

• 高职高专通识教育系列规划教材 •

YINGYONG SHUXUE

应用数学

主 编 张涛



西北大学出版社

高职高专通识教育系列规划教材

应用数学

YINGYONG SHUXUE

主 编 张 涛

副主编 李 蕊 苏娟丽

西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/张涛主编. —西安:西北大学出版社,2019.8
ISBN 978-7-5604-4374-4

I. ①应… II. ①张… III. ①应用数学—高等职业教育—教材 IV. ①029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 123550 号

应用数学

主 编:张 涛

出版发行:西北大学出版社

地 址:西安市太白北路 229 号

邮 编:710069

电 话:029-88303059

经 销:全国新华书店

印 装:西安华新彩印有限责任公司

开 本:787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张:19.75

字 数:380 千字

版 次:2019 年 8 月第 1 版 2019 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-5604-4374-4

定 价:38.00 元

前 言

本教材是根据新形势下高职高专教育高等数学课程教学改革精神,以陕西省重点教改课题“高职通识教育课程知识体系构建研究与实践”(17GZ002)、杨凌职业技术学院人文社科基金项目“高职通识教育《应用数学》课程知识体系构建研究与实践”(GJ18018)为依托,在认真总结和吸收全国高职院校高等数学课程教学改革经验的基础上,兼顾当前高职院校学生的现状和可持续发展的需要编写而成的。

本教材编写的指导思想和主要特色是:

(1)根据当前高职教育的特点,将本课程定位为通识教育能力培养课程.在注重数学课程体系性和科学性的基础上,本教材大量删减了抽象理论的证明,以生活中的实例引进数学概念,借助几何直观来解释某些抽象概念和定理,从而降低教学难度,易于学生理解.

(2)本教材依据通识教育课程的“工具性”和“文化性”特点,兼顾“必需、够用”为度的原则选取教学内容.

(3)本教材增加了反三角函数、统计基础、阅读材料三部分内容,既强调了与中学知识的衔接,又突出了数学课程的文化背景.

(4)本教材增加了 Matlab 数学软件的教学内容,有助于培养学生利用数学工具解决实际问题的能力.

本教材共 10 章,分别由杨凌职业技术学院文理分院张涛(第 4 章)、付菁波(第 9 章)、李蕊(第 3,6,10 章)、苏娟丽(第 7 章)、田卫东(第 1,2,5 章)、张晓妮(第 8 章)编写完成.全书由张涛统稿定稿.

本教材在编写过程中得到了杨凌职业技术学院文理分院、思政部和教务处的大力支持,文理分院晁团光院长、思政部张晓林主任对教材的编写提出了指导意见.同时,本教材也参阅了大量的文献和教材,在此一并致谢!

本书可作为高职高专院校高等数学课程的通用教材,也可供数学爱好者参考使用.由于编者水平有限,不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正.

编 者

2019 年 3 月

目 录

第 1 章 函数基础	(1)
1.1 函数	(1)
1.1.1 区间和邻域	(1)
1.1.2 函数的概念	(3)
1.1.3 函数的几种特性	(6)
1.2 反函数与反三角函数	(9)
1.2.1 反函数	(9)
1.2.2 反三角函数	(10)
1.3 初等函数的类型	(16)
1.3.1 基本初等函数	(16)
1.3.2 分段函数	(18)
1.3.3 复合函数	(19)
1.3.4 初等函数	(20)
本章小结	(22)
第 2 章 极限与连续	(27)
2.1 极限的概念	(27)
2.1.1 函数的极限	(27)
2.1.2 无穷小量	(31)
2.1.3 无穷大量	(32)
2.2 极限的运算	(34)
2.2.1 极限的性质	(34)
2.2.2 极限的四则运算	(34)
2.2.3 两个重要公式	(37)
2.2.4 无穷小的比较	(38)
2.3 连续性	(41)
2.3.1 函数的连续性	(41)
2.3.2 间断点及其分类	(44)
2.3.3 闭区间上连续函数的性质	(46)

本章小结	(48)
第 3 章 导数与微分	(54)
3.1 导数	(54)
3.1.1 引例	(54)
3.1.2 导数的概念	(55)
3.1.3 导数的几何意义	(57)
3.1.4 可导与连续	(57)
3.2 导数的运算	(58)
3.2.1 导数的四则运算法则	(58)
3.2.2 复合函数的求导法则	(59)
3.2.3 基本初等函数的导数公式	(60)
3.2.4 隐函数求导法则	(60)
3.2.5 对数求导法	(61)
3.2.6 参数方程求导法则	(62)
3.2.7 高阶导数	(62)
3.3 函数的微分	(64)
3.3.1 微分的概念	(64)
3.3.2 微分的运算	(65)
3.3.3 微分在近似计算中的应用	(66)
本章小结	(68)
第 4 章 导数的应用	(72)
4.1 微分中值定理与函数的单调性	(72)
4.1.1 罗尔定理	(72)
4.1.2 拉格朗日中值定理	(73)
4.1.3 柯西定理	(74)
4.1.4 函数的单调性	(74)
4.2 洛必达法则	(77)
4.2.1 “ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”基本未定式	(77)
4.2.2 其他未定式	(78)
4.3 函数的极值与最值	(80)
4.3.1 函数的极值	(80)
4.3.2 函数的最值	(82)
4.4 曲线的凹向与拐点	(84)
4.4.1 凹向与拐点	(85)

4.4.2	曲线的渐近线	(86)
4.4.3	函数图形的描绘	(87)
	本章小结	(89)
第 5 章	不定积分	(93)
5.1	不定积分的概念和性质	(93)
5.1.1	不定积分的概念	(93)
5.1.2	不定积分的性质	(95)
5.1.3	基本积分公式	(95)
5.2	换元积分法	(97)
5.2.1	第一类换元积分法	(97)
5.2.2	第二类换元积分法	(100)
5.3	分部积分法	(103)
	本章小结	(107)
第 6 章	定积分及其应用	(111)
6.1	定积分的概念与性质	(111)
6.1.1	引例	(111)
6.1.2	定积分的概念	(113)
6.1.3	定积分的几何意义	(113)
6.1.4	定积分的性质	(114)
6.2	微积分基本定理	(116)
6.2.1	变上限的定积分	(116)
6.2.2	牛顿-莱布尼茨公式	(117)
6.3	定积分的计算	(118)
6.3.1	定积分的换元法	(118)
6.3.2	定积分的分部积分法	(118)
6.4	定积分的几何应用	(120)
6.4.1	微元法	(120)
6.4.2	求平面图形的面积	(120)
6.4.3	求立体的体积	(122)
6.5	定积分的物理应用	(124)
6.5.1	做功问题	(124)
6.5.2	液体对平面薄板的压力	(125)
6.5.3	转动惯量	(125)
	本章小结	(126)

第 7 章 常微分方程	(131)
7.1 常微分方程的基本概念与分离变量法	(131)
7.1.1 微分方程的基本概念	(131)
7.1.2 分离变量法	(133)
7.2 一阶线性微分方程与可降阶的高阶微分方程	(135)
7.2.1 一阶线性微分方程	(135)
7.2.2 可降阶的高阶微分方程	(138)
7.3 二阶常系数微分方程	(140)
7.3.1 二阶常系数线性微分方程解的性质	(140)
7.3.2 二阶常系数齐次线性微分方程的解法	(141)
7.3.3 二阶常系数非齐次线性微分方程的解法	(143)
本章小结	(146)
第 8 章 统计初步	(150)
8.1 简单的随机抽样	(150)
8.1.1 统计调查	(150)
8.1.2 常见的抽样方法	(152)
8.2 绘制统计图表	(157)
8.2.1 统计表	(157)
8.2.2 统计图	(159)
8.2.3 绘制统计图表	(161)
8.3 数据的数字特征	(168)
8.3.1 平均数、中位数、众数、极差、方差的概念	(168)
8.3.2 标准差及举例应用	(172)
8.4 用样本估计总体	(175)
8.4.1 估计样本的选取	(175)
8.4.2 绘制频数、频率直方图	(175)
8.5 变量间的联系	(182)
8.5.1 绘制变量间的散点图	(182)
8.5.2 变量间的相关关系	(183)
8.6 回归分析	(189)
8.6.1 回归分析的概念与特点	(189)
8.6.2 一元线性回归模型	(190)
本章小结	(196)
第 9 章 行列式	(199)
9.1 行列式	(199)

9.1.1	二阶行列式	(199)
9.1.2	三阶行列式	(200)
9.1.3	n 阶行列式的概念	(202)
9.2	行列式的性质与计算	(204)
9.2.1	行列式的性质	(204)
9.2.2	行列式的计算	(208)
9.3	克莱姆法则	(211)
9.4	矩阵的概念	(215)
9.4.1	矩阵的基本概念	(216)
9.4.2	几类特殊的矩阵	(217)
9.5	矩阵的运算	(220)
9.5.1	矩阵的相等	(220)
9.5.2	矩阵的加法	(220)
9.5.3	矩阵的数乘	(221)
9.5.4	矩阵的乘法	(223)
9.5.5	矩阵的转置	(226)
9.6	逆矩阵与初等行变换	(228)
9.6.1	逆矩阵的概念与性质	(228)
9.6.2	可逆矩阵的判别及求解	(229)
9.6.3	矩阵的初等行变换	(233)
9.7	矩阵的秩	(237)
9.7.1	秩的概念	(237)
9.7.2	秩的计算	(238)
9.7.3	满秩矩阵	(242)
9.8	高斯消元法	(244)
9.8.1	高斯消元法解线性方程组	(244)
9.8.2	线性方程组解的判定	(249)
9.9	n 维向量	(251)
9.9.1	n 维向量的定义	(251)
9.9.2	n 维向量的线性相关性	(252)
9.9.3	向量组的秩	(255)
9.10	线性方程组解的结构	(258)
9.10.1	齐次线性方程组解的结构	(258)
9.10.2	非齐次线性方程组解的结构	(262)
	本章小结	(266)
第 10 章	Matlab 初步	(272)
10.1	Matlab 简介	(272)

10.1.1	Matlab 及其发展	(272)
10.1.2	Matlab 的特点	(273)
10.1.3	Matlab 的帮助系统	(273)
10.1.4	Matlab 的常用命令和操作技巧	(274)
10.2	用 Matlab 进行函数运算	(276)
10.2.1	变量	(276)
10.2.2	常量	(277)
10.2.3	数字变量的运算	(277)
10.2.4	Matlab 中基本数组函数	(277)
10.2.5	复合函数运算	(278)
10.2.6	反函数运算	(278)
10.2.7	因式分解与展开	(278)
10.2.8	符号表达式的化简	(278)
10.3	用 Matlab 求极限、导数运算	(279)
10.3.1	用 Matlab 求极限运算	(279)
10.3.2	用 Matlab 求导数运算	(280)
10.3.3	用 Matlab 做导数应用题	(281)
10.4	用 Matlab 求积分	(284)
10.4.1	用 Matlab 求不定积分	(284)
10.4.2	用 Matlab 求定积分	(284)
10.5	用 Matlab 解常微分方程	(286)
10.6	用 Matlab 进行行列式、矩阵运算	(287)
10.6.1	矩阵的生成	(287)
10.6.2	矩阵行列式的计算	(289)
10.6.3	矩阵的四则运算	(289)
10.6.4	矩阵的转置	(291)
10.6.5	逆矩阵的计算	(291)
10.6.6	矩阵的秩	(291)
10.7	用 Matlab 解线性方程组	(292)
10.7.1	向量组的线性相关性	(292)
10.7.2	求解线性方程组	(293)
	本章小结	(295)
	附录 A 常用数学公式	(300)
	附录 B 《应用数学》答案	(305)
	参考文献	(306)

第1章 函数基础

函数是数学中最基本的内容,它是通过反映变量间的对应关系来描述现实世界的.函数是微积分学研究的主要对象,在中学里我们已经学习过有关概念和性质.本章在回顾函数概念和性质的基础上,重点介绍反三角函数,并对函数重新分类.

1.1 函数

1.1.1 区间和邻域

1. 有限区间

介于某两个实数之间的全体实数的集合称为区间,常用 I 表示,这两个实数叫作区间的端点.两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

(1) 设 a 和 b 为两个实数,且 $a < b$,把满足不等式 $a \leq x \leq b$ 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的闭区间,记作 $[a, b]$.

闭区间 $[a, b]$ 在数轴上表示以 a, b 为端点的线段,且含两个端点(用实心点表示),如图 1-1 所示.

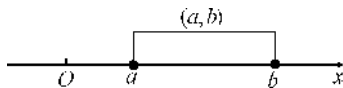


图 1-1

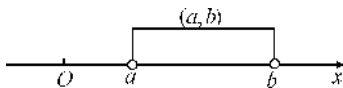


图 1-2

(2) 设 a 和 b 为两个实数,把满足不等式 $a < x < b$ 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的开区间,记为 (a, b) .

开区间 (a, b) 在数轴上表示以 a, b 为端点的线段,且不含两个端点(用空心点表示),如图 1-2 所示.

(3) 把满足不等式 $a \leq x < b$ (或 $a < x \leq b$) 的所有实数的集合,称为以 a, b 为端点的半开半闭区间,分别记为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$. 在数轴上如图 1-3 和图 1-4 所示.

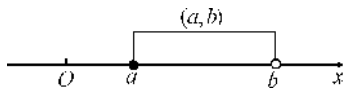


图 1-3

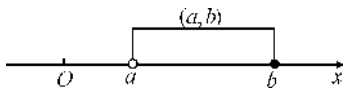


图 1-4

以上这些区间统称为有限区间,有限区间的右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$,称为区间的长度.

2. 无限区间

(1)把满足不等式 $x \geq a$ (或 $x \leq b$)的所有实数集合,称为以 a 为左端点(或 b 为右端点)的无限半闭半开区间,记作 $[a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b]$,在数轴上如图 1-5 和图 1-6 所示.

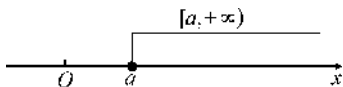


图 1-5

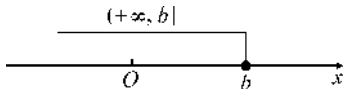


图 1-6

符号“ $-\infty$ ”“ $+\infty$ ”分别读作“负无穷大”和“正无穷大”,它们都不表示具体的数,只表示无限增大的状态.

(2)把满足不等式 $x > a$ (或 $x < b$)的所有实数集合,称为以 a 为左端点(或 b 为右端点)的无限开区间,记作 $(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b)$,在数轴上如图 1-7 和图 1-8 所示.

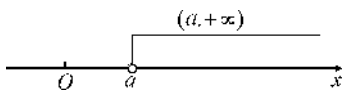


图 1-7

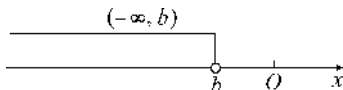


图 1-8

特别地,全体实数的集合 \mathbf{R} ,记作开区间 $(-\infty, +\infty)$,它在数轴上表示为数轴所在的直线.

以上区间统称无限区间.

注意:用区间表示数集时,必须遵循左小右大的原则.

3. 邻域

除区间外,为了描述函数的局部性态,微积分学中常常用到邻域的概念,它是由某点附近的所有点组成的集合.

定义 1-1 设 x_0 和 δ 为两个实数,且 $\delta > 0$,把满足不等式 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 的所有实数集合,称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

邻域的几何意义 邻域 $U(x_0, \delta)$ 在数轴上表示为以点 x_0 为中心,以 δ 为半径的开区间,区间长度为 2δ .如图 1-9 所示.

特别的,不含有中心点 x_0 的邻域,称为 x_0 的去心邻域(或空心邻域),记作 $U(\hat{x}_0, \delta)$,即

$$U(\hat{x}_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

点 x_0 的去心邻域 $U(\hat{x}_0, \delta)$ 在数轴上表示为以 x_0 为中心(不含 x_0), δ 为半径的开区间,区间长度为 2δ ,如图 1-10 所示.其中 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为点 x_0 的左半邻域, $(x_0, x_0 + \delta)$

$$y=f(x), x \in D.$$

其中, x 为自变量, y 为因变量, f 为对应法则, D (使函数有意义的自变量 x 的取值范围) 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$, 按照对应法则 f , 总有唯一确定的值 y_0 与之对应, 这个 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记作

$$y_0, \text{或 } y|_{x=x_0}, f(x_0).$$

函数值的全体所构成的集合, 称为函数的值域, 记作 M , 即

$$M=\{y|y=f(x), x \in D\}$$

注意: (1) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的, 前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则, 而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 表示函数的记号可以任意选取, 除了常用的 f 外, 还可用其他的英文字母或希腊字母“ g ”“ F ”“ φ ”等表示;

(2) 函数的自变量和因变量与用什么字母表示无关, 只要构成函数的两要素定义域和对应法则相同, 两个函数就表示同一函数, 否则就是不同的函数;

(3) 当一个函数确定, 它的定义域就应该是确定的. 如果不考虑所讨论函数的实际背景, 函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量取值范围, 如果所讨论的函数来自某个实际问题, 则其定义域必须满足实际问题的要求.

例 2 已知函数 $f(x)=2x^2+3x-1$, 写出其对应规律.

解 $f(\quad)=2(\quad)^2+3(\quad)-1$

例 3 设 $f(x+1)=x^2-3x$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 于是

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4,$$

故

$$f(x)=x^2-5x+4.$$

例 4 根据函数的概念, 讨论

(1) $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}$ 是函数吗?

(2) $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$ 是函数吗?

解 (1) 因为定义域为空集, 故 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}$ 不构成函数;

(2) 因为定义域是非空集合, 故 $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}$ 构成函数.

例 5 求下列函数的定义域:

$$(1) y=\sqrt{x-2}; \quad (2) y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}.$$

解 (1) 要使函数有意义, 必须满足不等式 $x-2 \geq 0$, 解得 $x \geq 2$. 因此, 函数的定义域为 $[2, +\infty)$;

(2) 要使函数有意义, 必须满足 $x^2-5x+6 > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < 2$, 因此, 函数的定

义域为 $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

例 6 判断下列函数是否相同,为什么?

(1) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$;

(2) $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$.

解 (1) 因为函数 $y = \ln x^2$ 的定义域为 $D_1 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而函数 $y = 2 \ln x$ 的定义域为 $D_2 = (0, +\infty)$, 故它们不是相同函数;

(2) 因为函数 $w = \sqrt{u}$ 的定义域为 $D_1 = [0, +\infty)$, 对应法则为 $f(\quad) = \sqrt{\quad}$, 而函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D_2 = [0, +\infty)$, 对应法则为 $g(\quad) = \sqrt{\quad}$, 故两函数的定义域和对应法则都相同, 因此 $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是相同的函数.

3. 函数的表示法

(1) 解析法 把两个变量的关系用一个公式表示, 这个公式就叫作函数的解析式. 如 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $S = \pi R^2$ 等. 用解析法表示函数的优点是函数关系清楚, 便于研究函数性质.

(2) 列表法 把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格的形式反映出来, 这种表示函数的方法称为列表法. 如平方表, 汽车、火车站的里程价目表, 银行里的利率表, 课表, 等等. 用列表法表示函数的优点是易知自变量与函数的对应关系.

例 7 据天气预报资料统计, 某地 2018 年 6 月 19 日—29 日每天的最高气温如下表:

日期 t (6 月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温 N ($^{\circ}\text{C}$)	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

此表确切表达了温度是日期的函数. 这里虽不存在任何计算温度的公式, 但是每天都会有一个唯一的最高气温, 即每个 t 都有一个与其唯一对应的 N .

(3) 图像法 用函数图像来表示两个变量之间的关系. 如函数 $y = 2x$ 的图像是一条直线(图 1-11). 用图像法表示函数的优点是直观形象.

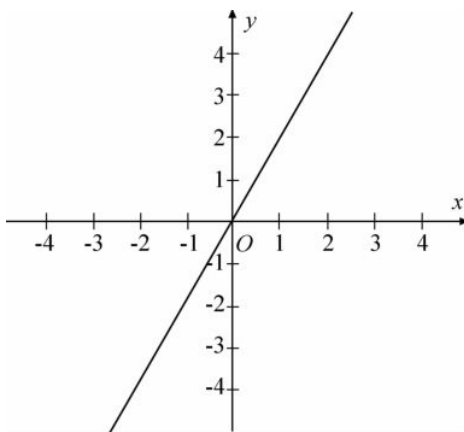


图 1-11

1.1.3 函数的几种特性

1. 有界性

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 都满足不等式 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是有界的. 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是无界的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对于任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 又如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但在 $(1, 2)$ 内有界(图 1-12). 由此可见, 必须指明自变量所在的区间后, 才能讨论函数在该区间内是有界还是无界的.

有界函数在几何上表现为, 函数的图像位于直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 之间的区域内(图 1-13).

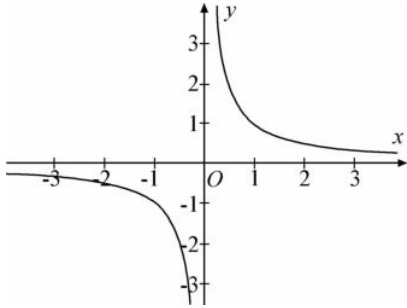


图 1-12

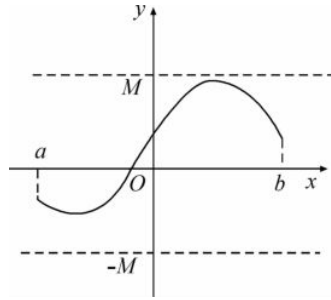


图 1-13

2. 单调性

定义 1-4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内有定义, 如果对于 I 内任意两点 x_1 和 x_2 ,

(1) 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调递增的(图 1-14);

(2) 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调递减的(图 1-15).

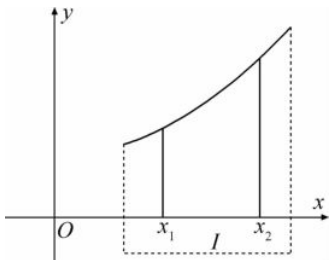


图 1-14

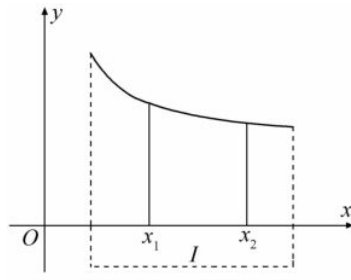


图 1-15

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数, 单调递增区间和单调递减区间统称为单调区间.

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调递增的,在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调递减的,但在定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 内则不具备单调性(图 1-16). 又如,函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调递增的(图 1-17).

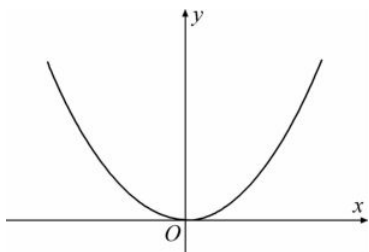


图 1-16

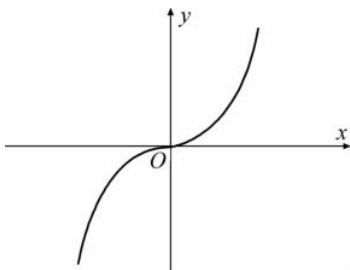


图 1-17

3. 奇偶性

定义 1-5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对于任一 $x \in D$, 都有

(1) $f(-x)=f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

注 偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-16),奇函数的图像关于原点对称(图 1-17).

例 7 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=3x^2+5x^6$; (2) $f(x)=3x^2 \sin x$.

解 (1) 由于函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 并且

$$f(-x)=3(-x)^2+5(-x)^6=3x^2+5x^6,$$

即

$$f(-x)=f(x).$$

所以, $f(x)=3x^2+5x^6$ 是偶函数.

(2) 因为 $x \in (-\infty, +\infty)$, 并且

$$f(-x)=3(-x)^2 \sin(-x)=-3x^2 \sin x,$$

即

$$f(-x)=-f(x).$$

所以, $f(x)=3x^2 \sin x$ 是奇函数.

4. 周期性

定义 1-6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于每一个 $x \in D$, 有 $x+T \in D$, 并且总有 $f(x+T)=f(x)$ 成立, 则称 $y=f(x)$ 为周期函数, T 称为 $y=f(x)$ 的周期; 使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T , 称为函数 $y=f(x)$ 的最小正周期, 通常所说的周期是指最小正周期.

例如, $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $y=\tan x, y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.