$处取得最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最小值.

例 7 二次函数 $y=-x^2+mx$ 中，当 $x=3$ 时，函数值最大，求其最大值.

解：二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，当 $x=-\frac{b}{2a}$时，函数取最值$\frac{4ac-b^2}{4a}$，即$-\frac{b}{2a}=3$，因为 $a=-1$，所以 $b=6$，即$m=6$，解析式为 $y=-x^2+6x$，$\frac{4ac-b^2}{4a}=9$，故最大值为 9.

【答案】13. A 14. (3，10) 15. (1)顶点坐标$\left(-1,\frac{9}{2}\right)$，对称轴为直线 $x=-1$；(2)$x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小；(3)$-4<x<2$ 时，抛物线在 x 轴上方.

整合突破

16. 抛物线 $y=-3(x+4)^2+1$ 中，当 $x=$______时，有最______值，是______.

17. 二次函数 $y=x^2-4x+7$ 的最小值为( )

A. 2　　B. -2

C. 3　　D. -3

18. 函数 $y=x(2-3x)$，当 x 为何值时，函数有最大值还是最小值？并求出最值.

【答案】16. -4，大，1 17. C 18. 当 $x=\frac{1}{3}$时，函数有最大值$\frac{1}{3}$.

*1.3 不共线三点确定二次函数的表达式

知识点拨

知识点 用待定系数法求不共线三点的二次函数表达式

如果已知二次函数图象上任意三个点的坐标(也就是函数的三组对应值)，将它们代入函数表达式，列出一个关于待定系数 a、b、c 的三元一次方程组，求出 a、b、c 的值，就可以确定二次函数的表达式.

不共线三点确定二次函数的表达式有如下常见的三种形式：

(1)一般式：$y=ax^2+bx+c$(a、b、c 为常数，$a\neq0$)，关系式的右边是二次三项式的一般形式，当已知抛物线上任意三点时，通常设函数表达式为一般式，然后列出关于 a、b、c 的三元一次方程组求解.

(2)交点式(两根式)：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$(a、x_1、x_2 是常数，$a\neq0$)，由关系式的右边可知，抛物线与 x 轴的两个交点的横坐标为 x_1、x_2，即交点 $A(x_1,0)$、交点 $B(x_2,0)$，当已知抛物线与 x 轴的两个交点或交点的横坐标时，通常设函数表达式为两根式，利用第三个条件求解.

(3)顶点式：$y=a(x-h)^2+k$(a、h、k 为常数，$a\neq0$)，由表达式的右边可知，抛物线顶点坐标为(h,k)，当已知抛物线的顶点和抛物线上另一点时，通常设函数表达式为顶点式，然后代入另一点的坐标，解关于 a 的一元一次方程.

从上述三种表达式可知：要确定二次函数的表达式，必须先确定表达式中的待定系数(常数)，而每一种形式中都含有三个待定系数，需要已知三个独立的条件，注意正确地依据相关条件灵活设函数表达式.

例 1 已知一个二次函数的图象过$(0,-3)$，$(4,5)$，$(-1,0)$三点，求这个函数的解析式.

解：设所求的二次函数为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，

∵二次函数的图象过点$(0,-3)$，$(4,5)$，$(-1,0)$.

$$\therefore\begin{cases}c=-3,\\16a+4b+c=5,\\a-b+c=0,\end{cases}\therefore\text{解得}\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3,\end{cases}$$

所以二次函数的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

例 2 下列二次函数中，图象以直线 $x=2$ 为对称轴且经过点$(0,1)$的是 ( )

A. $y=(x-2)^2+1$　　B. $y=(x+2)^2+1$

C. $y=(x-2)^2-3$　　D. $y=(x+2)^2-3$

解：选 C. 根据以直线 $x=2$ 为对称轴可知选项 A，C 符合，再根据图象经过点$(0,1)$知选项 C 符合.

整合突破

1. 一个二次函数的图象经过 $A(0,0)$，$B(-1,-11)$，$C(1,9)$三点，则这个二次函数的解析式是( )

A. $y=-10x^2+x$

B. $y=-10x^2+19$

C. $y=10x^2+x$

D. $y=-x^2+10x$

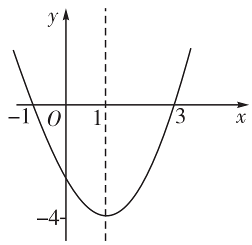
2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$($a\neq0$，a，b，c 为常数)的图象如图，那么它的解析式是( )

A. $y=(x-1)^2+4$

B. $y=(x-1)^2-4$

C. $y=(x+1)^2+4$

D. $y=(x+1)^2-4$



3. 已知关于 x 的二次函数的图象的顶点坐标为$(-1,2)$，且图象过点$(1,-3)$，求这个二次函数的关系式.

【答案】 1. D　2. B　3. $y=-\frac{5}{4}(x+1)^2+2$

1.4 二次函数与一元二次方程的联系

知识点拨

知识点 1 二次函数与一元二次方程的联系

方程与函数有着密切的联系，我们可以利用方程(组)解决函数问题，也可以利用函数解决方程(组)问题. 我们知道，二次函数的一般形式是 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，而一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. 显然，当二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中 $y=0$ 时就能得到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，所以一元二次方程与二次函数是特殊与一般的关系.

利用一元二次方程解决二次函数问题：

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 来说，当 $y=0$ 时，就得一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，因此我们可以利用一元二次方程求二次函数图象与 x 轴的交点坐标. 进一步我们还可以探讨一元二次方程 $\Delta=b^2-4ac$ 的取值与二次函数图象与 x 轴的交点坐标的情况之间的关系：

①当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点；

②当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有唯一交点(这个唯一交点就是抛物线的顶点)；

③当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点(抛物线要么全部在 x 轴上方，要么全部在 x 轴下方).

例1 若二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴有两个交点，坐标分别为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，且 $x_1<x_2$，图象上有一点 $M(x_0,y_0)$ 在 x 轴下方，则下列判断正确的是(　　)

A. $a>0$　　B. $b^2-4ac<0$

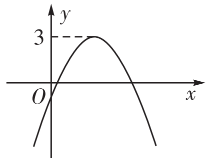
C. $x_1<x_0<x_2$　　D. $a(x_0-x_1)(x_0-x_2)<0$

解：选 D. 抛物线与 x 轴有不同的两个交点，则 $b^2-4ac>0$，与 B 矛盾，可排除 B 选项；剩下 A，C，D 不能直接判断，我们分 $a>0$，$a<0$ 两种情况画出两个草图来分析(如图).

由图可知 a 的符号不能确定(可正可负，即抛物线的开口可向上，也可向下)，所以 x_0，x_1，x_2 的大小就无法确定；在图 1 中，$a>0$ 且有 $x_1<x_0<x_2$，则 $a(x_0-x_1)(x_0-x_2)$ 的值为负；在图 2 中，$a<0$ 且有 $x_0<x_1<x_2$，或 $x_1<x_2<x_0$，则

整合突破

1. 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，那么关于 x 的方程 $ax^2+bx+c-2=0$ 的根的情况是(　　)



A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个异号的实数根

C. 有两个相等的实数根

D. 没有实数根

2. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m-3)x-m=0$.

(1) 试判断原方程根的情况.

(2)若抛物线 $y=x^2-(m-3)x-m$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$两点，则 A，B 两点间的距离是否存在最大或最小值？若存在，求出这个值；若不存在，请说明理由. (提示：$AB=|x_2-x_1|$)

$a(x_0-x_1)(x_0-x_2)$的值也为负．所以正确选项为D．

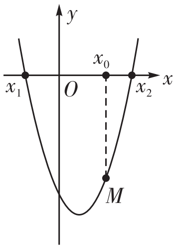


图1

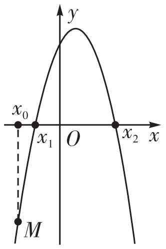
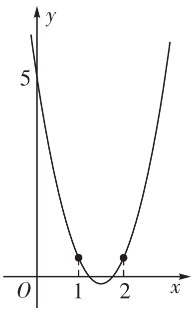


图2

例2 若关于x的一元二次方程$2x^2+ax+5=0$的两根在1与2之间(不含1和2)，则a的取值范围是________．

分析：这是一个一元二次方程问题，如果直接用一元二次方程的根来列不等式组，需要列5个不等式，也就是：$\Delta=a^2-40>0$，$\frac{-a+\sqrt{a^2-40}}{4}>1$，$\frac{-a+\sqrt{a^2-40}}{4}<2$，$\frac{-a-\sqrt{a^2-40}}{4}>1$，$\frac{-a-\sqrt{a^2-40}}{4}<2$，这样将会很麻烦．那么如何解才能比较简单呢？如果我们利用二次函数图象来帮助分析，解法将简单得多．令$y=2x^2+ax+5$，如图我们可以画出这个函数的大致图象．根据图象对称轴在y轴右侧，可知$-\frac{a}{4}>0$，解得$a<0$．再根据$\Delta=a^2-40>0$可得$a<-2\sqrt{10}$．根据图象特征可知图象上横坐标为1和2的两个点的纵坐标都是正数，所以可得$\begin{cases}2\times1^2+a\cdot1+5>0,\\2\times2^2+a\cdot2+5>0,\end{cases}$可解得$a>-\frac{13}{2}$．这样就能得到$a$的取值范围是$-\frac{13}{2}<a<-2\sqrt{10}$．



答案：$-\frac{13}{2}<a<-2\sqrt{10}$．

点评：利用一元二次方程解决二次函数问题，这种题型比较多，也容易想到．而反过来，利用二次函数解决一元二次方程问题，这种题型就比较少了，遇到的时候也不容易想到．以后遇到一元二次方程问题，用方程知识不好解决时，可以尝试用用二次函数．

知识点2 利用图象求一元二次方程的解的近似值

利用图象求一元二次方程的解的近似值，就是在直角坐标系中通过作出二次函数图象，从图象和x轴的交点判断交点的横坐标，就是相应一元二次方程的解．由于作图或观察的误差，由图象求得的根，一般是近似的．

3．已知抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+x+c$与x轴有两个不同的交点．

(1)求c的取值范围．

(2)抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+x+c$与x轴的两交点间的距离为2，求c的值．

【答案】1．A 2．(1)原方程有两个不等实数根；(2)AB有最小值$2\sqrt{2}$ 3．(1)$c<\frac{1}{2}$ (2)$c=-\frac{3}{2}$

整合突破

4．已知二次函数$y=x^2+2x-10$，小明利用计算器列出了下表：