中德机械与能源工程
人才培养创新教材

数值分析
典型应用案例及理论分析

陆 亮 / 编著

（上册）

上海科学技术出版社
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

中德机械与能源工程人才培养创新教材

数值分析

典型应用案例及理论分析

（上册）

陆　亮　编著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值分析典型应用案例及理论分析. 上册 / 陆亮编著. —上海：上海科学技术出版社，2019.9

中德机械与能源工程人才培养创新教材

ISBN 978-7-5478-4544-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①陆… Ⅲ. ①数值分析—教学研究—高等学校 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 160589 号

数值分析典型应用案例及理论分析(上册)

陆　亮　编著

上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社 出版、发行

(上海钦州南路 71 号　邮政编码 200235　www.sstp.cn)

上海盛通时代印刷有限公司印刷

开本　787×1092　1/16　印张 12.75

字数 280 千字

2019 年 9 月第 1 版　2019 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5478-4544-8/O·76

定价：55.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题，请向工厂联系调换

Synopsis

内容提要

《数值分析典型应用案例及理论分析》分为上、下两册，本书为上册。本书在参考同类《数值分析》教材基础上，就基本理论进行了重组和适当简化，将章节划分为数值分析与科学计算、插值与拟合、线性方程组与非线性方程(组)求解、数值积分与数值微分四个部分。全书在理论编写基础上，介绍了部分数值分析方法的 MATLAB 程序设计，同时引用典型案例，就如何基于基本理论建立数值模型，并利用 MATLAB 程序设计进行数值计算进行了讨论。

本书可供高等院校机械、能源类本科生，在学习数值分析课程的同时了解、学习本专业的相关知识，也可供社会读者和工程技术人员阅读参考。

Editorial Board

丛书编委会

Preface 丛书序

在教育部和同济大学的支持下，同济大学人才培养模式创新实验区已经走过10个春秋。中德机械与能源工程人才培养模式创新实验区（简称莱茵书院）作为其中一员，自2014年开办以来，以对接研究生培养为主要目标，依托同济大学对德合作平台，探索并实践了双外语、宽口径、厚基础和学科交叉融合的人才培养模式，在学校和家长中得到了积极的响应。

本丛书是莱茵书院办学至今的部分成果汇报，主要包括两个部分：

一部分是根据机械、能源学科对于人才的要求，借鉴德国数学类课程体系，形成数学基本理论在学科内应用的案例教学，为研究生阶段学习奠定扎实基础。教材《常微分方程典型应用案例及理论分析》《数学建模典型应用案例及理论分析》《数理方程典型应用案例及理论分析》《数值分析典型应用案例及理论分析（上、下册）》中，编委们以高等院校工科学生的培养目标为准绳，以实际工程案例为切入点，进行数理知识点的分析与重构，提高工科学生的专业学习能力与分析问题、解决问题的能力。

另一部分是中德双语特色教学课程——机械原理的成果，该案例借鉴了德国亚琛工业大学、德累斯顿工业大学等优秀综合性大学的“机构学”教学经验和案例，结合了国内机械类专业本科生教学目标和知识点指标。《典型机构技术指南——认识—分析—设计—应用》是学生机构分析的案例汇编，该指南以加深学生理论基础、提升学生知识运用能力为目标，倾注了任课教师和莱茵书院学生的大量心血。

本丛书虽然是莱茵书院教学成果，亦可用作在校机械或能源类本科生和研究生辅导教材，或供相关专业在职人员参考。

在丛书出版之际，我代表莱茵书院工作组，对同济大学及其本科生院领导的支持表示诚挚感谢。在莱茵书院创办过程中，同济大学公共英语系教学团队为莱茵书院打造了特色课程体系，中德学院和留德预备部教学团队为莱茵书院的教学和学生培养提供了有

力的支撑,在此也表示衷心感谢。感谢同济大学机械与能源工程学院的支持。特别感谢莱茵书院工作组成员,大家克服困难,创建了莱茵书院,其中的彷徨、汗水和泪水最终与喜悦的成果汇合,回报了大家的初心。感谢丛书的编写者,是你们的支持保证了莱茵书院的正常教学,也推进了莱茵书院的教学实践。

尽管本丛书编写力求科学和实用,但是由于时间仓促,难免有不尽如人意之处,还望读者批评指正。

李峥嵘　教授

同济大学

2019 年 1 月于上海

Foreword

前　言

基于项目的学习方式始于16世纪的意大利大学，该学习方式要求学生有目的性地完成项目工作，并获得口头总结或成果产出，从而刺激了学生对基础知识学习的积极性。此种教育模式在一些国家获得推行，如澳大利亚大学的“无边界工程师培养计划”、美国普渡大学的“全球工程计划”以及斯坦福大学的“斯坦福技术冒险计划”。

此种培养模式无疑给数学教育者及研究者提供了开阔的思路。美国匹兹堡大学J. Gabriel等人指出，应用数学作为一门实践应用率较高的课程，可借鉴此种模式，将课堂变为平台，激发学生学习的目的性和主动性，使枯燥的数学学习变得有趣。L. Stefanutti等人评价J. C. Falmagne和J. P. Doignon在应用数学教材研究中的贡献时指出，应用数学应不局限于数学和计算机专业，而是各学科专业综合应用的课程。M. Boekaerts等人则进一步指出，伴随教学模式的改变，教学工作者的理念与能力也要相应发展，从传统的灌输知识模式向促进学生自我规划、自我促进能力模式转变，同时教学者须掌握更多的工程经验。

相似的案例教学或相关著作也在国内有所发展。如《机械工程设计分析和MATLAB应用》以机械工程专业机械设计案例为核心，讨论了如何使用MATALB程序进行机械设计；《现代数值计算》着重阐述了数值分析的理论、内容与编程方法。前者侧重工程问题的编程解决，后者侧重数值理论的程序训练。然而系统性地将“理论—程序—案例”归纳总结，目前相关教材并不多见。本书作为同济大学“一拔尖，三卓越”特色项目——以“莱茵书院”为载体的厚基础跨学科宽口径培养模式深化研究项目的课程建设内容，旨在将数值分析基本理论与工程应用相结合，建立一套适用于机械、能源等工科类专业学习、讨论的教材。教材分为上、下两册，上册以基本理论为主，并配合MATLAB程序设计与典型案例，讨论学习如何基于基本理论建立数值模型、如何基于MATLAB程序设计就工程案例进行计算分析；下册在学生已熟练掌握基本理论与程序设计基础

上,以机械专业为核心,向自动化控制、电力电子、材料化工、交通运输等专业融合,展现各自独立而又丰富完整的工程案例,继而通过课堂教学与交流,使学生充分了解数值分析这一门“应用”数学课程在解决工程问题时的强大力量。

感谢同济大学曹叔维教授对本书撰写进行的理论指导,感谢同济大学机械与能源工程学院研究生祝富强、徐航、李聪、李磊分别对本书四章内容的整理协助。

本书作者非数学系专业出身,水平有限,教材谬误之处在所难免,敬请读者指正!

作　者

C ontents

目　录

第 1 章

数值分析与科学计算

随着计算机技术的发展，数值分析作为一种应用数学工具，得以显现出其巨大的工程价值。如当采用有限差分法、有限元法或有限体积法研究物理场空间分布时，需要使用数值分析的方程数值迭代获得空间节点上尽可能精确的数值，并利用插值或拟合方法获得离散点之间的数值。数值计算是向精确值的无限逼近，其核心的问题在于误差的判断以及算法稳定性、快速性和收敛性的讨论。本章在介绍数值分析与科学计算内涵基础上，介绍了 MATLAB 计算机工具使用方法，并通过两个典型案例的讨论进一步巩固基本概念和计算机使用方法。

1.1　数值计算内涵

数学是科学之母。科学技术离不开数学，其通过数学模型的建立和数学方法的应用求解获得具有普遍意义的结论。人类生活的进步伴随生产实践的发展，始终围绕科学技术或工程应用的研究解决，工程应用问题研究首先在于物理、化学、生物等自然科学认知模型的建立，进而将其抽象成数学的描述，即数学建模。对于简单模型，如匀速直线运动位移与时间的关系，通常可以直接演算获得精确解析解，但工程应用通常涉及的数据拟合和复杂方程，需要从另一个角度获得求解。

数据拟合问题如伺服阀开度的零位漂移、液压圆管流动沿程阻力系数等，在无法有效获得自然科学认知的情况下，通常需要利用插值或拟合方法进行逼近，获得容易求解的替代数学模型。复杂方程问题如机械伺服控制、浮体阻尼运动、挖机轨迹设计等，尽管能够基于自然科学认知建立数学模型，但其多为复杂方程组、非线性方程、常微分方程或复杂积分微分等情况，纯粹的推演计算要么无法获得求解，要么难度过大，须采取近似迭代或离散估计的方法，即数值解析方法。

由此，数值分析不是纯数学本身理论的研究，而是以数学问题为研究对象进行理论与计算的结合，是一门应用数学。因数值解的获得在计算中采取了近似和估计，故数值解通常不存在理论上的精确解，但可以无限接近精确解或真实值，数值解和真实值之间的差别称为数值求解的误差。实际上，在工程应用中通常不需要获得非常严格的真实值，而是要求结果满足一定的误差范围即可，故数值分析始终离不开误差的概念。

误差通常分为两类，一类是数据或模型自身的误差，不属于数值分析方法自身的内容，但在选取合适的数值分析方法时要考虑方法的稳定性，避免将原始误差放大，这就是数值方法稳定性问题。另一类是截断误差和舍入误差，是由数值计算方法本身引起的，在计算过程中要求误差应逐步减小，这就是数值分析方法收敛性问题。由此，如果使用更好的方法能够以更少的计算步骤获得相同的误差要求，这就是计算方法的快速性问题。

综上所述，数值计算并非人工推演，而是利用初始的近似或估计，利用不断迭代或离散化过程获得真实值的近似，不断的循环过程离不开计算机及软件工具的辅助。在现代计算机出现之前，算盘、算图、算表和手摇与电动计算机是辅助完成数值计算的工具，但

效率十分低下。1955—1975年计算机运算速度的极大提高大大提升了数值分析计算的效率,如使得一定规模椭圆形偏微分方程计算效率相比之前提高100万倍,如今并行计算机的诞生及工具软件的发展更是极大地提高了计算速度。

数值分析计算工具传统算法语言是Fortran语言,C语言比其更灵活且更具表现力,目前在纯语言教学中普遍应用。MATLAB是目前常用的数值分析计算工具,由C语言和汇编语言编写,其整合了非线性方程组、常微分方程、数值积分与数值微分、曲线逼近与拟合,以及绘图工具等功能。

1.2 数值计算误差

1.2.1 误差来源与分类

数值计算过程中,估计计算结果的精度是十分重要的工作,影响精度的因素来自各种误差,可总结为以下四种类型。

1)模型误差

其定义是:因忽略部分次要因素而建立的数学模型与实际问题之间的误差,称为模型误差。

使用数值分析方法解决工程问题时,首先将于工程问题溯源为自然科学的机理模型,进而数学描述获得建模。工程问题通常十分复杂,如果将所有的影响因素通盘考虑,则模型本身过于复杂,工程上常用的方法在于忽略次要因素而抓住主要矛盾,并在获得求解后,再基于实验对忽略的因素进行适当的修正,此种工程处理方法本身也是突出主要矛盾的科学处理方法。

如流体动力工程问题中,水力发电装备的设计通常主要考虑水位落差,影响流动的重力成为主要影响因素,而忽略伴随水流动的黏性阻力;同样,液压传动机械以管路流动为主要特征,黏性阻力成为主要影响因素,而忽略管路各位置液体位置不同导致的重力差。

2)观测误差

其定义是:数学模型中经常包含观测或实验获得的物理数据,因测量工具或手段的限制,导致实测数据与真实值之间的误差。

如物理仪表、工具仪表、传感器数显读数时通常在其最小刻度范围内存在精确值50%的误差,尽管可通过改进仪表或传感器物理精度减小误差,但误差始终存在。此种误差对于后期的数学建模与数值分析计算存在影响,如流体机械通常存在局部阻力,局部阻力模型依赖严格的数学公式,但局部阻力系数通常是人为实验获得的经验系数,其误差进入数学模型,如数值计算方法稳定性不足,则导致误差放大。

上述两种误差通常都是难以避免、客观存在的，尽管不属于数值计算方法本身导致的误差，但对数值计算方法存在影响。

3）截断误差

其定义是：基于工程问题建立的数学模型通常十分复杂，对其处理十分困难，通常需要利用数学方法进行简化，利用简化后的数值解替代精确解，此种误差称为截断误差。

如图 1.1 所示，在平衡流体中建立流体微元受压力方程(1.1)，其中 p_A 为 A 点压强，并近似为毗邻 DC、BD、BC 面上压强，p_B、p_C、p_D 分别是 BE、CE、DE 面上压强。令 $p_A=p$，因压强在平衡流体中为坐标连续函数，$p=p(x,y,z)$，按照多元连续函数泰勒公式展开，获方程(1.2)。为方便处理，通常在数学方法上略去二阶及以上高阶小量，如方程(1.3)，获得数学处理的简化。即使用有限过程逼近无限过程，用能计算的问题代替不能计算的问题。这种数学模型的精确解与由数值方法求出的近似解之间的误差称为截断误差，由于截断误差是数值方法固有的，故又称为方法误差。

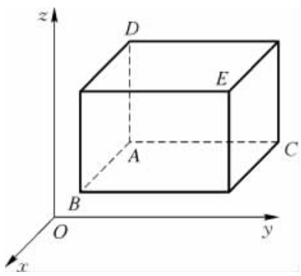

图 **1.1**　流体微元六面体

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-p\,\mathrm{d}A\boldsymbol{n}=(p_A-p_B)\frac{1}{2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\boldsymbol{i}+(p_A-p_C)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\boldsymbol{j}+(p_A-p_D)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
p_B&=p+\frac{1}{1!}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2!}\frac{\partial p^2}{\partial^2 x}\mathrm{d}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial p^n}{\partial^n x}\mathrm{d}x^n\\
p_C&=p+\frac{1}{1!}\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{1}{2!}\frac{\partial p^2}{\partial^2 y}\mathrm{d}y^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial p^n}{\partial^n y}\mathrm{d}y^n\\
p_D&=p+\frac{1}{1!}\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{1}{2!}\frac{\partial p^2}{\partial^2 z}\mathrm{d}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial p^n}{\partial^n z}\mathrm{d}z^n
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
p_B&=p+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\\
p_C&=p+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\\
p_D&=p+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

4）舍入误差

其定义是：计算机位数有限，计算时超过部分则四舍五入，如分别以 2.718 28 或 3.141 59 代替无理数 e 和 π，产生的误差称为舍入误差。

综上所述，截断误差/舍入误差是由数值计算方法引起的；模型误差和观测误差尽管不属于数值计算方法本身导致的误差，但对数值计算方法存在影响；即使初始误差很小，

但千百万次计算后有可能十分惊人;后两种误差是数值计算方法的主要研究对象,主要考虑初始误差在传播过程中的稳定性,方法的收敛性和快速性。由此,讨论误差在计算过程中的传播及其对计算结果的影响,并找出误差的界限具有重要的意义。

1.2.2　误差与有效数字

1）绝对误差与绝对误差限

设精确值为 x 的近似值为 x^*,则称 $E(x^*)=x-x^*$ 为近似值 x^* 的绝对误差,简称误差。当 $E(x^*)>0$ 时,称 x^* 为弱近似值或亏近似值,当 $E(x^*)<0$ 时,称 x^* 为强近似值或盈近似值。

通常精确值 x 是未知量,故 $E(x^*)$ 无法求出,但 $E(x^*)$ 的范围可以估计,即存在 $E(x)$ 误差界限。表示为存在 $\eta>0$,使得 $|E(x^*)|=|x-x^*|\leqslant\eta$,称 η 为近似值 x^* 的绝对误差限,简称误差限或精度。绝对误差限 η 越小,精度越高;绝对误差 $E(x)$ 和绝对误差限 η 有量纲,可用 $x^*-\eta\leqslant x\leqslant x^*+\eta$ 来表示近似值 x^* 的精度或精确值 x 所在的范围。

如使用毫米刻度尺测量真实长度为 x 的物体,测得其近似值为 $x^*=84$ mm,因直尺以毫米为刻度,故读数误差不超过 0.5 mm,即 $|x-84|\leqslant 0.5$ mm。尽管不能得出 x 的精确值长度,但由此不等式可获得精确值 x 的范围:83.5 mm $\leqslant x\leqslant$ 84.5 mm,即说明 x 必在[83.5 mm, 84.5 mm]内,相应的误差限 $\eta=0.5$ mm。

2）相对误差与相对误差限

用绝对误差来刻画一个近似值的精确程度是有局限性的,在很多场合无法显示出近似值的准确程度。

如两个精确长度分别是 100 m 和 10 m 的物体,若测量绝对误差都是 1 cm,显然前者相对要更为精确。即决定近似程度,既要看绝对误差,也要考虑被测量本身的大小,由此引申出相对误差的概念,为绝对误差与精确值之比,有 $E_r(x^*)=\dfrac{E(x^*)}{x}=\dfrac{x-x^*}{x}$,其中 $E_r(x^*)$ 称为近似值 x^* 的相对误差,但实际上精确值 x 总是不知道的,故 $E_r(x^*)=\dfrac{x-x^*}{x}\approx\dfrac{x-x^*}{x^*}$。

类似于绝对误差限,相对误差在通常精确值 x 无法准确获知的情况下,存在 $\delta>0$,使得 $|E_r^*(x^*)|=\left|\dfrac{x-x^*}{x^*}\right|\leqslant\delta$,称 δ 为近似值 x^* 的相对误差限。相对误差则是无量纲数,通常用百分比表示。

如根据上述定义,测量精确值为 100 m 物体的相对误差 $|E_r(x^*)|=\dfrac{1}{10\,000}=0.01\%$;测量精确值为 100 m 物体的相对误差 $|E_r(x^*)|=\dfrac{1}{1\,000}=0.1\%$(此时精确值