高等职业教育“十三五”规划新形态教材

高等应用数学

主　编　马　兰
副主编　张　航　李艳光
参　编　杨陪凤　李玉贤　杨丽清
　　　　陈　雪　于宏坤
主　审　朱学荣

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学/马兰主编. —北京:北京理工大学出版社,2019.7
ISBN 978-7-5682-7254-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①马…　Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 143381 号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/
开　　本/787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张/13.5　　责任编辑/江　立
字　　数/275 千字　　文案编辑/江　立
版　　次/2019 年 7 月第 1 版　2019 年 7 月第 1 次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价/33.00 元　　责任印制/施胜娟

前　言

高等数学是高职院校各专业学生必修的一门公共基础课程，它与专业理论课联系非常紧密，为后续专业课程的学习奠定基础．为了更好地为专业课服务，我们依据《国家教育发展“十三五”规划纲要》、教学需求与发展趋势、高职学生学习特点和认知规律，并结合各专业人才培养方案和课程体系编写了这本《高等应用数学》教材．

本书在编排模式、教学内容、教学流程、教学方法等方面进行了大胆创新，力求符合目前高职学生的知识需求和接受能力，力求用通俗易懂的语言，深入浅出地阐述高等数学的基本原理，突出数学应用技能的训练和培养．通过本书的学习使学生了解微积分的基本思想，较系统地掌握高等数学的基础知识、必需的基本理论和常用的运算技能，了解数学史相关知识及基本的数学建模方法等，使学生逐步具有较强的运算能力、逻辑推理能力、应用数学知识解决实际问题的能力等．

本教材内容具有如下特点：

(1)突出强调数学概念与实际问题的联系，优选了微积分在几何、物理、经济等多方面的应用实例，适用专业面宽；

(2)淡化逻辑证明，充分利用实例及几何说明，帮助学生理解有关概念和理论；

(3)充分考虑高职学生的数学基础，新增高等数学预备知识的内容供教师选用，较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接；

(4)设置“分层渐进”的教学流程和学习路径，精选例题、习题，降低学生学习难度．每节均配有A、B两组习题，便于不同层次的学生巩固基础知识，提高基本技能，并在每章后配有自测题，加强对教材内容的理解，有利于培养学生应用数学知识解决实际问题的能力；

(5)各章末附有数学家、数学发展史及相关数学知识方面的阅读材料，其中包含了许多数学家在数学发展过程中所做出的艰苦努力和巨大贡献，有利于学生更深入地理解、学习数学知识，增强他们学习数学的动力．

本书主要内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、高等数学预备知识等．本书适用于高等职业院校三年制理工科专业及管理专业78～96学时的教学．

本书由内蒙古建筑职业技术学院组织编写，主编马兰，主审朱学荣．具体的编写分工为：第一章由李玉贤编写，第二章由马兰编写，第三章由杨培凤编写，第四章由张航编写，第五章由李艳光编写，预备知识由朱学荣、马兰、杨丽清编写，阅读材料由陈雪编写，附录由于宏坤编写．全书内容结构由马兰设计制定、统稿、定稿．

由于时间仓促，加之编者能力水平有限，书中难免存在不足和错误，诚恳地希望专家、同行及读者给我们提出宝贵意见和建议，我们将不胜感激．

编　者
2019年8月

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

第一节　函数概述 …… 1

习题 1－1 …… 6

第二节　函数的类型 …… 7

习题 1－2 …… 11

第三节　极限的概念 …… 12

习题 1－3 …… 16

第四节　极限的运算 …… 17

习题 1－4 …… 20

第五节　无穷小量与无穷大量 …… 21

习题 1－5 …… 24

第六节　函数的连续性 …… 25

习题 1－6 …… 28

第七节　函数建模与极限应用实例 …… 29

习题 1－7 …… 30

自测题一 …… 31

阅读材料一 …… 33

第二章　导数与微分 …… 36

第一节　导数的概念 …… 37

习题 2－1 …… 40

第二节　导数的基本公式与运算法则 …… 40

习题 2－2 …… 43

第三节　复合函数的导数 …… 44

习题 2－3 …… 46

第四节　隐函数的导数和由参数方程所确定的函数的导数 …… 48

习题 2－4 …… 50

第五节　微分及其应用 …… 51

习题 2－5 …… 54

自测题二 …… 55

阅读材料二 …… 57
第三章　导数的应用 …… 61
第一节　微分中值定理 …… 61
习题 3－1 …… 63
第二节　洛必达法则 …… 64
习题 3－2 …… 67
第三节　函数的单调性与极值 …… 67
习题 3－3 …… 71
第四节　函数的最大值和最小值 …… 72
习题 3－4 …… 73
第五节　函数图形的描绘 …… 75
习题 3－5 …… 79
第六节　导数概念在经济分析中的应用 …… 80
习题 3－6 …… 84
第七节　曲率 …… 85
习题 3－7 …… 89
自测题三 …… 89
阅读材料三 …… 91
第四章　不定积分 …… 95
第一节　不定积分的概念与性质 …… 95
习题 4－1 …… 97
第二节　积分公式和直接积分法 …… 99
习题 4－2 …… 102
第三节　换元积分法 …… 103
习题 4－3 …… 109
第四节　分部积分法 …… 111
习题 4－4 …… 114
第五节　微分方程简介 …… 115
习题 4－5 …… 120
自测题四 …… 121
阅读材料四 …… 123
第五章　定积分及其应用 …… 127
第一节　定积分的概念与性质 …… 127
习题 5－1 …… 133
第二节　微积分基本公式 …… 134

习题 5 - 2 …… 137

第三节　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 138

习题 5 - 3 …… 140

第四节　定积分的实际应用 …… 142

习题 5 - 4 …… 151

自测题五 …… 153

阅读材料五 …… 155

高等数学预备知识 …… 157

习题 …… 168

附录一　微积分常用公式 …… 170

附录二　初等数学常用公式 …… 172

参考答案 …… 174

参考文献 …… 197

第一章　函数与极限

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象,是高等数学中重要的基本概念之一.极限是高等数学研究问题的一个基本工具,且是贯穿高等数学始终的一个重要概念.本章将介绍函数与极限的基本概念,以及它们的一些主要性质.

教学导航

教学目标	(1)熟知基本初等函数的形式及性质 (2)能将复合函数正确分解 (3)认识分段函数的形式 (4)熟知极限的概念 (5)能利用极限的运算法则进行计算 (6)会利用两个重要极限进行计算 (7)熟知无穷小量与无穷大量的概念及性质 (8)会进行无穷小量的关系判定 (7)熟知函数连续性的概念 (8)熟知函数连续性的判断方法 (9)熟知闭区间上连续函数的性质 (10)能进行简单的函数建模
教学重点	(1)复合函数的构成及分解 (2)极限的运算法则及重要极限 (3)函数的连续性
教学难点	(1)复合函数的分解 (2)重要极限 (3)分段函数的极限问题 (4)函数连续性的判断 (5)函数建模

第一节　函 数 概 述

一、函数的概念

1. 函数的定义

例 1　某物体以 15 m/s 的速度做匀速直线运动,则该物体走过的路程 S 和时间 t 有

如下关系：

$$S=15t(0\leqslant t<+\infty).$$

对变量 t 和 S，当 t 在 $[0,+\infty)$ 内取一定值 t_0 时，S 就有唯一确定的值 $S_0=15t_0$ 与之对应. 变量 t 和 S 之间的这种对应关系，即函数概念的实质.

定义1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于 D 中的任意数 x，按照一定的法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，自变量 x 的变化范围——数集 D 称为这个函数的定义域，因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数关系.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当自变量 x 遍取 D 中的每一个数值时，对应的函数值的全体构成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

2. 函数的两个要素

函数的两个要素是函数的定义域 D 和对应法则 f，只要这两个要素确定了，那么一个函数就确定了. 如果两个函数的定义域和对应法则都分别相同，那么这两个函数就是相同的函数，否则就是不同的函数.

函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 也可以用 φ,h,g,F 等表示，相应的函数就记作 $\varphi(x)$，$h(x)$，$g(x)$，$F(x)$.

关于函数的定义域，通常按以下两种方式确定：一种是有实际背景的函数，应根据实际背景中变量的实际意义来确定；另一种是抽象地用代数式表达的函数，这种函数的定义域是使得代数式有意义的一切自变量的取值组成的集合，确定时一般应遵循以下基本原则：

(1) 当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(2) 分式函数的分母不能为零；

(3) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零；

(4) 对数函数的真数要大于零；

(5) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$；

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例2 判断下列函数是否是相同的函数：

(1) $y=1$ 与 $y=\dfrac{x}{x}$；

(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\ln 3x$ 与 $y=\ln 3\cdot\ln x$.

解 (1) 函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故不是同一函数；

(2)两个函数的定义域与对应法则都相同,故是同一函数;

(3)函数 $y=\ln 3x$ 与 $y=\ln 3\cdot\ln x$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$,但对应法则不同,故不是同一函数.

例 3　求下列函数的定义域:

(1) $y=5x^2-3x+2$;　　(2) $y=\dfrac{2}{x^2-1}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(2-x)}$;　　(4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解　(1)函数 $y=5x^2-3x+2$ 为多项式函数,当 x 取任意实数时,y 都有唯一确定的值与之对应,故所求函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;

(2)若使 $\dfrac{2}{x^2-1}$ 有意义,需 $x^2-1\neq0$,即 $x\neq\pm1$,所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(3)若使 $\dfrac{1}{\ln(2-x)}$ 有意义,需 $2-x>0$ 且 $\ln(2-x)\neq0$,即 $x<2$ 且 $x\neq1$,所以函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)$;

(4)若使 $\sqrt{x^2-4}$ 有意义,需 $x^2-4\geqslant0$,即 $x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2$;若使 $\arcsin\dfrac{x}{2}$ 有意义,需 $-1\leqslant\dfrac{x}{2}\leqslant1$,即 $-2\leqslant x\leqslant2$,所以函数的定义域为 $\{x\mid x=\pm2\}$.

3. *函数的表示方法*

常用的函数表示法有 3 种:解析法、表格法、图像法.

解析法　用数学式子表示因变量和自变量之间函数关系的方法称为解析法.解析法是对函数的精确描述,便于对函数进行理论分析和研究,微积分研究的函数就是用解析法表示的.例如,$y=\sqrt{3x^2-5x}$,$y=\sin(x+2)$ 等就是用解析法表示的函数.

表格法　把两个变量之间的对应值列成表格来表示函数关系,叫作表格法.有些实际问题中的函数难以用解析法来表示,或者为了更加直观、方便,函数关系也常用表格法表示.例如,某汽车站为了预测客流量,统计了 1—6 月的客流量,如表 1-1 所示.

表 1-1　1—6 月客流量统计

月份 x	1	2	3	4	5	6
客流量 y/人次	2 625	2 940	1 948	2 450	2 800	1 725

表 1-1 中,月份 x 和客流量 y 之间的函数关系就是用表格法表示的.x 每取定表中列出的一个值,就有唯一确定的 y 值与之对应.

银行存款利率表、三角函数表、平方根表等采用的表示方法都是表格法,这种方法简单明了,便于应用,但一般不能完整地表示函数,也不便于进行理论分析.

图像法 用直角坐标系中的几何图形表示两个变量之间的函数关系，叫作图像法. 股市的综合指数、病人的心电图等往往采用图像法，其优点是直观形象，函数图形容易由实验数据得到，从图形中可以看出函数的变化状况；缺点是由图形往往得不到准确的函数值，也不便于进行精确的理论分析.

二、函数的基本性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调增区间；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少，区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调减区间.

从几何图形上看，当自变量从左向右变化时，单调增函数的图形是上升的(见图 1-1)，单调减函数的图形是下降的(见图 1-2).

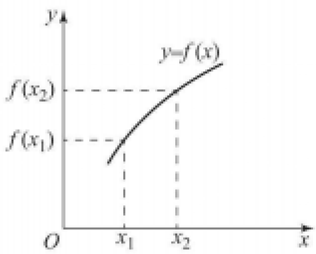


图 1-1

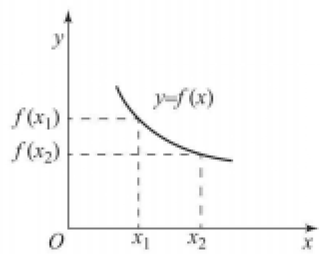


图 1-2

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，如果对于任意的 $x\in D$，均有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意的 $x\in D$，均有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的图形关于原点对称(见图 1-3)，偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1-4).

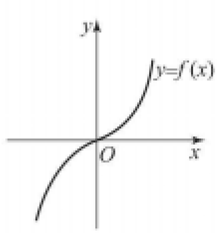


图 1-3

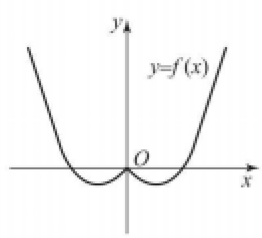


图 1-4

例 4 判断函数 $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\frac{-2x}{(-x-1)(-x+1)}=\frac{2x}{(x+1)(1-x)}=-f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

3. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的实数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内的任何 x 值都成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 通常，周期函数的周期指的是最小正周期. 三角函数均为周期函数.

周期函数的图形在定义域内的每个长度为 T 的区间上具有相同的形状.

4. 有界性

设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在一个正数 M，使得对于一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在其定义域内有界；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在其定义域内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上，无论自变量 x 取何值，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以正弦函数在其定义域内有界. 像这样在定义域内有界的函数称为有界函数. 而有些函数不是有界函数，但在定义域内的某个区间上可能是有界的. 例如函数 $y=x^3$ 在定义域内是无界的，但在区间 $[-1,1]$ 上是有界的.

当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时，它在区间 I 上的图形一定位于两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

三、反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于 W 中的每一个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x，使得 $f(x)=y$，则得到一个以 y 为自变量，以 x 为因变量的新的函数，这个新的函数叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D.

由于人们习惯于用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此我们往往将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 互换位置，即用 $y=f^{-1}(x)$ 来表示函数 $y=f(x)$ 的反函数. 在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 的图像与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

由定义可知，并不是所有的函数都有反函数，单调的函数才有反函数.

求反函数的步骤：

(1) 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 交换字母 x 和 y 的位置.

例 5　求 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，即 $y=\dfrac{x+1}{4}$ 是 $y=4x-1$ 的反函数. 如图 1－5所示，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

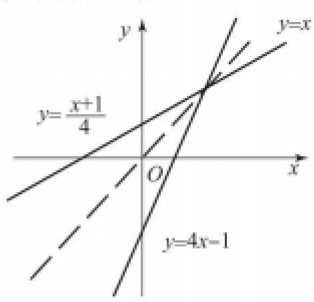


图 1－5

习题 1 - 1

A 组

1. 判断下列各组函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$;

(3) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$;

(4) $y=\sqrt{x}$ 与 $u=\sqrt{v}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;

(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$;

(4) $y=\ln(3-x)$;

(5) $y=\arcsin(2x-1)$;

(6) $y=\dfrac{2x}{x^2-5x+6}$.

3. 已知 $f(x)=x^2+2x-1$,求 $f(0)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;

(2) $f(x)=x^3-2x$;

(3) $f(x)=x\cos x$;

(4) $f(x)=x^2+x^3+1$;

(5) $f(x)=e^x+e^{-x}$;

(6) $f(x)=\lg(x^2+1)$.

5. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x+1$;

(2) $y=\sqrt[3]{x-1}$;

(3) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$;

(4) $y=x^3+2$.

B 组

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{10-2x}}{3-x}$;

(2) $y=\dfrac{2}{\lg(3-x)}$;

(3) $y=\arccos\dfrac{x-3}{2}$;

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$;

(5) $y=\lg\sin x$;

(6) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$.

2. 设 $f(x)=2x^2+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x}+5x$,证明 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=x(x-1)(x+1)$;　　(2) $y=x\sin x+\cos x$;

(3) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$;　　(4) $y=\frac{\sin x}{1-x^2}$.

4. 判别下列函数的有界性:

(1) $y=\frac{1}{x}$;　　(2) $y=3\sin x+2$.

第二节　函数的类型

一、基本初等函数

经常遇到的函数中最简单、最常用的有五类,即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数,这些函数统称为基本初等函数.

(1) 幂函数 $y=x^\alpha\quad(\alpha\in\mathbf{R})$;

(2) 指数函数 $y=a^x\quad(a>0,a\neq1)$;

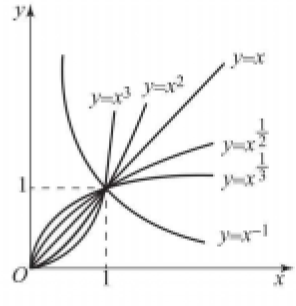
(3) 对数函数 $y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$;

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

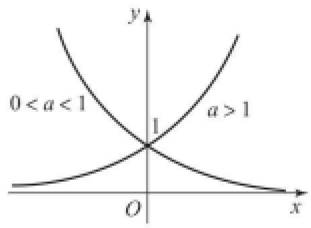
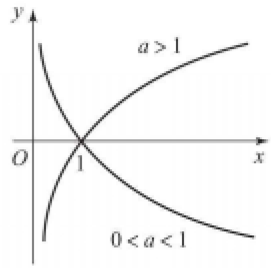
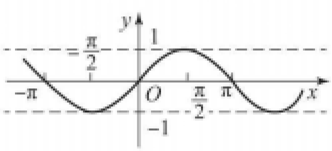
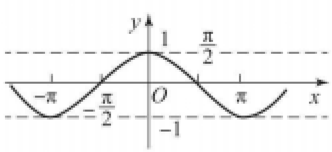
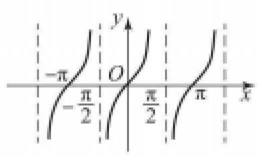
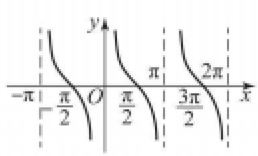
(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

以上五类函数的定义域、值域、图像和性质如表 1-2 所示. 由若干基本初等函数构成的初等函数是本门课程研究的主要对象,掌握它们对以后的学习会很有帮助.

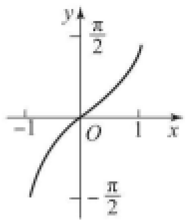
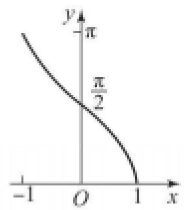
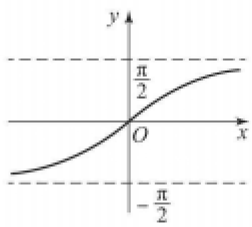
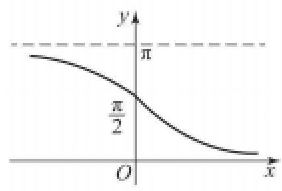
表 1-2　基本初等函数的定义域、值域、图像和性质

函数	定义域与值域	图像	主要特性
幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$	依 α 不同而异,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		经过点(1,1) 在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,$y=x^\alpha$ 为增函数;当 $\alpha<0$ 时,$y=x^\alpha$ 为减函数

续表

函数		定义域与值域	图像	主要特性
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像在 x 轴上方，经过点(0,1) 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，经过点(1,0) 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数
三角函数	正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界
	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(0,\pi)$ 内单调减少

续表

函数		定义域与值域	图像	主要特性
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少,有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

二、复合函数

在实际问题中遇到的函数多数不是基本初等函数,而是由若干基本初等函数组合而成的. 例如,$y=\sin x^2$ 是由正弦函数 $y=\sin u$ 和幂函数 $u=x^2$ 组合而成的,我们称函数 $y=\sin x^2$ 为复合函数.

定义 3　设 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,且函数 $\varphi(x)$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域的交集非空,则把函数 $y=f[\varphi(x)]$ 叫作 x 的复合函数,其中 u 叫作中间变量.

例 1　试求由函数 $y=\sqrt{u}$,$u=\tan x$ 复合而成的函数.

解　将 $u=\tan x$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中,即得所求复合函数为 $y=\sqrt{\tan x}$.

有时,一个复合函数可能是由三个或更多的函数复合而成的. 例如,由函数 $y=2^u$,$u=\sin v$,$v=x+1$ 可以复合成函数 $y=2^{\sin(x+1)}$,其中 u 和 v 都是中间变量. 一个复合函数

可以有有限多个中间变量.

例 2　指出下列复合函数的复合过程:

(1) $y=(5x-3)^4$;　　(2) $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$;　　(3) $y=e^{\cos(x+1)}$.

解　(1) $y=u^4, u=5x-3$;

(2) $y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=\dfrac{x}{2}$;

(3) $y=e^u, u=\cos v, v=x+1$.

三、初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的,并且可用一个数学式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=\sqrt{\ln 5x-3^x}$, $y=\dfrac{\sqrt[3]{3x}+\tan 5x}{x^3\sin x-2^{-x}}$都是初等函数. 今后我们所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

四、分段函数

有时,我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示的情况.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 当$x\geqslant 0$时,$f(x)=\sqrt{x}$;当$x<0$时,$f(x)=-x$. 它的图像如图1-6所示.

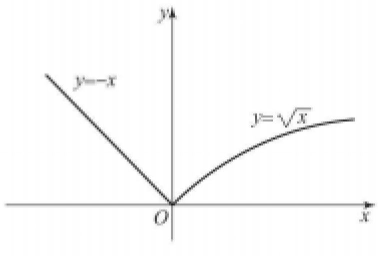


图 1-6

像这样在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同式子来表示的函数叫作分段函数.

例 3　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(1) 画出函数的图像;

(2) 求此函数的定义域;

(3) 求$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$的值.

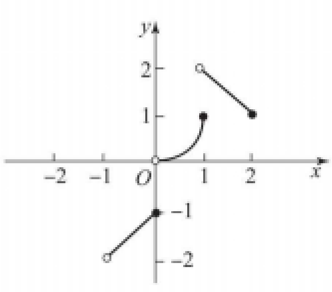


图 1-7

解　(1) 该分段函数的图像如图1-7所示;

(2)函数的定义域为$(-1,2]$;

(3)$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$,$f(1)=1$,$f(2)=1$.

例 4　某城市出租车收费标准规定,3 km 内收费为起步价 10 元,超过 3 km 时,每增加 1 km 多收费 2 元,

(1)试建立出租车收费与里程的函数关系;

(2)若某人某天乘坐出租车行驶 8 km,问他付了多少车费?

解　(1)设乘客的行程为 x km,车费为 y 元,则由规定知:

$$y=f(x)=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 3,\\ 10+(x-3)\times 2, & x>3;\end{cases}$$

(2)$y=f(8)=10+(8-3)\times 2=20$,即此人付了 20 元车费.

习题 1－2

A　组

1. 求由所给函数复合而成的函数:

(1)$y=\tan u$,$u=2x$;

(2)$y=\ln u$,$u=2x^2+1$;

(3)$y=u^2$,$u=\sin x$;

(4)$y=\sqrt{u}$,$u=v^2$,$v=x+1$;

(5)$y=e^u$,$u=\sin v$,$v=x^2+1$;

(6)$y=\lg u$,$u=3^v$,$v=\sin x$.

2. 写出下列函数的复合过程:

(1)$y=(3x+2)^{10}$;　　(2)$y=\sqrt{1-x^2}$;

(3)$y=\sin 5x$;　　(4)$y=\arcsin\frac{x}{2}$;

(5)$y=\cos\sqrt{x}$;　　(6)$y=e^{x^2}$;

(7)$y=3^{\sin x}$;　　(8)$y=\sin^2(x+1)$.

3. 指出下列函数的定义域并求函数值:

(1)$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$求$f(0)$,$f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(2)$.

(2)$y=f(x)=\begin{cases}2, & 1\leqslant x<2,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$求$f\left(-\frac{1}{3}\right)$,$f(0)$,$f\left(\frac{3}{4}\right)$,$f(1)$.