

创新思维下的

# 数学教学探究

蒋恒永 史亮 孙肖◎著

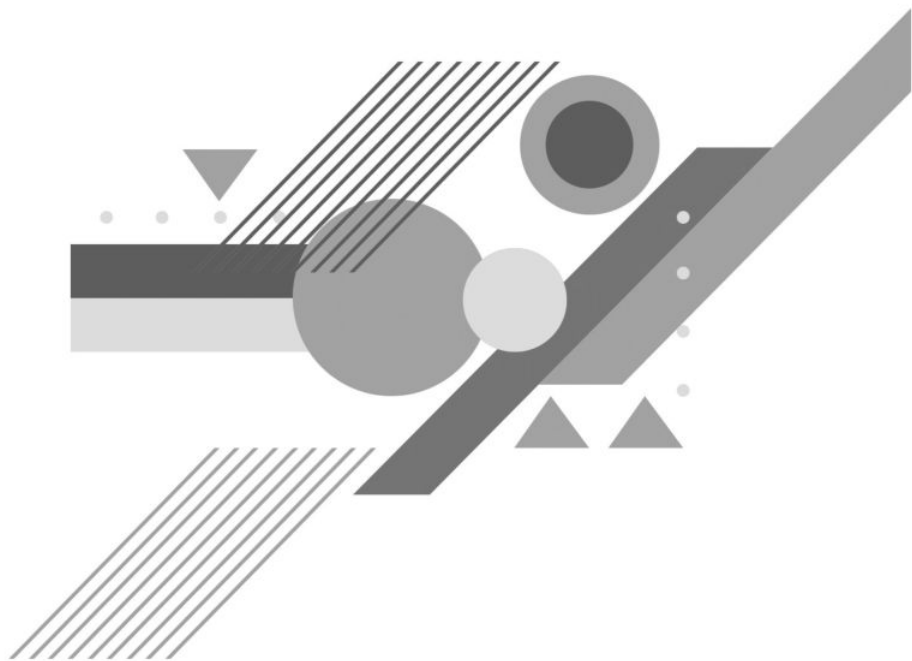


吉林人民出版社

CHUANGXIN SIWEIXIA DE SHUXUE JIAOXUE TANJIU

# 创新思维下的 数学教学探究

蒋恒永 史亮 孙肖◎著



吉林人民出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

创新思维下的数学教学探究 / 蒋恒永, 史亮, 孙肖  
著. -- 长春 : 吉林人民出版社, 2019. 6

ISBN 978-7-206-16123-0

I. ①创… II. ①蒋… ②史… ③孙… III. ①中学数  
学课—教学研究—高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第106308号

## 创新思维下的数学教学探究

---

著 者：蒋恒永 史 亮 孙 肖

责任编辑：门雄甲

封面设计：邓可可

吉林人民出版社出版 发行(长春市人民大街7548号 邮政编码：130022)

印 刷：四平艺恒印务有限公司

开 本：787mm×1092mm 1/16

印 张：7 字 数：115千字

标准书号：ISBN 978-7-206-16123-0

版 次：2019年6月第1版 印 次：2019年6月第1次印刷

定 价：40.00元

---

如有发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂联系调换。

# 前言

## PREFACE

培养创新人才将成为21世纪教育肩负的历史重任。素质教育的全面推进必须以培养学生的创新精神与实践能力为重点。有鉴于此,我们有必要重新审视数学学科的教学目的,把创新意识的培养作为数学教学的重要任务,并作为评价数学教学成败的重要指标。

创新意味着新思想、新观念、新设计、新意图、新做法,创新意识是创新的导向,表现为求新立异,多角度审视和广泛思考,而能力是使人成功地完成某种活动的心理特征,创新能力即是使人成功地完成某种创造发明活动的本领。对于广大学生而言,其创新意识与能力的形成,离不开他们创新性的学习活动的开展。数学学习上的创新主要是指学生对人类已有的数学知识的“再发现”“再创造”或“创造性”的运用,其实质是学生在数学活动中表现出创新性思维品质。这种创新性以学生自愿的创新意识为前提,以学生良好的个性品质为保证,以扎实的数学基础知识、基本技能和基本的数学能力为依托。因此,培养学生创新意识与能力成了国际国内数学教育研究的热点。

本书在撰写的过程中,查看了大量相关资料和文献,借鉴了中外权威学者的最新成果,在此表示最诚挚的谢意。由于作者水平有限,如有错漏之处,望广大读者批评指正。

作者

2018年6月

# 目录

## CONTENTS

<b>第一章 数学创新思维及培养途径</b> .....	<b>001</b>
第一节 数学思维与创新思维的含义 .....	001
第二节 数学创新思维方法 .....	004
第三节 数学创新思维的培养途径 .....	015
<b>第二章 创新思维下的数学教学目标</b> .....	<b>023</b>
第一节 数学目标制订依据 .....	023
第二节 数学课程目标 .....	028
第三节 目标的演变 .....	035
第四节 数学教育观及教学目标改进 .....	040
<b>第三章 创新思维下的数学教学方法创新</b> .....	<b>045</b>
第一节 教学方法简介 .....	045
第二节 数学教学模式创新 .....	053
第三节 数学教学方法改革 .....	060
<b>第四章 创新思维下的数学解题教学探究</b> .....	<b>066</b>
第一节 数学问题和问题解决 .....	066
第二节 解决数学问题的理论模式 .....	069
第三节 数学问题解决的意义和准则 .....	072
<b>第五章 创新思维下的命题教学创新</b> .....	<b>086</b>
第一节 命题的含义及数学命题学习 .....	086
第二节 数学命题的教学步骤和策略 .....	091
第三节 数学命题的教学设计 .....	098
<b>参考文献</b> .....	<b>105</b>

# 第一章 数学创新思维及培养途径

## 第一节 数学思维与创新思维的含义

### 一、思维

思维最初是人脑借助于语言对客观事物的概括和间接的反应过程。思维以感知为基础又超越感知的界限。通常意义上的思维,涉及所有的认知或智力活动。它探索与发现事物的内部本质联系和规律性,是认识过程的高级阶段。

思维对事物的间接反映,是指它通过其他媒介作用认识客观事物,借助于已有的知识和经验,已知的条件推测未知的事物。思维的概括性表现在它对一类事物非本质属性的摒弃和对其共同本质特征的反映。

学生的学习,不仅要通过感知认识事物的个别属性和外部联系,获得感性认识,而且还需要在感性认识的基础上,通过复杂的思维活动,认识事物的本质和规律,获得理性认识。人脑对客观事物的本质和规律的概括及间接的反映过程就称为思维。<sup>①</sup>

思维最显著的特性是概括性。思维之所以能揭示事物的本质和内在规律性,主要来自抽象和概括的过程,即思维是概括的反映:以大量的已知事实为依据,在已有知识经验的基础上,舍弃个别事物的个别特征,抽取它们的共同特征,从而得出新的结论。概括性是思维研究的一个重要方面,概括水平是衡量思维水平的重要标志。

间接性是思维的另一特性。思维要依靠感性认识,但远远超脱于感性认识的界限之外,去认识那些没有直接感知过的或根本无法感知到的事物以及预见和推知事物发展的进程。思维之所以具有间接性,关键在于知识与经验的作用,它是随着主体知识经验的丰富而发展起来的,因此知识和经验对思维能力有重要影响,闻一知十、由此及彼都是思维间接性的体现。

---

<sup>①</sup>旷雨阳,刘维江. 数学分析精要解读[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2016.

思维按照活动中抽象概括的水平,可以分为直观行动思维、具体形象思维和抽象逻辑思维三个层次。直观行动思维就是在实际操作中进行的依赖于实际行动为支柱的思维,从动作到动作是这种思维的主要特征;具体形象思维是凭借事物的知觉形象和表象进行的思维,仍带有直观性和具体性,其基本形式是表象;抽象逻辑思维又分为形式逻辑思维和辩证逻辑思维两种形式。形式逻辑思维是按照形式逻辑的规律而进行的思维,同一律、矛盾律、排中律和充足理由律是这种思维的基本规律;辩证逻辑思维是抽象逻辑思维的高级阶段,是按照辩证逻辑的规律而进行的思维。

思维技巧是人们日常生活中经常会用到的,这里主要选取一些有代表性的思维技巧:①归纳思维,从一个个具体的事例中,推导出它们的一般规律和共通结论的思维;②演绎思维,把一般规律应用于一个个具体事例的思维。在逻辑学上又叫演绎推理。它是从一般的原理、原则推导个别具体事例的思维方法;③批判思维,一面品评和批判自己的想法或假说,一面进行思维。在解决问题的时候,历来都强调批判思维。批判思维包括独立自主、自信、思考、不迷信权威、头脑开放、尊重他人等六大要素;④集中思维,从许多资料中,找出合乎逻辑的联系,从而导出一定的结论;对几种解决方案加以比较研究,从而导出一种解决办法的,就属于这种思维;⑤侧向思维,利用“局外”信息来发现解决问题的途径的思维,如同眼睛的侧视。侧向思维就是从其他领域得到启示的思维方法;⑥求异思维,也叫发散性思维。同一个问题探求多种答案,最常见的就是数学中的一题多解或语文中的一词多义;⑦求证思维,就是用自己掌握的知识和经验去验证某一个结论的思维。求证思维的结构包括论题、论据和论证方式。每个人每天都会用到求证思维;⑧横向思维,简单地说就是左思右想,思前想后。这种思维大都是从与之相关的事物中寻找解决问题的突破口。横向思维的思维方向大多是围绕同一个问题从不同的角度去分析,或是在对各个与之相关的事物的分析中寻找答案;⑨递进思维,从目前的一步为起点,以更深的目标为方向,一步一步深入达到的思维。如同数学运算中的多步运算;⑩交叉思维,从一头寻找答案,在一定的点暂时停顿,再从另一头找答案,也在这点上停顿,两头交叉汇合沟通思路,找出正确的答案。在解决较为复杂的问题时经常要用到这种思维,如“围魏救赵”;⑪幻想思维,“脱离现实性”是它最主要的特点。幻想思维可以在人脑中纵横驰骋,也可在毫无现实干扰的理想状态下,进行任意方向的发散,从而构成了创造性思维的重要组成部分。因为幻想的脱离实际,

也就无法避免错误的产生,但只要幻想最终能回到现实中来并加以现实的检验,错误就会被发现和纠正;⑫灵感思维,人们在创造过程中达到高潮阶段以后出现的一种最富有创造性的思维突破。它常常以“一闪念”的形式出现,是由人们潜意识思维与显意识思维多次叠加而形成的,也是人们进行长期创造性思维活动达到的一种境界;⑬核心思维,就是对于事物只索取重点,不关心任何杂乱无章的东西,学识渊博的人才具有这种凝聚核心的思维方式,在他们看来这个世界都是裸露的;⑭虚拟思维,21世纪高速发展的网络时代,科学家们不得不定性虚拟思维的含义。它是以自我核心为实点参照,以大脑为初始虚拟折射平台,以网络信息为外部虚拟折射平台的现实思维过程。

## 二、数学思维及发展

数学思维也就是人们通常所指的数学思维能力,即能够用数学的观点去思考问题和解决问题的能力。比如转化与划归、从一般到特殊、特殊到一般、函数到映射的思想。一般来说,数学能力强的人,基本体现在两种能力上:联想力和数字敏感度。前者能够把两个看似不相关的问题联系在一起,这其中又以构造能力最让人折服;后者便是大多数曝光的所谓Geek,比如什么Nash之类的。当然也有两种能力的结合体。

我国高中数学教学课程标准中明确指出,思维能力主要是指会观察、实验、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点;能运用数学概念、思想和方法,辨明数学关系,形成良好的思维品质。

数学思维是人脑和数学对象交互作用并按一般的思维规律认识数学规律的过程。在数学学习中,随着学习内容的不断加深和抽象概括水平的逐步提高,学生的数学思维也逐渐由直观行动思维发展到抽象逻辑思维。当然,由于数学思维活动的复杂性,这些思维成分之间往往又能互相渗透。

高中学生对数学思维的发展具有两个主要特点:抽象逻辑思维日益发展,并逐渐占有相对优势,但具体形象思维仍起重要作用;思维的独立性和批判性有了显著的发展,他们往往喜欢怀疑和争论问题,不随便轻信教师和书本的结论。当然初、高中生思维的独立性和批判性已慢慢成熟,很少会产生片面性和表面性,这些特点是和他们的知识经验相联系的。高中学生的数学思维达到了比较高的水平。首先思维是有了更高的抽象性和概括性,并开始形成辩证逻辑思维。那么高中学生的思维则已明显地由经验型转向理论型,抽象逻辑思维渐

占主导地位;其次是高中学生的思维具有鲜明的意识性;注意力更加稳定,观察力更加精确、深刻,能够发现事物的本质和规律;在记忆力方面,有意记忆和理解记忆已占主导地位。

## 第二节 数学创新思维方法

数学思维方法是指数学思维过程中运用的方法,它们分别是观察与实验;比较、分类与系统化;演绎、归纳与数学归纳法;分析与综合;抽象与概括;一般化与特殊化;模型化与具体化;类比与映射;联想与猜想,等等。这些方法是数学思维操作的基本手段,它们和思想内容、思维形式以及思维品质相互联结,是数学思维结构的主要成分。从这些方法的性能考察,其中有些侧重于探索、猜想或发现性,属于非严格的似真推理范畴,另一些侧重于求解、论证或整理性,属于严格的逻辑推理范畴。

### 一、观察

#### (一) 观察法及分类

1. 观察法。观察法是人们对周围世界客观事物和现象在其自然条件下,按照客观事物本身存在的实际情况,研究和确定它们的性质和关系,从而获取经验材料。在实施观察法数学教学过程中,教师要适当地进行讲解与介绍,引导学生把注意力集中到观察的对象上,把感知与理解结合起来,从多方面认识所学的对象,以便更好地理解所要掌握的内容,并通过观察认识数学的本质、揭示数学的规律、探求数学方法。观察是有目的、有计划的,是和思维活动紧密结合的主动知觉。而知觉是人脑对直接作用于感觉器官的客观事物的整体反映。但人对同时作用于感觉器官的所有客观事物并不都产生知觉,而只是对其中少数客观事物发生兴趣,然后做出观察行为,产生知觉。所以,若要求学生事物进行观察,首先要激发学生对该事物产生兴趣。激发兴趣可以通过设疑、引入竞争、趣化知识等方法去实施;其次要对学生的观察要加以引导,明确观察目的,把学生漫无目的的、杂乱无章的观察行为,集中到少数事物或事物的重要方面,排除次要事物的干扰,从而收到理想的观察效果。激发兴趣,引导观察,不但使学生明确了观察目的,而且锻炼了学生发现问题、解决问题的能力。

2. 观察法的种类。观察对象和观察方法对学生来说往往是陌生的,教师应在教学过程中根据观察对象和观察目的,指导学生正确使用相应的观察方法,以达到教学目的,提高学生的观察能力。观察法主要有以下几种:①验证观察法,运用验证观察法,使课本理论具体化、真实化,而且在验证过程中既巩固了已学过的理论知识,又培养了学生实事求是、追求真理的思想;②比较观察法,比较观察法是抓住事物的特点比较其异同的方法。利用比较观察法,使各项观察点既清楚明白又容易记忆,避免了观察内容的混乱。在比较观察过程中,学生可以初步获得对不同事物进行对比、分析的能力;③循序观察法,循序观察法是指对生物体的形态结构按照一定的排列顺序进行观察的方法。循序观察法能对生物体整体或局部的形态结构全面观察,观察过程详尽而条理清晰,避免了遗漏观察点的现象;④动态观察法,此法常用于生物的生活习性、生理功能、生物现象变化等方面的观察。

观察法应根据观察对象、观察内容、观察目的、观察条件的不同,选择适用的一种或多种观察法。不论采用什么观察法,在观察过程中要求做到点面结合,既要全面了解,又要抓住重点观察。

## (二) 观察法的优缺点

1. 观察法的优点。观察法主要有4个优点:①它能通过观察直接获得资料,不需其他中间环节。因此,观察的资料比较真实;②在自然状态下的观察,能获得生动的资料;③观察具有及时性的优点,它能捕捉到正在发生的现象;④观察能搜集到一些无法言表的材料。

2. 观察法的缺点。观察法主要有5个缺点:①受时间的限制,某些事件的发生是有一定时间限制的,过了这段时间就不会再发生;②受观察对象限制。如研究青少年犯罪问题,有些秘密团伙一般不会让别人观察的;③受观察者本身限制。一方面人的感官都有生理限制,超出这个限度就很难直接观察;另一方面,观察结果也会受到主观意识的影响;④观察者只能观察外表现象和某些物质结构,不能直接观察到事物的本质和人们的思想意识;⑤观察法不适应于大面积调查。

## (三) 观察法的作用

观察法是维系这一联系最简便的纽带,为数学教育研究提供了最可行的实证工具。通过对不同类型观察法的分析,我们可以看出它在数学教育研究中的重要作用。概括起来,主要表现在以下几方面:①提供及时调控教学行为的信

息,数学教学一线的研究者在教学过程中,通过自然观察,随时捕捉教学信息,或者通过录像带进行自我观察,以局外人的身份审视教学,寻找差距,进行反思,以便及时改善教学行为,积累教学经验;②提供数学教育研究的第一手真实资料,在数学教育研究中,对教与学的发生过程尤其是数学思维过程或心理过程的研究,一般的理论描述难以做到细致入微,且有空中楼阁之感,观察法则获得此类研究资料的最佳手段,且能保证获得一手真实资料。例如,对学生自主探究学习的研究,只有通过对各种教学信息的观察分析,才能把握第一手资料,而理论研究、问卷、调查等都无法替代,因为一旦打破了自然条件,研究就失去了真实性;③提供数学教育研究的理论假设和课题,在数学教育研究中,对一些教学现象的洞察以及对一些新思想的捕捉,观察法有自身特有的优势,理论研究也会有一些新思想的萌生,但这与观察所得的经验资料往往息息相关。事实上,经验资料匮乏,理论研究就会成为无源之水。因此,我们认为,自然观察是发现问题提出问题的有效方式,而科学观察是产生理论假设,初步形成研究课题的重要手段。

进行观察要注意三点:一是要有意识、有目标,处处留心;二是要有基础,有必要的相关知识,否则难以看出“门道儿”;三是要有方法,要抓住要领,尤其要特别注意从个别中想到一般,从平常中发现异常。

## 二、实验

实验是人们根据一定的研究目的,运用一定的物质手段,在人为地控制或模拟自然现象的条件下,使自然过程或生产过程以纯粹的、典型的形式表现出来,暴露它们在天然条件下无法暴露的特征,以便进行观察、研究、探索自然的本质及其规律的一种研究方法。任何实验都和观察相联系,观察是实验的前提,实验是观察的证实和发展。在数学中,解决某些实际问题时的想象实验性推理,就属于思想实验的运用。<sup>①</sup>

实验法是通过主动变革、控制研究对象来发现与确认事物间的因果关系的一种科研方法。其主要特点是:第一,主动变革性。观察与调查都是在不干预研究对象的前提下去认识研究对象,发现其中的问题。而实验却要求主动操纵实验条件,人为地改变对象的存在方式、变化过程,使它服从于科学认识的需要;第二,控制性。科学实验要求根据研究的需要,借助各种方法技术,减少

<sup>①</sup>史秀英,冯桂兰. 数学典型问题分析与创新案例研究[M]. 赤峰:内蒙古科学技术出版社, 2012.

或消除各种可能影响科学的无关因素的干扰,在简化、纯化的状态下认识研究对象;第三,因果性。实验是发现、确认事物之间的因果联系的有效工具和必要途径。

### 三、比较

#### (一) 比较的定义

比较是确定有关事物的共同点和不同点的思维方法。数学中的比较是多方面的,包括量的大小比较,形式结构和关系的对比,数学性质的比较。在解题过程中,它既是一种整体的思考方法,也经常在各个局部加以运用。从数学概念的发展、命题的推演或证明到数学问题的解决,都渗透着比较方法的运用。

#### (二) 数学教学中的比较法

1. 正确选择比较对象。哪些问题需要通过比较来证实?比如,小数的初步认识。学生对小数并不陌生,但从理论上讲述,这种知识是不牢固的,必须把整数的加减法同小数加减法相互比较获得感性认识。

2. 要有一定的练习量。比较,还需有一定的练习量,达到加深印象,进一步巩固的作用。比如,长度单位与面积单位。这类知识达不到一定的量,是不可能在大脑中留下永久性印痕的,不断比较、归纳,才能有所理解,有所利益。

3. 从感性到理性。在教学中比较,这种做法是学生易于接受的,但若是拘泥在这个层面上就远远不够了。因为感性认识是生动的,也是浅显的,只有以感性知识作基础,加以判断、推理等思维活动,才能上升为理性认识,才能揭示事物的本质,所以,我们用的比较法只是迈出的第一步,在此基础上再开展讨论、分析、归纳、总结活动,认识就会有质的提高。

比较法与其他教法一样,都属于教学手段而不是目的,在实际运用中应避免形式主义的倾向,只有恰当地运用比较法,才能收到预期的教学效果。

### 四、分类

#### (一) 分类标准

分类是以比较为基础,按照事物间性质的异同,将相同性质的对象归入一类,不同性质的对象归入不同类别的思维方法。分类原则是既不重复、不遗漏。其标准有:①依据数学概念的内涵,按有无此属性分类;②依据定理、公式、法则适用范围的限制,按限制与突破限制分类;③依据图形相对位置的变

化,按变化的“临界位置”分类;④依参数的变化,按变化使结论产生“质变”的临界值分类。

## (二) 分类需要注意的事项

分类讨论的一般步骤是确定分类标准、恰当分类、逐类讨论及归纳结论。分类讨论问题时要注意:①识别讨论的情境,确认讨论的对象,是分类讨论的前提;确定分类的标准是分类讨论的关键;逐类严密地讨论是分类讨论的主体;②数学概念的内涵、公式法则适用的限制、图形相对位置的变化、参数取值的变化是确定分类标准的主要依据,思想的整体意识是正确分类讨论的保证。

## 五、系统化

系统化是在分类的基础上,把整体中各个部分的相关性按照某种顺序组成体系的思维方法。它能以不同的侧面揭示客观事物之间及其内部的错综复杂性,能反映客观世界的整体性和统一性。但是客观事物的本质具有不同的层次,因此系统的表述对于某一整体而言不是唯一确定的,通常需要由思维的目的和研究的角度来决定。例如,数学中的各种概念系统、性质系统、公式系统、方法系统就是具有以不同的分类标准构成的不同的系统。

## 六、演绎

演绎是由一般性较大的前提,推出一般性较小的结论的推理方法,也是由一般到特殊的思维方法。运用演绎思维进行推理,其依据是已知的事实或真命题,推得的结果就一定正确,因此演绎方法是数学证明过程中经常使用的严格推理方法。它侧重于求解和论证,对训练技能、技巧有很大的作用。

演绎推理结构由三个判断组成,通称“三段论”,是由大前提、小前提及结论构成的。“三段论”中的三个判断,每个判断中都含有两个概念,称为名词,每个名词在“三段论”中各重复两次,所以有三个独立的不同的名词出现,这是“三段论”的特点,也是演绎推理的特色。其推理反映命题的一个因果关系,大、小前提是“因”,结果是“果”。演绎推理不论采用何种形式,除前提必须正确外,还必须注意前提对于结论而言的充分性和必要性,否则还会产生错误的结论。

## 七、归纳

归纳是指通过对特例的观察和综合去发现一般规律的方法。波利亚指出:“归纳过程的典型步骤为:首先找到某些相似性;然后是一个推广的步骤,即把

所说的相似性推广到一个明确表述的一般命题;最后,我们又应对所得出的一般命题进行检验。”

但是,数学史上有很多由于运用归纳法而导致错误论的例子,即使是数学大师也不例外。尽管由归纳法所得的结论未必可靠,可它具有由特殊到一般、具体到抽象的认识功能,对于科学的发展是十分有用的。这正如高斯所说,他的定理许多是靠归纳法发现的,证明只是一个补行的手续。

归纳法往往对研究对象无限的问题就不能保证其正确性,因此需要一种新的方法来解决问题,数学归纳法就是这样的一种方法。

## 八、数学归纳法

数学归纳法是用来证明与自然数有关的数学命题的一种方法。通过“有限”步骤,证明对“无限”多个自然数都是正确的。证明步骤:①当 $n$ 取第一个值 $n_0$ 时,某个论断成立;②假设当 $n=k$ 时某论断是正确的,证明当 $n=k+1$ 时,论断也是正确的。从而可以肯定这个论断对于 $n \geq n_0$ 的所有自然数都成立。其第一步证明,也叫奠基步,是递推的基础,它解决了矛盾的特殊性;第二步证明是递推的依据,两步缺一不可。它是必然性的推理方法。

演绎与归纳从辩证观点来看,两者是相辅相成、对立统一的,演绎必须以归纳为基础,否则就无法发现更高层次的新知识;归纳要以演绎为指导,归纳的结果往往用演绎推理来证明。归纳和演绎的互相渗透,在数学归纳法中体现得最明显。数学归纳法中的两个步骤,固然是归纳推理,但在每一步之中,其中的证明过程又是演绎推理了。

## 九、分析与综合

分析与综合是数学思维的两种基本方法,是其他数学思维方法的基础。它们在数学思维过程中以不同的形式出现。

1. 分析是把研究对象分解为它的各个组成部分,然后对这些组成部分分别加以研究,从而认识事物的本质和规律的一种思维方法。例如,为了系统地、深入地理解圆锥曲线的性质。我们按离心率 $e$ 的取值范围将其分为椭圆、双曲线和抛物线,逐一研究各自的性质,继而分析它们之间的联系和区别。综合是把研究对象的各个组成部分联系起来加以研究,从而在本质上把握事物的性质和规律。例如将椭圆、双曲线和抛物线的性质及相互关系统一进行研究,挖掘共同属性,最终得到了圆锥曲线最本质的内容。

2.分析法还是特指从结果追溯到产生这一结果的原因(执果索因)的一种思维方法。而综合法则是一种从原因推导出由原因产生结果(由因导果)的思维方法。在这种意义下,解答应用题时,算术方法体现的是综合,而代数方法体现的是分析。

## 十、抽象和概括

抽象是把研究的事物从某种角度看待的本质属性抽取出来进行考察的思维方法。也即把大量生动的关于现实世界空间形式和数量关系的直观背景材料,进行去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的加工和制作,从而提炼数学概念,构造数学模型,建立数学理论的过程。数学中的概念、关系、定理、方法、符号等都是数学抽象或再抽象的思维结果。抽象性是数学科学的本质特点之一,因此抽象思维是数学学习的基础之一。在数学教学中,抽象思维方法的训练可以从具体事物或实际问题的数学抽象做起,逐步提高抽象度,逐步发展抽象思维能力。

我们以著名的哥尼斯堡七桥问题来对抽象和概括方法进行一下直观认识。18世纪东普鲁士哥尼斯堡有条普莱格尔河,这条河有两条支流,在城中心汇成大河,中间是岛区。河上有七座桥,问能否从某地出发,经过每一座桥一次且仅一次,然后返回出发地。

思考方法:数学中的图论,最早就开始于哥尼斯堡七桥问题,这个问题很长时间没有得到解决,后来在1736年瑞士数学家欧拉利用数学抽象方法,成功地做出了解答。具体地说,欧拉敏锐地看到,整个问题与所走路程的长度无关,而且,岛区与河岸无非就是桥梁的连接地点。因此,欧拉把两个岛和河两岸抽象为四个点,把七座桥抽象为七条线。这样,七桥问题便等价于一笔画出的问题。

从哥尼斯堡七桥问题可看出,数学抽象具有三个显著的特征:①数学抽象有着明确的目标,都是撇开对象的具体内容,仅仅保留空间形式或数量关系;②数学抽象适用的范围广泛,既有以提炼数学概念为基本目的的代表性抽象,又有旨在探索数学理论的原理性抽象;③数学抽象有着丰富的层次,不仅表现为直接从现实世界中抽出相应的空间形式和数量关系,而且还表现为在已有数学知识的基础上抽象新概念、建立新理论。

概括是把抽象出来的若干事物的共同属性归结出来进行考察的思维方法。概括要以抽象为基础,它是抽象的发展。抽象度愈高,则概括性愈强,将概括中获得的概念和理论运用于实际时,其迁移范围就更广。也就是说,高度的概括

对事物的理解越具有一般性,则获得理论或方法就越有普遍的指导意义。

抽象和概括是密不可分的。抽象可以仅涉及一个对象,而概括则涉及一类对象。以不同角度考察同一事物会得到不同性质的抽象,即不同的属性。而概括则必须从多个对象的考察中寻找共同的相通性质,抽象思维则侧重于分析、提炼。概括思维则侧重于归纳、综合。数学中的每一个概念都是对一类事物的多个对象进行观察和分析,抽象出每个对象的各种属性,再通过归纳,概括出各个对象的共同属性而形成的。在解决数学问题方面,得出数学的模型、模式,总结出解题的规律和方法都是通过分析、比较、抽象、归纳等思维环节,最后进行理论概括的结果。

### 十一、特殊化与一般化

梅森是英国开放大学数学教学系的主任,他集中研究了数学中的特殊化和一般化方法及其在解题过程中的作用。他指出特殊化与一般化正是数学思想的核心,同时也是怎样解题的关键所在。

特殊化通常是指考虑一般性命题的特殊例子,或如波利亚所说:“是从考虑一组给定的对象集合过渡到考虑该集合的一个较小的子集,或仅仅一个对象。”特殊化的思维作用包括以下两个方面:

1. 演绎作用。通常可将研究问题或对象看成一般性问题或对象,按照增加约束条件,取其局部或个别情形进行考察等方式得出特殊性问题或对象。这样的特殊化是演绎的形式之一。例如由多边形得出三角形或四边形;由整数推向奇数或偶数;由变量换成常量;将非严格不等式换成等式;由命题“三条平行线截两条直线,所得的对应线段成比例”,推出命题“如果三条平行线在一条直线上截得的线段相等,那么在其他直线上截得的线段也相等”等诸如此类的表述,都是特殊化的结果。

2. 通过对特殊和个别的分析去寻求一般。用这种方法获得关于所研究对象的性质或关系的认识,找到解决问题的方向、途径或方法。这就是解题时的“以退求进”的思维方法。通常采用的“极端化原则”,特例、反例分析法等都属于这个范围。

一般化是把研究问题或对象从原有范围扩展到更大范围进行考察的思维方式。它是一种特殊的概括,是将个别事物或对象推广到更普遍的情形。在数学中我们经常通过改变条件、用变量去取代常量等来获得更一般的结论。相对特殊化而言,一般化是较为困难的,然而一般化又是数学创造的基本形式,因

为数学认识的根本目的就是要揭示更为普遍、更为深刻的事实或规律。尽管特殊化与一般化是在两个相反的方向上进行的,但是这两者在实际的数学研究中又是密切相关、互相依赖的。

### 十二、模型化与具体化

模型化或模型方法是通过抽象、概括和一般化,把研究的对象或问题转化为本质(关系或结构)同一的另一对象或问题加以解决的思维方法。通常把被研究的对象或问题称为原型,而把转化后的相对定型的模拟化或理想化的对象或问题称为模型。模型化思想强调事物的整体性和本质同一性,因此所建的模型必须能真实反映原型的整体结构、关系或某一过程、某一局部、某一侧面的本质特征和变化规律。总体上可分为实物模型和思想模型两大类,表现形式多种多样,如数学模型、物理模型、逻辑模型、图形模型、功能模型,等等。其作用在于使研究对象的处理典型化、形式化和精确化,从而在认识方法上也起到清晰化、简洁化的作用。

数学模型是针对或参照某种事物系统的主要特征、主要关系,用形式化的数学语言,概括地或近似地表述出来的一种数学结构。它是从现实世界中抽象出来的,是对客观事物的某些属性的一个近似的反映。

欧拉对七桥问题的巧妙解决,是通过构造数学模型来实现的:七桥问题是一个具体的实际问题,属于数学模型的现实原型,经过理想化抽象所得到的一笔画问题,便是七桥问题的数学模型。这种只反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构,属于狭义上的数学模型。在现代应用数学中,数学模型都作狭义的解释,构造数学模型的目的,主要是为了解决具体的实际问题。

从广义上讲,一切数学概念、数学理论体系,各种数学公式,各种方程式,各种函数关系以及由公式系列构成的算法系统,都可称为数学模型,因为它们都是从各自相应的现实原型中抽象出来的。在利用数学模型方法求解时,需要多方面的能力,如理解实际问题的能力,数学抽象能力,运用数学工具的能力,通过实践加以验证的能力。为此,在平时的学习中,应当多接触一些实际问题,多了解一种相关的学科知识。

### 十三、类比与映射

类比是一种间接推理的方法,也是一种科学研究的方法。它以比较为基础,首先对两个不同对象的某些属性进行比较(从特殊到特殊),找出它们的相