湘教版

湘教考苑

DANYUAN ZHENGHE
YU CEPING

单元整合与测评

单元学习全优用书

一线名师的重要讲义

单元知识梳理

梳理单元知识重点，
对比历年热考题型，
巩固本单元的重点知识。

优生必看的精华笔记

重点知识详解

以教材单元为基本结构，
依据历年热考题型，
汇总本单元的知识重点。

紧贴考点的拓展演练

思维能力拓展

遵循教材和考纲，
以图标概述单元结构，
轻松把握知识要点。

8 数学

八年级上册

本书编写组 编

配套单元测试卷 + 期中测试卷 + 期末测试卷

湖南教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

单元整合与测评．数学八年级．上册：湘教版/《单元整合与测评》编写组编．—长沙：湖南教育出版社，2015.8
ISBN 978-7-5539-2619-3

Ⅰ．①单… Ⅱ．①单… Ⅲ．①中学数学课—初中—习题集
Ⅳ．①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 188580 号

单元整合与测评
数 学 八年级上册(湘教版)
本书编写组 编

责任编辑：钟劲松
出版发行：湖南教育出版社
地 址：长沙市韶山北路 443 号
网 址：http://www.hneph.com
电子邮箱：hnjycbs@sina.com
微信服务号：多点学习
客 服：电话 0731—85486979
经 销：湖南省新华书店
印 刷：湖南关山美印有限公司
开 本：787×1092 1/16
印 张：8
字 数：250 千字
版 次：2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5539-2619-3
定 价：15.00 元

CONTENTS 目录

第一章　分　式

第二章　三角形

第三章　实　数

第四章　一元一次不等式(组)

第五章　二次根式

第一章

分　式

单元知识梳理

知识点		概念	数学符号表示
分式的定义		设 f、g 都是整式，且 g 中含有字母，我们把 f 除以 g 所得的商记作$\frac{f}{g}$，把$\frac{f}{g}$叫做分式	$\frac{f}{g}$（$g\neq 0$，g 中含有字母）
分式基本性质		分式的分子与分母同时乘以一个非零的多项式，所得分式与原分式相等；分式的分子分母同时约去公因式，所得分式与原分式相等	设 $h\neq 0$，则$\frac{f}{g}=\frac{f\cdot h}{g\cdot h}$
分式的符号变换法则		分式中，分子、分母、分式本身的符号，同时改变其中两个，分式值不发生变化	$\frac{-f}{-g}=\frac{f}{g}$，$\frac{f}{-g}=\frac{-f}{g}=-\frac{f}{g}$
分式的运算法则	分式的乘法	可以先把分子、分母分别相乘再约分，也可以先约分再分子、分母分别相乘	$\frac{f}{g}\cdot\frac{u}{v}=\frac{f\cdot u}{g\cdot v}$
	分式的除法	分式除以分式，把被除式的分子分母颠倒位置后，与被除式相乘	$\frac{f}{g}\div\frac{u}{v}=\frac{f}{g}\cdot\frac{v}{u}=\frac{f\cdot v}{g\cdot u}$
	分式加减法	同分母：分母不变，分子相加减；异分母：先通分，化为同分母的分子然后相加减	$\frac{f}{g}\pm\frac{h}{g}=\frac{f\pm h}{g}$
整数指数幂	同底数的幂的除法	同底数幂相除，底数不变，指数相减	$a^m\div a^n=a^{m-n}$（m、n 都是正整数，$m>n$，$a\neq 0$）
	零次幂	任何不等于零的数的零次幂都等于 1	$a^0=1(a\neq 0)$
	负整数指数幂	任何一个不等于 0 的数的 $-n$ 次幂，都等于这个数的 n 次幂的倒数	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$（$a\neq 0$，n 是正整数），$a^{-1}=\frac{1}{a}(a\neq 0)$
	整数指数幂运算法则		设 $a\neq 0$，m，n 都是整数，则：$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^nb^n$

重点知识详解

1.1 分 式

知识点拨

知识点1 分式的概念

一般地，如果 A，B 表示两个整式，并且 B 中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$叫做分式，A 为分子，B 为分母，且 $B\neq 0$.

分式值为0，则分母不等于0，分子等于0；

分式有意义，则分母不等于0；

分式无意义，则分母等于0.

例题1 在下列代数式中：

$-3x$，$\frac{2}{3}x^2y-7xy^2$，$-\frac{1}{8}x$，$\frac{x-y}{5}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{3}{y+5}$，$\frac{2x}{x}$，$\frac{x+y}{3\pi}$. 哪些是整式？哪些是分式？

【点拨】依据分式、整式的定义从形式上进行辨别.

【答案】整式有：$-3x$，$\frac{2}{3}x^2y-7xy^2$，$-\frac{1}{8}x$，$\frac{x-y}{5}$，$\frac{x+y}{3\pi}$.

分式有：$\frac{x}{y}$，$\frac{3}{y+5}$、$\frac{2x}{x}$.

知识点2 分式的性质

设 $h\neq 0$，则$\frac{f}{g}=\frac{f\cdot h}{g\cdot h}$，即：分式的分子与分母同时乘以一个非零的多项式，所得分式与原分式相等；分式的分子分母同时约去公因式，所得分式与原分式相等.

例题2 不改变分式的值，把分子、分母的系数化为整数.

(1)$\dfrac{\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y}{\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y}$；　　(2)$\dfrac{0.2a-0.03b}{0.04a+b}$.

【点拨】通过观察已给的分式，从而确定分子和分母都同时乘以什么因式.

解：(1)通过观察分子和分母的分数，上下同时乘以12，

则原式$=\dfrac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)\times 12}{\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y\right)\times 12}=\dfrac{6x-8y}{4x+3y}$；

整合突破

1. 下列有理式：$-\frac{1}{2x}$、$\frac{ab}{3}$、$\frac{a}{3a+1}$、$\frac{xy}{3}$、$\frac{2}{x}-y$、$\frac{x-3}{x+2}$中，

整式：____________；

分式：____________.

2. 当 x 取何值时，下列分式的值为0.

(1)$\frac{x-1}{x+3}$　(2)$\frac{|x|-2}{x^2-5}$

【答案】1. $\frac{ab}{3}$　$\frac{xy}{3}$　$-\frac{1}{2x}$　$\frac{a}{3a+1}$　$\frac{2}{x}-y$　$\frac{x-3}{x+2}$　2. (1)1　(2)± 2

整合突破

3. 不改变分式的值，把下列分式的分子、分母的系数化为整数.

(1)$\dfrac{0.03x-0.2y}{0.08x+0.5y}$；

(2)$\dfrac{0.4a+\frac{3}{5}b}{\frac{1}{4}a-\frac{1}{10}b}$.

(2)通过观察分子和分母的小数，上下同时乘以 100，

原式$=\dfrac{(0.2a-0.03b)\times 100}{(0.04a+b)\times 100}=\dfrac{20a-3b}{4a+100b}$.

知识点 3 分式的约分

1. 约分的概念：把一个分式的分子与分母的公因式约去，叫做分式的约分.

2. 分式约分的依据：分式的基本性质.

3. 分式约分的方法：把分式的分子与分母分解因式，然后约去分子与分母的公因式.

例题 3 把下列各式约分：

(1)$\dfrac{-16x^2y}{20xy^3}$； (2)$\dfrac{a^2+4a+3}{a^2+a-6}$.

【点拨】约分的关键是确定分式中分子、分母的公因式. 先利用因式分解，然后再找公因式.

解：(1)$\dfrac{-16x^2y}{20xy^3}=\dfrac{4xy(-4x)}{4xy(5y^2)}=\dfrac{-4x}{5y^2}$；

(2)$\dfrac{a^2+4a+3}{a^2+a-6}=\dfrac{(a+1)(a+3)}{(a-2)(a+3)}=\dfrac{a+1}{a-2}$.

知识点 4 最简分式

分式的分子与分母没有公因式的分式，叫作最简分式.

判断一个分式是否为最简分式，关键是确定它的分子与分母是否有公因式(公因式 1 除外).

提示：约分一般是将一个分式化成最简分式，将分式约分所得的结果有时可能是整式约分可以使求分式的值比较简便.

例题 4 判断下列分式，哪些是最简分式？不是最简分式的，化成最简分式 .

(1)$\dfrac{m^2-2m+1}{1-m^2}$； (2)$\dfrac{(a-b)^2}{(b-a)^4}$；

(3)$\dfrac{x^2-y^2}{y^2}$； (4)$\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+8x+8}$.

【点拨】是不是最简分式，要严格按照定义来判断，就是看分子、分母有没有公因式 . 分子或分母是多项式时，要先把分子、分母因式分解. (1)$\dfrac{m^2-2m+1}{1-m^2}=-\dfrac{(m-1)^2}{(m+1)(m-1)}$，分子、分母有公因式 $m-1$，它不是最简分式；(2)$(b-a)^4=(a-b)^4$，故$\dfrac{(a-b)^2}{(b-a)^4}=\dfrac{(a-b)^2}{(a-b)^4}$，分子、分母有公因式$(a-b)^2$，它也不是最简分式；(3)$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$与分母 y^2 没有分因式，它是最简分式；(4)$x^2+2x+1=(x+1)^2$，$2x^2+8x+8=2(x+2)^2$，显然分子、分母没有公因式，它也是最简分式.

【答案】(1)$\dfrac{3x-20y}{8x+50y}$ (2)$\dfrac{8a+12b}{5a-2b}$

整合突破

4. 把下列各式约分：

(1)$\dfrac{-32a^3b^2c}{24a^2b^3d}$；

(2)$\dfrac{-15(a+b)^2}{-25(a+b)}$；

(3)$\dfrac{x^2-x-2}{4-x^2}$.

【答案】(1)$\dfrac{-4ac}{3bd}$ (2)$\dfrac{3(a+b)}{5}$ (3)$-\dfrac{x+1}{x+2}$

整合突破

5. 化简

(1)$\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$；

(2)$\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$；

(3)$\dfrac{(x+y)^2}{xy+y^2}$.

【答案】$\frac{x^2-y^2}{y^2}$，$\frac{x^2+2x+1}{2x^2+8x+8}$是最简分式；$\frac{m^2-2m+1}{1-m^2}$，$\frac{(a-b)^2}{(b-a)^4}$不是最简分式．

$\frac{m^2-2m+1}{1-m^2}=-\frac{(m-1)^2}{(m+1)(m-1)}=-\frac{m-1}{m+1}$；

$\frac{(a-b)^2}{(b-a)^4}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^4}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2\cdot(a-b)^2}=\frac{1}{(a-b)^2}$.

例题 5 (1)填空：$\frac{x}{x+1}=\frac{xy}{(\quad)}(y\neq0)$，$\frac{x-y}{x+y}=\frac{(\quad)}{x^2-y^2}(x-y\neq0)$，$\frac{a^2-ab}{ab}=\frac{a-b}{(\quad)}$.

(2)把分式$\frac{m}{2n}$中的字母m扩大为原来的2倍，而n缩小为原来的一半，则分式的值(　　)

A. 不变　　B. 是原来的2倍

C. 是原来的4倍　　D. 是原来的一半

(3)下列变形中，正确的是(　　)

A. $\frac{-x-y}{x-y}=-\frac{x-y}{x-y}=-1$　　B. $\frac{2a-b}{b+2a}=-\frac{b-2a}{b+2a}$

C. $\frac{-2x+3y}{3x-2y}=\frac{2x-3y}{3x-2y}$　　D. $\frac{-m-n}{-m+n}=\frac{m-n}{m+n}$

【点拨】利用分式的基本性质解答. (1)$\frac{x}{x+1}=\frac{xy}{xy+y}(y\neq0)$，$\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}(x-y\neq0)$，$\frac{a^2-ab}{ab}=\frac{a(a-b)}{ab}=\frac{a-b}{b}$.

(2)按题意，分式变成$\frac{2m}{2\times\frac{1}{2}n}=\frac{2m}{n}$，此式显然是原来分式的4倍，故应选C.

(3)可利用符号法则，A项. $\frac{-x-y}{x-y}=\frac{-(x+y)}{x-y}=-\frac{x+y}{x-y}$，显然A不正确；B项. $\frac{2a-b}{b+2a}=(-1)\times\frac{(2a-b)\times(-1)}{b+2a}=-\frac{b-2a}{b+2a}$，故B正确；C项只是将分子乘$-1$，而分母没有乘$-1$，所以C不正确；D项. $\frac{-m-n}{-m+n}=\frac{(-m-n)\times(-1)}{(-m+n)\times(-1)}=\frac{m+n}{m-n}$，所以D不正确，综上所述，应选B.

【答案】(1)$xy+y$　$x^2-2xy+y^2$　b　(2)C　(3)B

6. 如果将分式$\frac{3x}{2x-y}$中的x和y都扩大3倍，那么分式的值(　　)

A. 扩大3倍

B. 扩大4倍

C. 缩小3倍

D. 不变

7. 利用分式的基本性质填空.

(1)$\frac{3a}{5xy}=\frac{(\quad)}{10axy}(a\neq0)$；

(2)$\frac{a+2}{a^2-4}=\frac{1}{(\quad)}$.

8. 计算：

$\frac{m^2+2m+1}{m^2+1}-\frac{2}{m-1}$.

9. 对于分式$\frac{x+a+b}{a-2b+3x}$，当$x=1$时，分式的值为零，当$x=-2$时，分式无意义，试求a，b的值.

【答案】5. (1)$\frac{x-3}{x+3}$　(2)$\frac{x-2}{x}$　(3)$\frac{x+y}{y}$　6. D　7. (1)$6a^2$　(2)$a-2$　8. 1　9. $\frac{4}{3}$　$-\frac{7}{3}$

1.2 分式的乘法和除法

知识点拨

知识点1 分式的乘法

分式的乘法法则：分式乘分式，用分子的积作为积的分子，分母的积作为积的分母．式子表示为：$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$．分式乘法运算结果需要通过约分化为最简分式或整式．

例题1 计算：

(1)$\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}$；　　(2)$\frac{3a-3b}{10ab}\cdot\frac{25a^2b^3}{a^2-b^2}$．

【点拨】按照分式的乘法法则进行计算．

解：(1)$\frac{4x}{3y}\cdot\frac{y}{2x^3}=\frac{4x\cdot y}{3y\cdot 2x^3}=\frac{2}{3x^2}$．

(2)$\frac{3a-3b}{10ab}\cdot\frac{25a^2b^3}{a^2-b^2}$

$=\frac{(3a-3b)\cdot(25a^2b^3)}{10ab\cdot(a^2-b^2)}$

$=\frac{75(a-b)\cdot(a^2b^3)}{10ab\cdot(a-b)(a+b)}$

$=\frac{15ab^2}{2(a+b)}$．

知识点2 分式的除法

分式的除法法则：把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除式相乘．式子表示为

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$．

当除式(或被除式)是整式时，可以看作分母是1的式子，然后按分式除法法则计算．

例题2 计算：

(1)$\frac{12xy}{5a}\div 8x^2y$；　　(2)$(-3xy)\div\frac{2y^2}{3x}$；

(3)$\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{2a-2b}{a+b}$．

【点拨】根据分式的除法法则，即分式除以分式，把除式的分子、分母颠倒位置后，与被除数相乘，然后把分子、分母分别分解因式进行约分化简．

解：(1)$\frac{12xy}{5a}\div 8x^2y=\frac{12xy}{5a}\cdot\frac{1}{8x^2y}=\frac{3}{10ax}$．

整合突破

1. 计算：

(1)$\frac{3a}{4b}\cdot\frac{16b}{9a^2}$；

(2)$\frac{m^2-2m+1}{4-m}\cdot\frac{m-4}{m^2-1}$．

【答案】(1)$\frac{4}{3a}$　(2)$\frac{1-m}{m+1}$

整合突破

2. 计算：

(1)$\frac{ab^3}{2c^2}\div\frac{-5a^2b^2}{4cd}$；

(2)$\frac{x^2-4y^2}{x^2+4xy+4y^2}\div\frac{x+y}{2x^2+2xy}$．

(2) $(-3xy)\div\frac{2y^2}{3x}=(-3xy)\cdot\frac{3x}{2y^2}=-\frac{9x^2}{2y}$.

(3) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}\div\frac{2a-2b}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{a+b}{2(a-b)}=\frac{1}{2}$.

【答案】(1) $-\frac{2bd}{5ac}$ (2) $\frac{2x(x-2y)}{x+2y}$

知识点 3 分式的乘方

分式的乘方就是把分子、分母分别乘方. 用式子表示为 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

例题 3 计算：$\left(\frac{-2x^4y^2}{3z}\right)^3$.

【点拨】乘方后的符号，当是负数的偶次方时，乘方的结果为正，当是负数的奇次方时，乘方的结果为负.

解：$\left(\frac{-2x^4y^2}{3z}\right)^3=\frac{(-2x^4y^2)^3}{(3z)^3}=\frac{-8x^{12}y^6}{27z^3}$.

整合突破

3. 计算：

$\left(\frac{a^2b}{-c}\right)^3\cdot\left(\frac{c^2}{-ab}\right)^2$.

【答案】$-a^4bc$

知识点 4 分式的乘、除、乘方混合运算

分式的乘、除、乘方混合运算先算乘方，再算乘除.

例题 4 计算：(1) $\left(\frac{a^3}{3xy^2}\right)^2\div\left(-\frac{ay}{2x^2}\right)^3$；

(2) $\left(\frac{2ab^3}{-c^2d}\right)^2\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(\frac{-3c}{b^2}\right)^3$.

【点拨】分式的乘方与乘除运算有本质的区别，注意类比分数的乘方，保证分子与分母同时乘方，并特别小心符号问题.

解：(1) $\left(\frac{a^3}{3xy^2}\right)^2\div\left(-\frac{ay}{2x^2}\right)^3=\frac{a^6}{9x^2y^4}\div\left(-\frac{a^3y^3}{8x^6}\right)$

$=-\frac{a^6}{9x^2y^4}\cdot\frac{8x^6}{a^3y^3}=-\frac{8a^3x^4}{9y^7}$.

(2) $\left(\frac{2ab^3}{-c^2d}\right)^2\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(\frac{-3c}{b^2}\right)^3$

$=\frac{4a^2b^6}{c^4d^2}\div\frac{6a^4}{b^3}\cdot\left(\frac{-27c^3}{b^6}\right)$

$=\frac{4a^2b^6}{c^4d^2}\cdot\frac{b^3}{6a^4}\cdot\left(\frac{-27c^3}{b^6}\right)=\frac{-18b^3}{a^2cd^2}$.

整合突破

4. 化简：

$\frac{3b^2}{16a}\div\frac{bc}{2a^2}\cdot\left(-\frac{2a}{b}\right)^2$.

例题 5 先化简，再求值：$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$，其中 a 满足 $a^2-a=0$.

【点拨】利用分式的乘除运算化简，通过化简我们会发现其结果中含有 a^2-a，这样就可以利用整体代入求值了.

解：$\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2-2a+1}\div\frac{1}{a^2-1}$

$=\frac{a-1}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a+1)(a-1)}{1}$

$=(a-2)(a+1)=a^2-a-2$，

5. 化简求值：

$(a-2)\cdot\frac{a^2-4}{a^2-4a+4}=$________，当 $a=-2$ 时，该代数式的值为________.

当 $a^2-a=0$ 时，原式 $=0-2=-2$.

例题 6 (1)化简求值：$\frac{3x^2-xy}{9x^2-6xy+y^2}$，其中 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{2}{3}$；

(2)已知 $|a-4|+(b-9)^2=0$，计算 $\frac{a^2+ab}{b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$ 的值.

【点拨】分式的化简，实际上就是先将分式的分子、分母分别因式分解，然后约分，把分式化成一个最简分式或一个整式，最后代入求值.

解：(1) $\frac{3x^2-xy}{9x^2-6xy+y^2}=\frac{x(3x-y)}{(3x-y)^2}=\frac{x}{3x-y}$. 因为 $x=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{2}{3}$，

所以原式 $=\frac{\frac{1}{2}}{3\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{2}\div\frac{13}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{13}=\frac{3}{13}$.

(2) $\frac{a^2+ab}{b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a+b)\cdot a(a-b)}{b^2(a+b)(a-b)}=\frac{a^2}{b^2}$.

因为 $|a-4|\geqslant0$，$(b-9)^2\geqslant0$ 且 $|a-4|+(b-9)^2=0$，

所以 $\begin{cases}a-4=0,\\b-9=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=9.\end{cases}$ 所以原式 $=\frac{a^2}{b^2}=\frac{4^2}{9^2}=\frac{16}{81}$.

6. 已知 $y_1=2x$，$y_2=\frac{2}{y_1}$，$y_3=\frac{2}{y_2}$，…，$y_{2005}=\frac{2}{y_{2004}}$，则 $y_1\cdot y_{2005}$ 的值为________.

【答案】4. $\frac{3a^3}{2bc}$ 5. $a+2$ 0 6. 2

1.3 整数指数幂

知识点拨

知识点 1 同底数幂的除法

同底数幂的除法，底数不变，指数相减. 一般的，设 $a\neq0$，m，n 是正整数，且 $m>n$，则 $a^m\div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

同底数幂的除法法则中的 a 可以是数，也可以是一个整式.

例题 1 判断下列各式是否正确，错误请改正.

(1) $x^8\div x^2=x^4$；

(2) $-y^5\div(-y)^3=-y^3$；

(3) $(y-x)^9\div(x-y)^3=(x-y)^6$；

(4) $y^{m-1}\div y^{m-2}=y^3$；

(5) $x^8\div x^4\div x^3=x$.

整合突破

1. 计算：

(1) $a^8\div a^3$；

(2) $(-x)^6\div(-x)^3$；

【点拨】此例都可用同底数幂的除法的性质进行计算，注意运算符号，算出最终结果.

【答案】(1)不正确，应改为 $x^8 \div x^2 = x^6$，法则中底数不变，指数相减，而不是指数相除.

(2)不正确，应改为$-y^5 \div (-y)^3 = y^2$，$-y^5$ 与$(-y)^3$ 底数不同，要先化同底，即$(-y)^3 = -y^3$ 再计算.

(3)不正确，应改为$(y-x)^9 \div (x-y)^3 = -(x-y)^6$，$x-y$ 与$y-x$互为相反数，先化同底便可计算.

(4)不正确，应改为 $y^{m-1} \div y^{m-2} = y$，指数相减应为$(m-1)-(m-2)=1$.

(5)正确.

知识点 2 零次幂和负整数指数幂

零次幂：任何不等于零的数的零次幂都等于 1，即 $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$.

任何一个不等于 0 的数的$-n$ 次幂(a^{-n})，都等于这个数的 n 次幂的倒数，即 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$，n 为整数).

例题 2 计算：(1)$(-2)^3-(2^{10})^0$；

(2)$\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} \div (-7)^0$；

(3)$2^{-2}+(-2)^{-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{-1}$.

【点拨】根据零次幂和负整数指数幂的性质先化简再求值.

解：(1)$(-2)^3-(2^{10})^0 = -8-1 = -9$.

(2)$\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2} \div (-7)^0 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$.

(3)$2^{-2}+(-2)^{-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{-1}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+(-2)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}-\frac{1}{8}+2 = \frac{17}{8}$.

知识点 3 科学计数法

可用科学记数法表示一些绝对值较小的数，即将它们表示为 $a \times 10^n$($1 \leqslant |a| < 10$，n 为整数)的形式.

例题 3 用科学记数法表示：

(1)0.000 000 69　(2)$-$0.003 02　(3)3 604 000 000

【点拨】注意科学计数法的表示方法.

解：(1)$0.000\,000\,69 = 6.9 \times 0.000\,000\,1 = 6.9 \times 10^{-7}$.

(2)$-0.003\,02 = -3.02 \times 0.001 = -3.02 \times 10^{-3}$.

(3)$3\,604\,000\,000 = 3.604 \times 1\,000\,000\,000 = 3.064 \times 10^9$.

(3)$(-xy)^7 \div (-xy)^3$；

(4)$(x+y)^5 \div (x+y)^2$.

【答案】(1)a^5　(2)$-x^3$　(3)x^4y^4　(4)$(x+y)^3$

整合突破

2. 计算：

(1)$8^{10} \div 8^{10}$；

(2)$(-2)^{-4}$；

(3)10^{-2}；

(4)$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$；

(5)$\left(\frac{1}{3}\right)^0 \times 10^{-1}$.

【答案】(1)1　(2)$\frac{1}{16}$　(3)$\frac{1}{100}$　(4)9　(5)$\frac{1}{10}$

整合突破

3. 用科学记数法表示：

(1)100 000=________

(2)0.000 01=________

(3)$-$112 000=________

(4)$-$0.000 112=________

【答案】(1)1×10^5　(2)1×10^{-5}　(3)-1.12×10^5　(4)-1.12×10^{-4}

知识点 4 整数指数幂的运算法则

引入负整数、零指数幂后，指数的取值范围就推广到了整数，并且正整数幂的法则对负整数指数幂一样适用.

即 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$，$(ab)^n = a^n b^n$，$a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0)$，$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}(b \neq 0)$，$a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a \neq 0)$.

例题 4 计算：(1)$\left(\frac{b}{a}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$；(2)$(-3)^{-5} \div 3^3$；

(3)$a^{-2}b^2 \cdot (ab^{-1})$；(4)$\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot (xy)^{-2} \div (x^{-1}y)$.

【点拨】分析题目特点，选用不同公式.

解：(1)根据 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$，则 $\left(\frac{b}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

原式 $= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^4$.

(2)$(-3)^{-5} \div 3^3 = -3^{-5} \div 3^3 = -3^{-5-3} = -3^{-8}$.

(3)$a^{-2}b^2 \cdot (ab^{-1}) = (a^{-2} \cdot a)(b^2 \cdot b^{-1}) = a^{-1}b = \frac{b}{a}$；

(4)$\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot (xy)^{-2} \div (x^{-1}y)$

$= \frac{x^2}{y^2} \cdot x^{-2}y^{-2} \cdot xy^{-1} = \frac{x^2 \cdot x^{-2} \cdot x \cdot y^{-2} \cdot y^{-1}}{y^2} = \frac{x}{y^5}$.

例题 5 计算：(1)$(2m^2n^{-3})^{-3} \cdot (-mn^{-2})^2 \cdot (m^2n)^0$；

(2)$(4a^3)^3 \div (-2a^2)^2 + (-3a)^2 \cdot (2a)^3$；

(3)$\left[\frac{(a^2+2ab)+a+2b}{a^2-4b^2}\right]^{-1}$.

【点拨】利用幂的运算法则进行计算，结果一般化为正整数指数幂.

解：(1)$(2m^2n^{-3})^{-3} \cdot (-mn^{-2})^2 \cdot (m^2n)^0$

$= 2^{-3}m^{-6}n^9 \cdot m^2n^{-4} \cdot 1 = 2^{-3}m^{-4}n^5 = \frac{n^5}{2^3m^4} = \frac{n^5}{8m^4}$.

(2)$(4a^3)^3 \div (-2a^2)^2 + (-3a)^2 \cdot (2a)^3$

$= 4^3a^9 \div 4a^4 + 9a^2 \cdot 2^3a^3 = 16a^5 + 72a^5 = 88a^5$.

(3)$\left[\frac{(a^2+2ab)+a+2b}{a^2-4b^2}\right]^{-1}$

$= \frac{a^2-4b^2}{(a^2+2ab)+a+2b} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{(a+2b)(a+1)} = \frac{a-2b}{a+1}$.

整合突破

4. 下面的计算不正确的是（　　）

A. $a^{10} \div a^9 = a$

B. $b^{-6} \cdot b^4 = \frac{1}{b^2}$

C. $(-bc)^4 \div (-bc)^2 = -b^2c^2$

D. $b^5 + b^5 = 2b^5$

5. 化简：

(1)$\left(\frac{1}{a}\right)^{-p} =$________；

(2)$x^{-2} \cdot x^{-3} \div x^{-3} =$____；

(3)$(a^{-3}b^2)^3 =$________；

(4)$(a^{-2}b^3)^{-2} =$________.

6. 化简：

$\left[\frac{6}{5}(xy^{-2}) \div x^0 \cdot y^{-3} - \frac{1}{5}x^{-3}y^3\right] \div x^{-1}y^5$.

【答案】4. C

5. (1)a^p　(2)$\frac{1}{x^2}$　(3)$\frac{b^6}{a^9}$　(4)$\frac{a^4}{b^6}$

6. $\frac{6x^2}{5y^{10}} - \frac{1}{5x^2y^2}$

1.4　分式的加法和减法

知识点拨

知识点 1　同分母分式的加减法

同分母分式加减法：分母不变，把分子相加减．式子表示为$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$.

由于分式的分子不但可以是一个数，还可以是一个代数式，这样把分子相加减就是把各个分式的分子"整体"相加减，因此原来的分子要添上括号.

例题 1　完成下列各题.

(1)$\frac{2x+y}{x}+\frac{2x-y}{x}$；　　(2)$\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}$；

(3)$\frac{x+2}{x+3}-\frac{x-2}{x+3}+\frac{x-1}{x+3}$；　　(4)$\frac{3}{x-y}+\frac{2}{y-x}$.

【点拨】计算后得出的结果一定要化成最简分式.

解：(1)$\frac{2x+y}{x}+\frac{2x-y}{x}=\frac{2x+y+2x-y}{x}=4$.

(2)$\frac{x^2}{x+2}-\frac{4}{x+2}=\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=x-2$.

(3)$\frac{x+2}{x+3}-\frac{x-2}{x+3}+\frac{x-1}{x+3}=\frac{x+3}{x+3}=1$.

(4)$\frac{3}{x-y}+\frac{2}{y-x}=\frac{3}{x-y}+\frac{-2}{x-y}=\frac{1}{x-y}$.

知识点 2　异分母分式的加减法

分式的通分：根据分式的基本性质，把几个异分母的分式分别化成与原来的分式相等的同分母分式，叫做分式的通分.

异分母分式加减法：先通分，化为同分母的分式，然后再加减．式子表示为$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$.

例题 2　计算：$\frac{12}{m^2-9}+\frac{2}{3-m}$.

【点拨】先确定最简公分母，再通分，最后计算.

解：原式$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2}{m-3}$

$=\frac{12}{(m+3)(m-3)}-\frac{2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$(通分)

$=\frac{12-2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$(同分母分式加减法法则)

$=\frac{12-2m-6}{(m+3)(m-3)}$(化简分子)

整合突破

1. 计算：

(1)$-\frac{7}{a}+\frac{4}{a}$；

(2)$\frac{a-2b}{5b^2}-\frac{a+3b}{5b^2}$；

(3)$\frac{m^2-4}{m-n}-\frac{n^2-4}{m-n}$.

【答案】(1)$-\frac{3}{a}$　(2)$-\frac{1}{b}$　(3)$m+n$

整合突破

2. 通分：

(1)$\frac{x}{3ab^2c}$，$\frac{2}{-15a^2bc}$；

(2)$\frac{x-2}{1+x}$，$\frac{3x}{x^3-x}$；

$=\frac{-2m+6}{(m+3)(m-3)}$(化简分子)

$=\frac{-2(m-3)}{(m+3)(m-3)}$(分子分解因式)

$=-\frac{2}{m+3}$(化为最简分式)

知识点 3 分式的混合运算

分式的加、减、乘、除、乘方的混合运算的运算顺序：

先乘方、再乘除、后加减，同级运算中，谁在前先算谁，有括号的先算括号里面的，也要注意灵活运用，提高解题质量.

注意：在运算过程中，要明确每一步变形的目的和依据，注意解题的格式要规范，不要随便跳步，以便查对有无错误或分析出错的原因.

加减后得出的结果一定要化成最简分式(或整式).

例题 3 化简：$\frac{a-b}{a}\div\left(a-\frac{2ab-b^2}{a}\right)(a\neq b)$.

【点拨】在分式的混合运算中，要先对括号里的数进行通分，再利用因式分解来化简.

解：原式$=\frac{a-b}{a}\div\frac{a^2-2ab+b^2}{a}$

$=\frac{a-b}{a}\cdot\frac{a}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$.

例题 4 工人甲与工人乙生产同一种零件，甲每小时比乙多生产 8 个，现在要求甲生产 168 个零件，乙生产 144 个零件，他们两人谁能先完成任务？

【点拨】设乙每小时生产这种零件 x 个，则甲每小时生产$(x+8)$个，那么甲、乙两人完成任务分别需要$\frac{168}{x+8}$小时和$\frac{144}{x}$小时，题意在于比较$\frac{168}{x+8}$与$\frac{144}{x}$的大小，因此可用作差法比较.

解：设乙每小时生产 x 个零件，根据题意可得甲、乙两人完成任务的时间分别是$\frac{168}{x+8}$小时和$\frac{144}{x}$小时，将两式相减，得

$\frac{168}{x+8}-\frac{144}{x}=\frac{168x}{x(x+8)}-\frac{144(x+8)}{x(x+8)}=\frac{24(x-48)}{x(x+8)}$.

由题意，知 $x(x+8)>0$.

(1)当$\frac{24(x-48)}{x(x+8)}=0$，即 $x=48$ 时，甲、乙两人同时完成任务；

(2)当$\frac{24(x-48)}{x(x+8)}>0$，即 $x>48$ 时，乙先完成任务；

(3)当$\frac{24(x-48)}{x(x+8)}<0$，即 $x<48$ 时，甲先完成任务.

3. 计算：$a+2-\frac{4}{2-a}$.

【答案】2. 略 3. $\frac{a^2}{a-2}$

整合突破

4. 化简：

$\left(\frac{2x}{x+2}-\frac{x}{x-2}\right)\div\frac{x}{x^2-4}$.

5. 甲、乙两人住在同一小区，他们经常到附近的 A 加油站加油，两人恰好有两次同时到 A 加油站加油(假设两次加油的价格不相同)，甲每次加 30 升，乙每次加油 200 元.

(1)假设 x，$y(x\neq y)$分别表示两次加油时的单价(单位：元/升)，试用含 x、y 的代数式表示：甲两次加油共需付款________元，乙两次加油________升；

(2)若甲两次加油的平均单价为 P 元/升，乙两次加油的平均单价为 Q 元/升，则 $P=$______，$Q=$______.

(3)现规定两次加油的平均单价低的加油方式更合算，请你判断甲、乙的加油方式，谁的更合算些？并说明理由.

【答案】4. $x-4$

5. (1)$30(x+y)$，$\frac{200}{x}+\frac{200}{y}$；

(2)$\frac{x+y}{2}$元/升，$\frac{2xy}{x+y}$元/升；

(3)乙的加油方式合算.

1.5 可化为一元一次方程的分式方程

知识点拨

知识点1 分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

例题1 下列是分式方程的是 ( )

A. $\frac{3}{y-1}+\frac{5-y}{8}$　　B. $\frac{x}{4}=\frac{x-3}{8}$

C. $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}=x$　　D. $\frac{1}{x+5}+2=0$

【点拨】从分式方程的定义看出，要确保一个式子是分式方程必须满足三要素：①方程；②方程里含有字母；③分母里含有未知数. 此题中A是代数式，不是方程；虽然B和C含有分母，但是分母中都不含有未知数，因此只有D正确.

【答案】D

知识点2 解分式方程

解分式方程的步骤：

(1)去分母，把方程两边同乘以各分母的最简公分母(产生增根的过程).

(2)解整式方程，得到整式方程的解.

(3)检验. 把所得的整式方程的解代入最简公分母中：

如果最简公分母为0，则原方程无解，这个未知数的值是原方程的增根；如果最简公分母不为0，则是原方程的解.

产生增根的条件：①是得到的整式方程的解；②代入最简公分母后值为0.

例题2 解方程：(1)$\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}=0$；(2)$\frac{x}{x-3}-\frac{1}{2x-6}=\frac{1}{2}$.

【点拨】解分式方程的关键是通过去分母把分式方程变成整式方程，解分式方程时，注意一定要验根.

解：(1)先把方程两边都乘以$x(x-3)$，

得：$2x-(x-3)=0$，所以$x=-3$.

经检验$x=-3$是原方程的解.

(2)先把方程两边都乘以$2(x-3)$，

得$2x-1=x-3$，

移项，整理得$x=-2$，

经检验$x=-2$是原方程的解.

整合突破

1. 下列各式中，不是分式方程的是 ( )

A. $\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

B. $\frac{1}{1-x}-3=\frac{1}{x-2}$

C. $\frac{1}{x}(x-1)+x=1$

D. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)=3$

【答案】D

整合突破

2. 解下列分式方程：

(1)$\frac{1}{x-1}=\frac{3}{x}$；

(2)$\frac{3}{x-1}-\frac{x+3}{x^2-1}=0$.

例题 3　已知关于 x 有方程 $\frac{3x}{x-3}+5=\frac{m}{3-x}$ 有增根，求 m 的值.

【点拨】关于 x 的方程 $\frac{3x}{x-3}+5=\frac{m}{3-x}$ 若有增根，则增根是 $x=3$.

解：方程两边同时乘以 $(x-3)$，

得 $3x+5(x-3)=-m$，

把 $x=3$ 代入 $3x+5(x-3)=-m$，得 $m=-9$.

所以当原分式方程有增根时，$m=-9$.

知识点 3 分式方程的应用

列分式方程解应用题与列一元一次方程解应用题的思路和步骤一样.

①审——仔细审题，找出等量关系.

②设——合理设未知数.

③列——根据等量关系列出方程(组).

④解——解出方程(组). 注意检验.

⑤答——答题.

例题 4　2014 年 8 月 3 日 16 时，云南鲁甸发生 6.5 级地震，某市派出抢险救灾工程队赶往芦山支援，工程队承担了 2 400 m道路抢修任务，为了让救灾人员和物资尽快运抵灾区，实际施工速度比原计划每小时多修 40 m，结果提前 2 小时完成，求原计划每小时抢修道路多少米？

【点拨】首先设原计划每小时抢修道路 x m，则实际施工速度为每小时抢修道路$(x+40)$ m，根据题意可得等量关系：原计划修 2 400 m 道路所用时间－实际修 2 400 m 道路所用时间＝2 小时，根据等量关系，列出方程即可.

解：设原计划每小时抢修道路 x m，由题意得

$\frac{2\,400}{x}-\frac{2\,400}{x+40}=2$，

解得 $x_1=200$，$x_2=-240$，

经检验：$x_1=200$，$x_2=-240$ 都是原分式方程的解，

$x=-240$ 不合题意，舍去.

答：原计划每小时抢修道路 200 m.

3. k 为何值时，关于 x 的方程 $\frac{k}{x-3}+2=\frac{4-x}{x-3}$ 有增根？

【答案】2. (1)$x=\frac{3}{2}$　(2)$x=0$

3. $k=1$

整合突破

4. 某校学生捐款支援地震灾区，第一次捐款总额为 6 600元，第二次捐款总额为 7 260元，第二次捐款人数比第一次多 30 人，而且两次人均捐款额恰好相等. 求第一次的捐款人数？

【答案】300 人