同济数学系列丛书
TONGJISHUXUEXILIECONGSHU

配套同济大学《高等数学》第七版
配合同济大学高等数学教学需求

GAODENGSHUXUEXITICE

高等数学习题册（上）

（第2版）

同济大学数学科学学院　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济数学系列丛书

TONGJI SHUXUE XILIE CONGSHU

高等数学习题册(上)

(第 2 版)

同济大学数学科学学院　编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本习题册是根据国家教育部审定的高等工科院校的本科非数学专业的教学要求，并按照同济大学数学系编写的《高等数学》第七版的章节顺序，为配合教学需要，方便学生课后巩固基本概念和掌握基本解题方法为主要目的而编写的配套练习册. 读者可以将此习题册与各自的《高等数学》教材（尤其是同济大学主编的教材）配合使用.

本习题册上册共分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及微分方程. 每节的作业内容覆盖了需要掌握的知识点，难易均衡，题量适中，每节最后配备了思考题，目的是开拓读者思路，提高学习兴趣，供学有余力的读者思考提高. 所有习题的答案均可登录同济大学数学科学学院国家级精品课程高等数学同步课堂网站（math. tongji. edu. cn/gaoshu/）查询.

本习题册适用于各类高等院校及相关专业（非数学专业）的在校学生，建议读者先熟悉相应高等数学教材的对应章节，再通过本习题册予以练习，相信会对数学基础和解题能力的提高有所帮助.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题册. 上册 / 同济大学数学科学学院编. — 2 版. — 上海：同济大学出版社，2019.8

ISBN 978－7－5608 －7533－0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①同… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 152814 号

高等数学习题册(上)(第 2 版)

同济大学数学科学学院 编

责任编辑 张 莉 **助理编辑** 任学敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www. tongjipress. com. cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 常熟市大宏印刷有限公司
开 本 889 mm×1194 mm 1/16
印 张 9
印 数 1—5100
字 数 288 000
版 次 2019 年 8 月第 2 版 2019 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5608－7533—0

定 价 22. 00 元

前　　言

高等数学是一门本、专科类学生重要的基础课程，通过这门课程的学习，不仅使学生掌握微积分这一重要的数学工具，而且使学生的逻辑思维能力得到提高.课后练习是这门课程学习的重要一环，在同济大学高等数学的教学中，为了使学生能够在课后对所学的知识得到巩固与提高，更好地配合课程的教学，多年来，在汲取各位任课教师宝贵的教学经验的基础上，针对教学中的情况，我们不断地对习题册进行调整与完善，使它能够更好地适应高等数学的教学需求，因此，同济大学高等数学习题册更多地体现了任课教师的集体劳动成果.

2015 年，经协商考虑，由同济大学高等数学教研室负责人刘庆生和骨干教师张弢对正在使用的习题册进行重新修订编写并正式出版 .第 1 版不仅对内容做了很大的更改，同时增加了一些新的栏目，例如，增加了单元测验这一新的练习环节等.

本次修订由现任高等数学课程负责人周朝晖及原来的两名编者共同完成。修订过程更正了上一版中的一些错误，同时对部分题目做了更改调整，使本习题册更加适应当前教学的需求.

在每版的编写过程中，同济大学高等数学的许多任课教师都对本习题册的出版提出了宝贵意见并提供了相关资料。在此，作为编者向他们表示由衷的感谢！

编　者

2019 年 7 月

目　　录

函数与极限——映射与函数

1. 若在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调增加，$g(x)$ 单调减少，则有（　　）.

A. 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$，$f(x) > g(x)$　　B. 对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$，$f(x) < g(x)$

C. 当 x 充分大时，$f(x) > g(x)$　　D. 以上结论都不对

2. 设 $f(x)$ 在对称区间 $(-l, l)$ 上有定义，证明：

(1) $\phi(x) = f(x) + f(-x)$ 是偶函数，$\psi(x) = f(x) - f(-x)$ 是奇函数；

(2) 函数 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

3. 设 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

4. 设 $f(x) = e^{x^2}$，$f[\phi(x)] = 1 - x$，且 $\phi(x) \geqslant 0$，求 $\phi(x)$ 的表达式，并写出它的定义域.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^{x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作这两个函数的图形.

6. 求下列函数的反函数及反函数定义域：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$；

(2) $y=\begin{cases}x^{3}, & -\infty<x<1,\\ 2^{x-1}, & 1\leqslant x<\infty.\end{cases}$

7. 圆的内接多边形中，当边数改变时，正多边形的面积随之改变，设圆的半径为 R，试建立圆内接正多边形的面积 A_n 与其边数 n $(n\geqslant 3)$ 的函数关系式.

你能作出函数 $y=\mathrm{sgn}(\cos x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形吗?

专业班级＿＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿＿＿

函数与极限——数列的极限

1. “对任意给定的数 $\varepsilon \in (0, 1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$ ”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于数 a 的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 无关

2. 已知数列 $\{x_n\}$ 的各项分别为 $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}, \cdots$，下列说法正确的是(　　).

A. $\{x_n\}$ 收敛于 1　　B. $\{x_n\}$ 收敛于 0

C. $\{x_n\}$ 发散　　D. $\{x_n\}$ 收敛于 2

3. 下列数列中发散的是(　　).

A. $\left\{\frac{2^n - 1}{3^n}\right\}$　　B. $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

C. $\left\{\frac{1 + (-1)^n}{n}\right\}$　　D. $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$

4. 下列数列 $\{x_n\}$ 中，收敛的是(　　).

A. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$　　B. $x_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n+1}, & n = 2k+1, \\ (-1)^n, & n = 2k \end{cases}$

C. $x_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n = 2k+1, \\ \frac{n}{1-n}, & n = 2k \end{cases}$　　D. $x_n = 1 + 2^n$

5. 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要　　C. 充要　　D. 无关

6. 设 $x_1 = 0.9$，$x_2 = 0.99$，$x_3 = 0.999$，$\cdots$，$x_n = 0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}$，$\cdots$，试问：

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = ?$

(2) n 取何值时，才能使 x_n 与极限值之差的绝对值小于 0.000 1？

7. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$，并举例说明：如果数列 $\{|u_n|\}$ 有极限，数列 $\{u_n\}$ 未必有极限.

* **8.** 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

* **9.** 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1} \to a\ (k\to\infty)$，且 $x_{2k} \to a\ (k\to\infty)$，证明：$x_n \to a\ (n\to\infty)$.

已知：$0 < q < 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = 1$，那么，当 $q > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = ?$

进一步，$\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = ?$ 试用极限定义证明你的结论.

专业班级____________ 姓名____________ 学号____________

函数与极限——函数极限

1. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(常数),则 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　).

A. 一定无定义　　　　B. 一定有定义

C. 有定义,且 $f(x_0)=A$　　　　D. 可以有定义,也可无定义

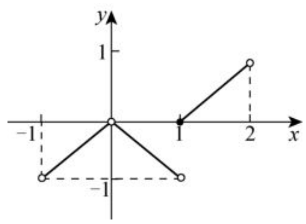
2. 对下面图示的函数 $f(x)$,$x\in(-1,2)$,下列陈述正确的是(　　).

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在;　　(6) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$;

(7) 对每个 $x_0\in(-1,1)$,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.



3. 试问下列函数的图形是否有水平渐近线?若有水平渐近线,写出其方程.

(1) $y=\dfrac{3x+1}{x}$;　　(2) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$;　　(4) $y=\mathrm{e}^x$.

4. 根据函数极限定义证明:函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

5. 求函数 $\phi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它在 $x\to 0$ 时极限是否存在？

6. 求函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 1,\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases}$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

7. 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时极限为 A，证明：$\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=|A|$，并举例说明：如果当 $x\to\infty$ 时 $|f(x)|$ 有极限，$f(x)$ 未必有极限.

*8. (1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，证明：存在正数 X，使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-X)\cup(X,+\infty)$ 上有界；

(2) 当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\sin\sqrt{x}$ 是否有极限？试说明理由.

讨论一下：Dirichlet 函数

$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{Q}^C\end{cases}$ 在任意点的单侧极限是否存在？

函数与极限——无穷小与无穷大

1. 下列命题成立的是(　　).

A. 数列有界必收敛

B. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在,那么 $f(x)$ 有界

C. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 $f(x_0)$ 有意义

D. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,则 $f(x)-A$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小量

2. 下列变量在自变量给定的变化过程中不是无穷小的是(　　).

A. $2^{-x}-1\ (x\to 0)$　　B. $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^-)$

C. $x^2\left(3-\sin\dfrac{1}{x}\right)\ (x\to 0)$　　D. $e^{\frac{1}{x}}\ (x\to 0^+)$

3. 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, 下列极限成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

C. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

4. 根据定义证明:当 $x\to 0$ 时, $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为无穷小.

5. 根据定义证明:当 $x\to 0$ 时, $y=\dfrac{1+2x}{x}$ 为无穷大,并问 x 满足什么条件,能使 $|y|>10^4$?

6. 求下列函数极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-x}$.

7. 求函数 $f(x)=\dfrac{4}{2-x^2}$ 图形的渐近线.

8. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大，是指对任何收敛于点 x_0 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$；$f(x)$ 在 x_0 的任一去心邻域是无界量，是指至少存在一个收敛于点 x_0 的数列 $\{x_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，所以无穷大是无界量，而无界量未必是无穷大.由此分析 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时是一个无界量而非无穷大.

下列关于无穷小量的定义正确吗？为什么？

（1）对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，成立 $x_n<\varepsilon$；

（2）对 $\forall\varepsilon>0$，存在无穷多个 x_n，使 $|x_n|<\varepsilon$.

函数与极限——极限运算法则

1. 下列计算极限的方法是否正确？如果不对，请给出正确的解法.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{1-x^3}=\infty-\infty=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$.

2. 求下列极限的值，并说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$　$(|a|<1,\ |b|<1)$；

(2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

4. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的，如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$，$n\in\mathbf{N}^+$；

(2) $b_n<c_n$，$n\in\mathbf{N}^+$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 不存在；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

5. 设 a，b 为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+2}{2x-1}=3$，求 a，b 的值.

求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

函数与极限——极限存在准则，两个重要极限

1. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$（$\beta\neq 0$）；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于零的常数）；

（3）$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(\sin x)}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cot\sqrt{x}$；

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

2. 计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{kx}$（$a$，$k$ 均为非零整数）；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{2\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}$；