经全国中小学教材审定委员会
2006 年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组
编著

人民教育出版社

B版

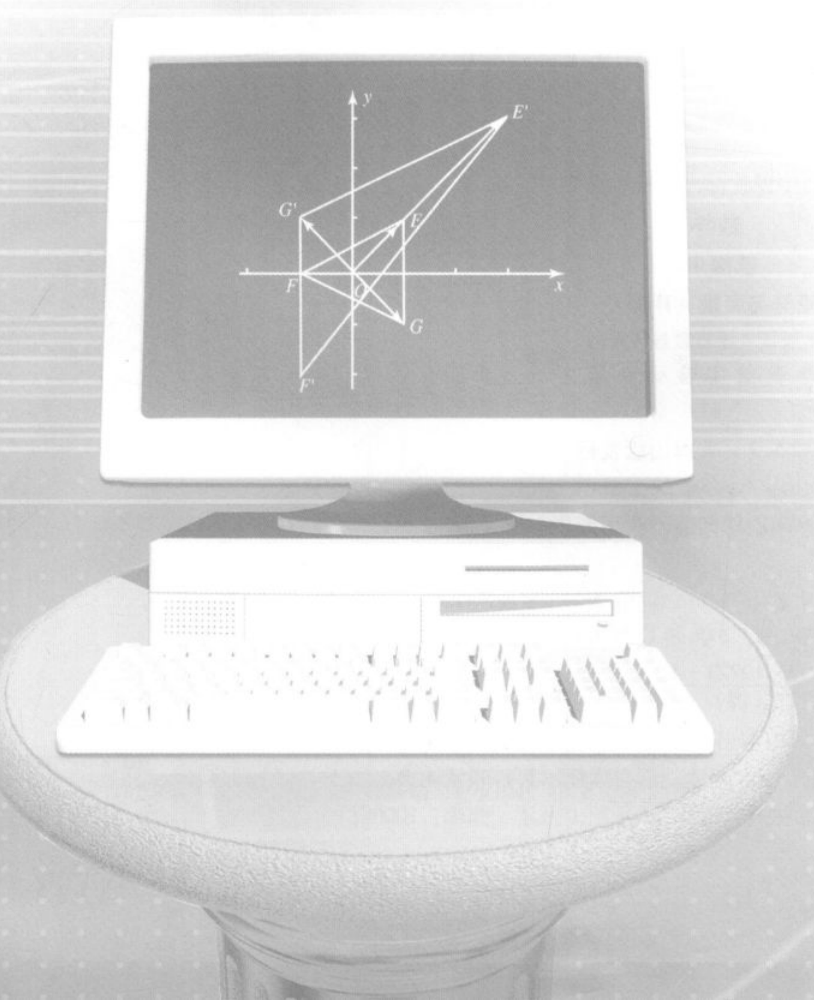
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　许玉铭

责任编辑　　刘长明

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-2

矩阵与变换（B版）

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4.25　字数：94 000

2006 年 6 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 7-107-19727-4
G·12777（课）　定价：4.25 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

本册导引

矩阵最早来源于几何图形的变换及线性方程组的解等问题的研究．随着数学的不断发展，人们发现，很多其他的问题也都可以借助矩阵的理论来处理．现在，矩阵理论已经成为现代数学的一个非常重要的工具，其应用涉及图论、控制论、密码学、对策论、计算机图形学等很多领域．

第一章，我们从平面图形变换的观点，引入了二阶矩阵、二阶矩阵与平面向量的乘法及二阶矩阵的乘法，讨论了二阶矩阵的运算性质，同时，我们还研究了一些特殊二阶矩阵所表示的变换，如恒等变换、反射变换、伸压变换、旋转变换等．

第二章，我们通过对具体的图形变换的分析，引入了二阶矩阵的逆矩阵的定义．然后合理地定义了二阶矩阵的行列式，并给出了二阶矩阵的逆矩阵的求法．利用二阶矩阵的逆矩阵，我们得到了二元一次线性方程组的一种矩阵解法．

另外，求逆矩阵、解线性方程组等内容都包含着重要的算法思想，我们有意识地在这些问题中渗入了算法和程序框图，以加强学生对算法的理解和应用意识．

第三章，我们从几何变换的角度，引入了二阶矩阵的特征值和特征向量．以数学探究的方式找出了求特征值和特征向量的方法．然后，讨论了特征值的不变性．最后，利用特征值和特征向量给出了矩阵变换的一种简单表示．

附录，我们简要介绍了三阶矩阵的基本知识，以拓广学生对矩阵的认识，为学生将来进一步学习矩阵理论做好铺垫．

目　录

第一章　二阶矩阵与平面图形的变换

矩阵是数学中一个极其重要而又应用广泛的概念，很多实际问题都可以归结成矩阵来解决. 这一章我们主要学习二阶矩阵的定义以及二阶矩阵的简单运算，体会数学知识形成、发展的过程.

1.1　二阶矩阵

在以前的学习中，大家经常遇到一些图表. 比如，历史中的年代表，地理中的矿产分布表，物理和化学中的试验数据表，等等. 那么，同学们有没有想过这些表格的优点呢？仔细想一想，我们会发现这些图表能够既直观又确切地反映出所研究对象的信息！其实，在数学中我们也有很多这样的例子.

例 1　如图 1-1 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，把点 $P(x, y)$ 绕原点沿逆时针方向旋转 30°得到点 $P'(x', y')$. 若设 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的正半轴所成的角为 φ，$|OP|=|OP'|=r$，则有

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi;$$
$$x'=r\cos(\varphi+30^\circ)=r\cos\varphi\cos 30^\circ-r\sin\varphi\sin 30^\circ,$$
$$y'=r\sin(\varphi+30^\circ)=r\sin\varphi\cos 30^\circ+r\cos\varphi\sin 30^\circ.$$

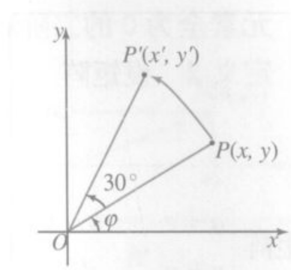


图 1-1

于是，可得两点 P 与 P' 的坐标之间的关系：

$$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,$$

$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

习惯上，我们称上述关系式为坐标变换公式. 容易看出，上述坐标变换公式完全由式中的系数及其排列顺序所确定. 于是，我们可将上述坐标变换公式中的系数按其顺序简记为数表：

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

定义 1　形如

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的数表称为二阶矩阵. 它由二行二列组成，也称之为二阶方阵. 其中 a，b，c，d 称为这个矩阵的元素.

通常，用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…来表示二阶矩阵.

注：除非特别声明，本书中的数都是实数.

思考与讨论

在现实生活中，同学们还能找到哪些问题可以用二阶矩阵来表示？

二阶矩阵的元素是否可以为0？当例1中的旋转角为90°、180°或360°时，对应的二阶矩阵分别是什么？

需要明确两个二阶矩阵相等的充要条件是：它们的对应元素都相等.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a=e，b=f，c=g，d=h.$$

元素全为0的二阶矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{0}$.

定义 2　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}，\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}，$$

则矩阵 $\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\lambda$ 为一常数，则 $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$ 称为数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$.

练习

1. 在平面直角坐标系中，把点 $A(x，y)$ 沿逆时针方针旋转45°得到点 $A'(x'，y')$. 求两点 A 与 A' 的坐标之间的关系式，并用二阶矩阵表示.
2. 写出下列二阶矩阵所表示的坐标变换公式：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　(4) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.2 二阶矩阵与平面向量的乘法

在现代数学中，矩阵已经成为很多研究领域的基本工具. 本节我们将通过对具体实例的分析，引入二阶矩阵与平面向量乘法的定义，学习二阶矩阵表示的平面变换（称为矩阵变换），并讨论几种基本的矩阵变换.

1.2.1 二阶矩阵与平面向量的乘法

1. 平面向量的表示

同学们知道，平面向量就是平面中的一条有向线段. 当我们把平面向量的始点都放到坐标原点时，向量就与它们的终点形成了一一对应，从而也和终点的坐标形成了一一对应. 于是，平面向量可以用有序数对来表示（类似于数轴上的点可以用数来表示）.

如图 1-2 所示，给定平面向量$\overrightarrow{OP}$，则有序数对(a_1, a_2)表示终点 P 的坐标. 为便于区别，我们用有序数对 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 表示向量$\overrightarrow{OP}$.

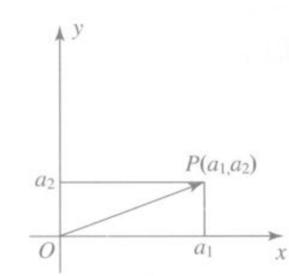


图 1-2

定义 形如$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$的有序数对称为列向量.

回顾数学 4 中关于平面向量加法、减法以及数乘向量运算的定义，我们可以很自然地给出列向量的运算规则. *

定义 设 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 是两个列向量，λ 是一个数，则 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{bmatrix}$，$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{bmatrix}$.

思考与讨论

比较二阶矩阵、列向量以及点的坐标，看看它们有哪些共同点与不同点.

2. 二阶矩阵与平面向量的乘法

在 1.1 的例 1 中，我们看到坐标变换公式

* 事实上，平面向量与列向量可以互相表示，并且平面向量的运算与列向量的运算相互对应.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} \tag{1}$$

可以用二阶矩阵$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$来表示．如果我们把点用列向量来表示，则二阶矩阵$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$就把列向量$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$变成了列向量$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

类似于函数的记法，我们把上述关系写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2}$$

显然，(2) 式只是利用二阶矩阵表达 (1) 式的另一种形式，由于列向量$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$要依 (1) 式通过计算来确定．因此，我们定义一种新的运算如下：

定义 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{bmatrix}$称为二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面向量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}$.

这就是说，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面列向量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积是一个平面列向量，它的第一个元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与 $\boldsymbol{X}$ 中对应元素乘积的和，第二个元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{X}$ 中对应元素乘积的和.

例 1 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AX}$.

解：
$$\begin{aligned} \boldsymbol{AX} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3\times 2+0\times(-6) \\ -1\times 2+4\times(-6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ -26 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例 2 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AX}$ 和 $\boldsymbol{AY}$.

解：$AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，

$AY=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

思考与讨论

已知二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1\\ x+3y=-6\end{cases}$$

把它表示成由二阶矩阵和列向量组成的等式.

根据二阶矩阵与平面向量乘法的定义，容易证明下面的性质.

性质　设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，$\lambda$ 是一个常数，则

$$A(X+Y)=AX+AY,$$
$$A(\lambda X)=\lambda(AX).$$

练习

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}$，求 AX.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 7 & -5\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$，求 $A(X+Y)$.

1.2.2　矩阵变换

1. 矩阵变换的定义

从前面的讨论可以看到，一个二阶矩阵完全确定平面内的一个坐标变换. 因此，二阶矩阵可以用来表示平面变换. 然而，就像并不是所有的函数都有解析式一样，很多平面变换不能用二阶矩阵表示. 事实上，二阶矩阵所表示的变换只是所有平面变换中最简单、最基本的一类.

定义　给定一个二阶矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 表示平面上的一个变换. 习

惯上，我们把$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$称为一个二阶矩阵变换，简称矩阵变换．把$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$称为$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$的象，把$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$称为$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$的原象.

为了方便，我们常用$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$等表示矩阵变换，其中$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$是二阶矩阵.

例 1　已知$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$，求下列各点在矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$下的象：

$$(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1).$$

解：向量$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$在变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$下的象，分别是

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}.$$

于是，所求三点在矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$下的象分别为$(0,\ 0)$，$\left(0,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$和$\left(0,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，如图 1-3 所示.

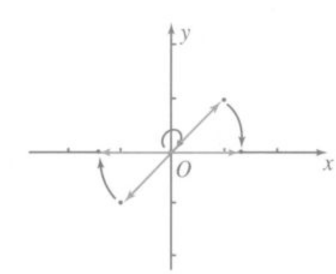


图 1-3

例 2　已知矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，求以下列向量的象：

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}.$$

解：$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{AX}_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{AX}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{Y}_3=\boldsymbol{AX}_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

从例 1、例 2 可以看出，矩阵变换把平面内的向量变成平面内的向量.

思考与讨论

对于一个给定的矩阵变换，是否每一个点都有原象？

2. 矩阵变换的性质

性质 1 矩阵变换把零向量变成零向量.

证明：设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

性质 2 矩阵变换保持向量的线性运算. 即，若 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是两个列向量，λ 是一个常数，则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta},\ \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha}).$$

证明：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}s+u\\ t+v\end{pmatrix},\ \lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\lambda s\\ \lambda t\end{pmatrix}.$$

直接计算可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}a(s+u)+b(t+v)\\ c(s+u)+d(t+v)\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}as+bt\\ cs+dt\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A\beta}=\begin{pmatrix}au+bv\\ cu+dv\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}\lambda as+\lambda bt\\ \lambda cs+\lambda dt\end{pmatrix}.$$

于是，可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta}$，$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})$.

推论 设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是两个列向量，λ_1，λ_2 是两个数，则有

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1(\boldsymbol{A\alpha})+\lambda_2(\boldsymbol{A\beta}).$$

我们知道，当把平面向量的始点都放在坐标原点时，点与向量之间就形成了一一对应. 如图 1-4 所示，直线 l 由 A，B 两点所确定，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是分别与点 A，B 相对应的列向量. 若设 P 为直线 l 上任意一点，且与其相对应的向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，则由于 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线，从而

存在数t* 使得$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，即

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

于是，　$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}=t(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$，

即　　$\boldsymbol{\gamma}=(1-t)\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$.

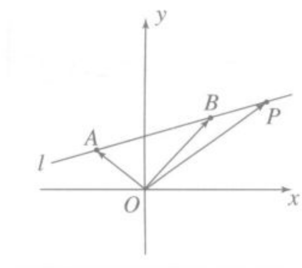


图 1-4

这就是直线 l 的向量参数方程.

设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是一个矩阵变换，根据上面的推论可知，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=(1-t)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})+t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}),$$

即　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$.

于是，当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 对应的点不相同时，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}$ 在由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$ 对应的点所确定的直线上. 因此，我们有下面的结论：

性质 3　矩阵变换把平面内的直线变成直线（或退化为一个点）.

思考与讨论

矩阵变换把平面内的线段变成什么图形？

例 3　已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$. 如图 1-5，直线 l_1 的向量参数方程为

$$\boldsymbol{\gamma}=(1-t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

若矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 把直线 l_1 变成直线 l_2，求直线 l_2 的向量参数方程.

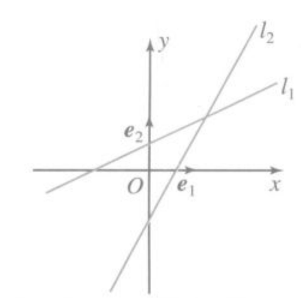


图 1-5

解：因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=(1-t)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+t\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=(1-t)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix},$$

所以直线 l_2 的向量参数方程为

$$\boldsymbol{\delta}=(1-t)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}.$$

* 容易看出，点 P 在线段 AB 上当且仅当 $0\leqslant t\leqslant 1$.

练习

1. 已知二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$，求直线 $\gamma=(1-t)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象.

2. 已知二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$，求直线 $\gamma=(1-t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ 经矩阵变换 $Y=AX$ 后所得直线的向量参数方程.

1.2.3　几类特殊的矩阵变换

前面我们通过学习矩阵变换的基本性质，对矩阵变换有了一个初步的认识. 接下来我们将通过具体的平面图形的变换来研究几种特殊的矩阵变换，以进一步加深对矩阵变换的认识.

1. 恒等变换

例 1　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\triangle LMN$ 如图 1-6 所示，求这个三角形在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象.

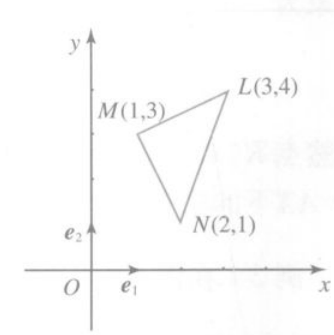


图 1-6

解：首先，考虑$\triangle LMN$ 的三个顶点在矩阵变换下的象.

因为

$$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},$$

所以三个顶点 L、M、N 在矩阵变换 $Y=AX$ 下保持不变.

其次，考虑$\triangle LMN$ 的三条边在矩阵变换下的象. 受上面计算的启发，对于平面上任意一点$(x_0，y_0)$，我们有

$$A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},$$

因此，平面上任意一点在矩阵变换下都保持不变. 从而，三条边 LM、MN、NL 在矩阵变换 $Y=AX$ 下不变.

综上所述，$\triangle LMN$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下保持不变.

事实上，能使平面上任一点都保持不变的矩阵变换，叫做平面上的恒等变换. 例 1 中的矩阵变换就是平面上的恒等变换.

因此，恒等变换可以用矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 来表示.

2. 反射变换

例 2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，线段 PQ 如图 1-7 所示，求线段 PQ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

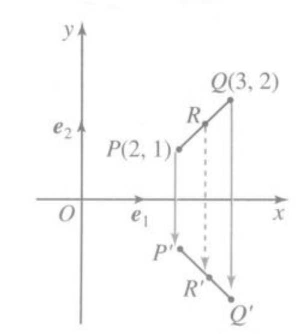


图 1-7

解：首先，可求出 P、Q 两点对应的列向量在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$下的象.

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

可见，P、Q 两点在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 P'、Q'分别与它们关于x 轴对称，如图 1-7 所示.

其次，设 $R(x_0，y_0)$ 为线段 PQ 上任一点，则它对应的列向量在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\end{pmatrix}.$$

显然点 $R(x_0，y_0)$与点 $R'(x_0，-y_0)$关于 x 轴对称. 这说明，线段 PQ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$下的象 $P'Q'$关于 x 轴对称.

例 3　在例 2 中，把二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 换成$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，求线段 PQ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

解：首先，求出 P、Q 两点对应的列向量在矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

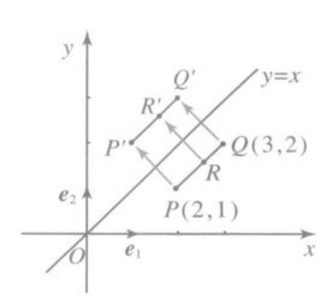


图 1-8

可见，P、Q 两点与它们在矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 $P'Q'$分别关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-8 所示.

又设 $R(x_0，y_0)$ 为线段 PQ 上任意一点，则有

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\x_0\end{pmatrix}.$$

于是，点 R 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 R' 关于直线 $y=x$ 对称. 因此，线段 PQ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 $P'Q'$ 关于直线 $y=x$ 对称.

思考与讨论

在例 2、例 3 中，设 $G(x, y)$ 为平面内任意一点，分别求出它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

事实上，能使平面上任一点变成关于直线轴对称的点的矩阵变换，叫做反射变换.

从上面的两个例子可以看出，关于 x 轴的反射变换和关于直线 $y=x$ 的反射变换分别可以用二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 表示.

3. 伸压变换

例 4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$，$k>0$，$k\neq 1$，求▱$EFGH$（如图 1-9（$a$）所示）在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

解：设点 $P(x_0, y_0)$ 为▱$EFGH$ 上任意一点，则它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 P' 所对应的向量为

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_0\\ ky_0\end{bmatrix}.$$

这说明，点 P' 的两个坐标分别是点 P 的两个坐标的 k 倍. 于是，可得▱$EFGH$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为▱$E'F'G'H'$（如图 1-9（b）（c）所示）.

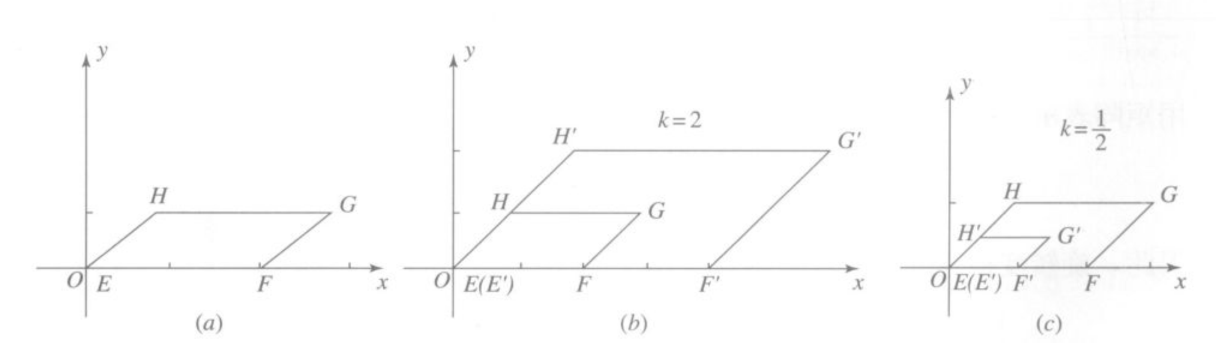


图 1-9

容易看出，▱$EFGH$ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的象▱$E'F'G'H'$ 相似，并且相似比为 k.