杨小凯

杨小凯学术文库

Academic Library of
Xiaokai Yang

# 经济控制理论



杨小凯 著

*Economic Cybernetics*

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)



杨小凯学术文库

Academic Library of
Xiaokai Yang

# 经济控制理论

杨小凯 著

*Economic Cybernetics*

社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

图书在版编目(CIP)数据

经济控制理论 / 杨小凯著. --北京：社会科学文献出版社，2018.5
（杨小凯学术文库）
ISBN 978-7-5201-2591-8

Ⅰ.①经… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①经济控制论 Ⅳ.①F224.11

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第074357号

·杨小凯学术文库·
经济控制理论

著　　者 / 杨小凯

出 版 人 / 谢寿光
项目统筹 / 邓泳红
责任编辑 / 宋　静　伍业君

出　　版 / 社会科学文献出版社·皮书出版分社（010）59367127
地址：北京市北三环中路甲29号院华龙大厦　邮编：100029
网址：www.ssap.com.cn
发　　行 / 市场营销中心（010）59367081　59367090
读者服务中心（010）59367028
印　　装 / 北京盛通印刷股份有限公司

规　　格 / 开 本：787mm×1092mm　1/16
印 张：12　字 数：200千字
版　　次 / 2018年5月第1版　2018年5月第1次印刷
书　　号 / ISBN 978-7-5201-2591-8
定　　价 / 2980.00元（全九册）

本书如有破损、缺页、装订错误，请与本社读者服务中心联系更换

版权所有 翻印必究

# 再版说明

杨小凯教授是经济学大家。他用现代分析工具复活古老的分工与专业化思想，在此基础上建立新兴古典经济学体系，做出了开创性学术贡献。他生前成果丰硕，出版了多部中英文学术著作。这些著作学术价值独特，但现在大多数著作或已售罄，或分散在不同出版社，给读者阅读带来不便。

社会科学文献出版社将这些著作汇聚成一套学术文库出版，方便读者从中了解其学术思想。这套文库包括9本专著和教程，较全面地反映了他的学术体系。其中，《基于专业化递增报酬的分工理论》是其在普林斯顿大学博士学位论文的中译本，系首次正式出版。《经济控制论初步》《数理经济学基础》《经济控制理论》这三本著作，则是他早年在国内时的著作。为反映其学术思想发展轨迹，一并将其收入文库。

杨小凯教授著作既有新颖深刻的学术思想，读来又十分有趣。这些专著中的学术思想，大都是以规范的学术写作方式呈现。文库大量使用数学工具，对编辑工作是一个很大的挑战。书中部分数学模型出现的包括输入打印在内的错误一定难免，这些需要认真推演其模型才会发现，希望读者海涵。

相信这套学术文库的出版，对于推动中国学术繁荣有积极意义。

编　者

二〇一八年四月

# 序

控制理论产生于20世纪30年代，它主要是一种动态最优化的数学理论。多年来的文献积累使控制理论已经相当成熟，不论在理论上还是在应用上，控制理论（Control Theory）比控制论（Cybernetics）都要成熟得多。20世纪60年代以来，数理经济学与经济计量学不但研究静态和比较静态的最优经济效果及均衡问题，而且发展到研究大规模随机经济系统的动态最优化问题。数理经济学家和经济计量学家自然而然地开始采用控制理论的理论和方法。这方面最杰出的代表就是美国普林斯顿经济计量研究中心主任邹至庄教授的工作，他创立了一个用现代控制理论对动态经济系统进行分析和控制的理论体系（Chow，1975．1981）。另外，20世纪60年代末，由于财力上的限制，航天领域对控制理论专家失去吸引力，而新起的一代知识青年要求用现代科学来解决社会经济问题，他们认为控制我们周围的经济环境比控制飞船和导弹的意义要重大得多。因此，有一批控制理论专家转到经济研究领域，他们马上发觉经济领域对控制理论来说是个最有前途的方向。他们对控制理论在经济中的应用进行了大量文献积累工作，这方面的杰出代表是控制理论专家柏沙森（Bensoussan A.，1974、1975）。由于这两部分人的努力，经济控制理论的国际学术会议已开过多次，文献积累也达到多不胜数的地步，应用也取得了若干进展。因此，我认为将经济控制理论作为一门初步形成的边缘学科介绍给国内读者的条件已逐渐成熟。我认为一门新的科学要形成公认的独立学科，需要千万人多年的文献积累，需要社会化分工协作研究的漫长过程。每人证明一个定理，每人解决一两个问题，通过文献积累就能逐步形成完整的学科体系。在经济控制理论领域、数理经济学和经济计量学领域，中国在1949－1977年基本上有20多年的空白，要填补这个空白也不

是几年时间内能办得到的。我希望这本小书能在填补这个空白上做出点贡献。

此书综合了柏沙森从控制理论角度发展经济控制理论和邹至庄从经济计量学角度发展经济控制理论这两种不同的色彩。为便于研究经济的同志用较少时间循序渐进地掌握现代控制理论的主要内容，此书用相当的篇幅较系统地介绍了现代控制理论的基本知识。

但是笔者认为对中国来说，经济控制理论不但能用来制订计划，对经济进行宏观水平和微观水平的管理，而且也是研究经济体制功能的有力工具，能为经济体制改革提供理论基础。所以本书用专章讨论信息论在经济体制分析上的应用，这方面的内容是国外同类书籍中所没有的。希望这方面的讨论能起到抛砖引玉的作用，并改变人们认为“控制理论是纯技术手段，对体制改革的定性分析无能为力”的成见。

茅于轼同志曾对本书初稿提出宝贵意见，在此谨致谢意。

杨小凯

# 目　录


第 1 章　经济系统 …… 1

1.1　经济耦合 …… 1

1.2　经济反馈 …… 7

1.3　稳定性 …… 10

1.4　状态空间描述 …… 15

1.5　离散经济系统的状态空间表达式 …… 21

1.6　状态方程的规范形式及自由运动 …… 25

1.7　相图 …… 32

第 2 章　经济信息 …… 39

2.1　信息和熵 …… 39

2.2　自由度、剩余度和信息效率 …… 40

2.3　编码 …… 42

2.4　经济信息传输 …… 43

2.5　大系统经济信息传输效率和可选择并联耦合 …… 45

2.6　经济控制的能力 …… 49

第 3 章　变分法和最大值原理 …… 53

3.1　问题的提出 …… 53

3.2　基本的数学概念 …… 56

3.3　泛函取极值的必要条件：欧拉方程 …… 60

3.4　端点条件 …… 69

3.5　约束条件 …… 79

3.6 最大值原理 …… 83
3.7 最大值原理之端点条件 …… 88
3.8 控制问题的约束条件 …… 91
3.9 离散型最大值原理 …… 95

**第 4 章 经济管理中的最优控制问题** …… 97
4.1 最优经济增长和最优积累率 …… 97
4.2 最优库存控制 …… 106
4.3 最优设备更新和维修计划 …… 116
4.4 最优销售计划 …… 122
4.5 最优销售、研究计划和最优产品寿命 …… 129

**第 5 章 随机经济控制** …… 138
5.1 经济系统的能控性与能观性 …… 138
5.2 随机经济系统 …… 142
5.3 滤波理论 …… 148
5.4 动态规划与随机最优经济控制 …… 156
5.5 二次线性问题和必然等价原理 …… 162

**附录 A 函数取极大（小）值的充分条件** …… 168

**附录 B 极大化之 Kuhn-Tucker 条件** …… 171

**参考文献** …… 174

# 第1章　经济系统

## 1.1　经济耦合

**经济耦合是指各经济因素或子系统之间的因果关系链。**最常见的经济耦合就是分工协作造成的投入产出关系。对一个没有分工协作的自给自足社会来说，各个子系统之间互相独立，没有联系。这种经济系统叫作相对独立系统，如图 1－1 所示，图中有三个独立的子系统 $A$，$B$，$C$，分别表示三个自给自足的家庭，$x_1$，$x_2$，$x_3$ 分别表示三个家庭对自然界的劳动输出，而 $y_1$，$y_2$，$y_3$ 分别表示三个家庭从自然界得到的收获（输入）。一般而言，**输出是系统对外界的作用，而输入是外界对系统的作用。**严格地说，图 1－1 中的三个家庭与自然界之间有一定的耦合关系，它表现为输入输出之间的某种因果关系，其中 $S_i$ 将输入 $y_i$ 变换成输出 $x_i$，而 $R_i$ 将输出变换成反馈输入。但是三个家庭互相之间是独立的，没有耦合。

图 1－2 中三个分工协作的人，$A$ 为专门生产粮食的农民，$B$ 为专门生产纺织品的手工业者，$C$ 为专门生产肉食的牧民。$x_1$，$x_2$，$x_3$ 分别为粮食、布匹和肉食的产量。图 1－2 叫**信号流图**，其中 $A$，$B$，$C$ 三点叫结点，结点标有变量 $x_1$，$x_2$，$x_3$；$a_{ij}$ 叫传输系数。图中的网络是下列联立方程组之拓扑图形：

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1.1}$$

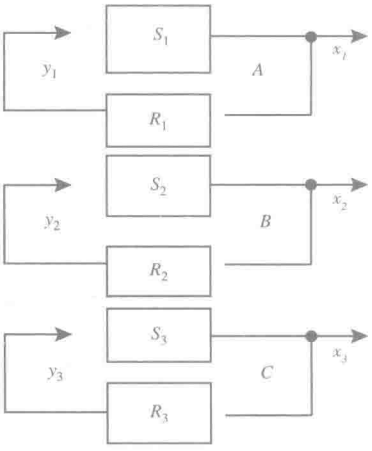



图 1-1

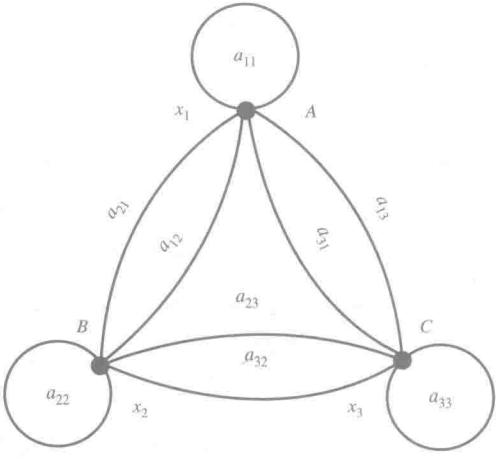



图 1-2

易知，这就是封闭的投入产出模型，可见投入产出关系正是分工协作造成的输入、输出耦合关系，这种耦合网络可以用图 1-3 中等价的**方框图**表示。图中 $x_{11}=a_{11}x_1$，$x_{12}=a_{12}x_2$，$x_{13}=a_{13}x_3$；$x_{21}=a_{21}x_1$，$x_{22}=a_{22}x_2$，$x_{23}=a_{23}x_3$；$x_{31}=a_{31}x_1$，$x_{32}=a_{32}x_2$，$x_{33}=a_{33}x_3$。而 $A$，$B$，$C$ 的传输系数都是 1。式（1.1）、图 1-2、图 1-3 这三个系统之间可以用一一对应的变换将一个系统化为另一个系统，这在控制论中叫作**同构**。

如果我们有二次收益函数

$$R = px = p(ap + b) = ap^2 + bp, \quad a < 0, b > 0 \tag{1.2}$$

其中 $x = ap + b$ 为线性需求函数，于是边际收益为

$$\frac{dR}{dp} = 2ap + b \tag{1.3}$$

它与物理中的匀加速（或减速）运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2a't + b' \tag{1.4}$$

就是完全同构的。我们只要用一一对应的变换，令总收益 $R$ 等于距离 $S$，令价格 $p$ 等于时间 $t$，且 $a = a'$，$b = b'$，则式（1.3）就能变换成式（1.4）。对于同构的系统，我们可以在一个系统中**模拟**另一个系统。

耦合分为串联耦合、并联耦合，以及开环耦合、闭环耦合（反馈耦合）。

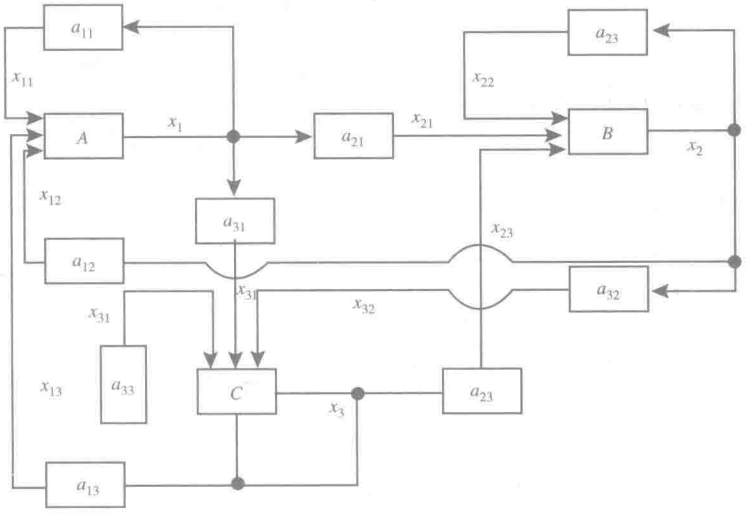



**图 1－3**

从图 1－4 的方框图和信号流图可知，系统的初始输入为 $x_1$，第一个子系统之传输系数为 $S_1$，它的输出 $x_2 = S_1x_1$ 就是第二个子系统的输入，**一个系统之输出是与之耦合的系统之输入**，这就是**串联耦合**。从图中不难看出，最终输出 $x_3 = S_2x_2$，将 $x_2 = S_1x_1$ 代入，则

$$x_3 = S_2x_2 = S_2S_1x_1 \tag{1.5}$$

**即串联耦合系统的总传输系数等于子系统传输系数之积。**

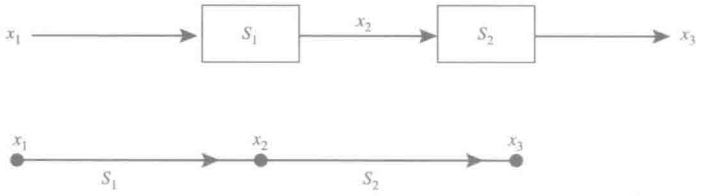



图 1－4

图 1－5 中的方框图和等价的信号流图，**两个子系统将输入 $x$ 变换成两个并行的输出** $y_1$、$y_2$，这就叫**并联耦合**，从图中可以看出：

$$\begin{aligned} y_1 &= S_1 x \\ y_2 &= S_2 x \\ y &= y_1 + y_2 \\ &= S_1 x + S_2 x \\ &= (S_1 + S_2) x \end{aligned} \tag{1.6}$$

即**并联耦合系统之总传输系数等于子系统传输系数之和。**

回顾式（1.1），图 1－2，图 1－3，不难看出分工协作的投入产出系统正是既有串联耦合又有并联耦合的系统。式（1.1）中的多项求和正显含并联耦合。对于此式我们还可以进行无穷次迭代，例如将（1.1）的三式代入（1.1）中第一式的 $x_1$，$x_2$，$x_3$，则有

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ &= a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + a_{13}(a_{31}x_1 + \\ &\quad a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ &= a_{11}a_{11}x_1 + a_{11}a_{12}x_2 + a_{11}a_{13}x_3 + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}a_{23}x_3 + a_{13}a_{31}x_1 + \\ &\quad a_{13}a_{32}x_2 + a_{13}a_{33}x_3 \\ &= (a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})x_1 + (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32})x_2 + (a_{11}a_{13} + \\ &\quad a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33})x_3 \end{aligned}$$

从以上推导的结果不难看出系数乘积反映了串联耦合，系数求和反映了并联耦合。在图 1－2 和 1－3 中我们不断重复子系统相互之间的投入产出关系，很容易对照上式理解这种既有串联耦合又有并联耦合的特点。

图 1－4 和图 1－5 中的耦合叫作**开环耦合**，而图 1－2，图 1－3 中 $A$ 之输出 $x_1$，通过**反馈传输系数** $a_{11}$ 变换成 $A$ 之输入 $x_{11} = a_{11}x_1$，这种把**输出变换成输入馈回系统的耦合叫反馈耦合，即闭环耦合。**

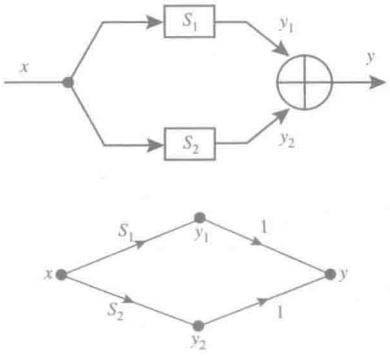



图 1 – 5

设我们有下列开放型投入产出系统，其拓扑图形如图 1 – 6 所示。

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2 &= y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3 &= y_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1.7}$$

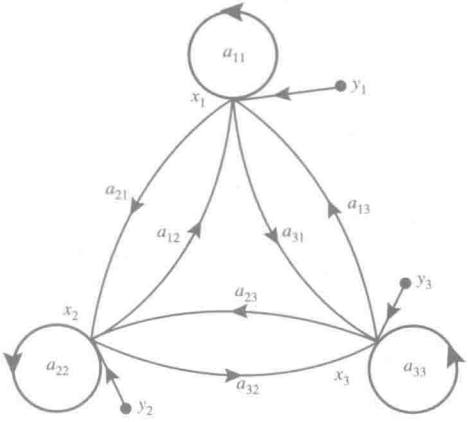



图 1 – 6

上式可写成矩阵形式　　$X = Y + AX$　　(1.8)

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

从式（1.8）可解得

$$X = \frac{1}{I - A}Y = (I - A)^{-1}Y \tag{1.9}$$

相应于式（1.8）和式（1.9）之信号流图如图 1－7 所示。这就是反馈耦合，图中的系统将输出 X 通过反馈传输系数 A 变换成输入。而式（1.9）就是反馈系统的基本公式。$(I-A)^{-1}$为**反馈因子**，它就是著名的列昂节夫逆阵。

式（1.9）可展开成无穷级数

$$X = (I - A)^{-1}Y = (I + A + A^2 + \cdots)Y \tag{1.10}$$

其中 $A^2 = AA$，$A^3 = AAA$，…，这些传输系数之乘积反映了串联耦合的特点，而无穷级数反映了反馈耦合的特点，它说明了闭环回路中输入输出的无穷次交互影响。将矩阵与矢量的乘积展开后，又可从求和式中看出并联耦合的特点。我国过去采用的计划平衡重复法就是用无穷级数的第一二项近似值。可见投入产出分析的重大意义在于它反映了分工协作的经济系统中串联耦合、并联耦合和反馈耦合的错综复杂网络关系。

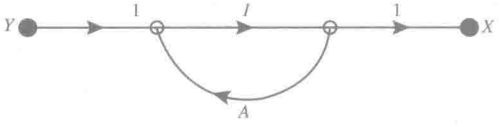



图 1－7

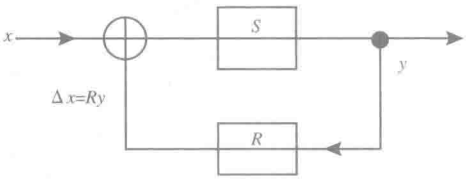



图 1－8

一般而言，设输入为 $x$，输出为 $y$，**被调节系统的传输系数**为 $S$，**反馈传输系数**为 $R$，则反馈输入

$$\Delta x = Ry \tag{1.11}$$

总输出 $y$ 为初始输入 $x$ 和反馈输入 $\Delta x$ 之和乘上传输系数 $S$：

$$y = S(x + \Delta x) \tag{1.12}$$

将式（1.11）代入，则

$$y = Sx + SRy$$

$$y = \frac{S}{1 - SR}x \tag{1.13}$$

这就是一般的反馈调节公式（见图 1－8），反馈因子为 $\frac{S}{1 - SR}$，而 $\frac{y}{x} = \frac{S}{1 - SR}$ 为**调节系统之传输系数**，式（1.13）就是经典控制论中的传递函数。

反馈耦合的另一个例子是凯恩斯乘数原理。设国民收入为 $Y$，消费为 $C$，投资为 $I$，则

$$Y = C + I \tag{1.14}$$

又设消费函数为

$$C = cY \tag{1.15}$$

其中 $c$ 为消费倾向，它满足 $0 < c < 1$。将式（1.15）代入式（1.14），则

$$Y = cY + I$$

$$Y = \frac{1}{1 - c}I \tag{1.16}$$

$\frac{1}{1 - c}$ 就是反馈因子，它就是著名的凯恩斯乘数。相应的方框图如图1－9。

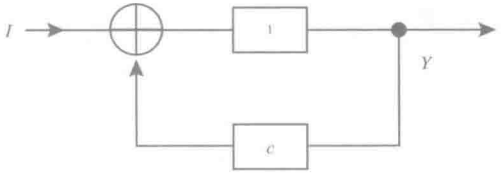


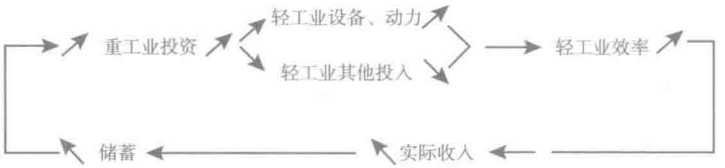

图 1－9

在经济分析中，我们常常假设系统内部结构为未知的“黑箱”，而只研究输出对输入的反应，通过这种研究来了解系统特性，是谓“**黑箱原理**”。宏观经济学中的总量分析就大量运用了这一原理。

## 1.2　经济反馈

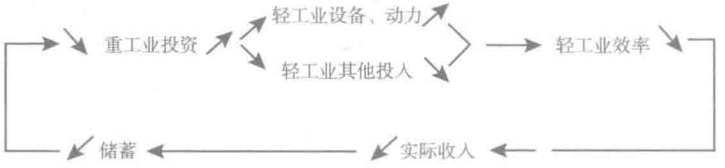
经济反馈分为**正反馈**和**负反馈**。若**系统输出与反馈输入符号相同，则**

**为正反馈**，若**系统输出与反馈输入符号相反**，则为**负反馈**。我们用下列动态图描述反馈特性。

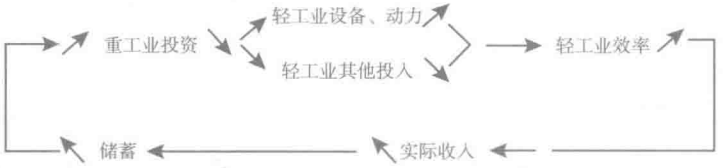



这个动态图描述了重工业投资效果很好时，轻工业与重工业之间的耦合。如果重工业投资增多，一方面轻工业设备、动力增多，另一方面由于资金有限，轻工业的其他投入下降。若投资效果很好，则前一种影响大于后一种影响，因此两个并联的总输出为正，使轻工业效率上升，人民实际收入增加，又使储蓄上升，反过来使重工业投资来源增多。这就是轻重工业之间的良性循环，它是经济起飞的原因之一。良性循环、“起飞”，这就是正反馈，即动态图中“重工业投资”两边的箭头方向相同。初始输入符号为正（动态图中箭头向上）的正反馈叫**正向正反馈**，若初始输入符号为负（动态图中箭头向下）的正反馈叫**负向正反馈**，负向正反馈就是恶性循环。

如果重工业投资效果不好，则有下列动态图：




也就是说投资效果差时，重工业投资增加对轻工业的坏影响大于使轻工业设备、动力增加的好影响，于是使轻工业效率下降，实际收入下降，重工业投资来源也减少，因此动态图中“重工业投资”两边的箭头相反，即系统处于一种负反馈的停滞状态，重工业投资上去了又会掉下来。重工业



投资减少时，又会形成另一个动态图：这个动态图与前一个动态图的差别是所有箭头方向掉了头，其后果又会使重工业投资升上来，这就是左右摇摆的**振荡**，如果这种振荡是收敛的，则重工业投资停滞在一定水平上，不能实现良性循环和经济起飞。

在一般工程控制中正反馈是坏事，稳定性负反馈才是好事；而经济控制中，很多正向正反馈是人们所希望的，而某些停滞性负反馈却是人们企图避免的。另外，经济系统中有大量非线性元件，可以将负反馈变成正反馈，或把正反馈变成负反馈，例如重工业投资效果就是这类参数，投资效果提高，就可以将负反馈变成正反馈。

下面我们用方框图来描述正反馈与负反馈的差别。图 1－10 中的实线部分是没有专利制度时科技发明活动中，发明人与使用人之间的耦合。加上虚线部分后，就是在专利制度调节下科技发明活动中的耦合。图中的 $S$ 为从事科技发明的人将科技发明的总输入（收入与费用之代数和）变换成科技发明成果（输出）$X$ 之传输系数。在没有专利制度时，科技发明对于发明人的直接收益，即发明人使用这一成果的直接好处（例如发明电的人使用电得到的好处）一般来说是相对较小的，这一正反馈通过反馈传输系数 $R_2$ 将输出 $X$ 变换成正的反馈输入 $y_2$。科技发明往往要付出巨大代价，这种负反馈通过反馈传输系数 $R_1$ 将输出 $X$ 变换成负的输入 $-y_1$。科技发明传给他人后，创造的收益通过反馈传输系数 $\alpha r_i$（这时 $\alpha=1$）变成使用这种技术的各个单位之收益，而没有反馈到发明人那里，因此发明人与使用人之间为开环回路。这时发明人的输入为 $-y_1$ 与 $y_2$ 之代数和，由于 $y_1 \gg y_2$，所以 $-y_1+y_2<0$。也就是说在没有专利制度时，科技发明是种负反馈系统。若输出 $X>0$，则输入 $-y_1+y_2<0$；若 $X<0$，则 $-y_1=-R_1X>0$，$y_2=R_2X<0$，即 $-y_1+y_2>0$。这种反馈振荡的结果，使输出 $X$ 保持在一定水平，这就表现为科技水平的停滞。如果实行专利制度，使用专利的人产生的收益为 $r_ix_i$（$i=1$，…，$n$），其中一部分由使用人得到，其比例为 $\alpha$（$0<\alpha<1$），另一部分由发明人得到，其比例为 $\beta$（$\beta=1-\alpha$）。所以发明人得到的正收益就不仅有 $y_2$，还有

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\beta r_i x_i$$

一般 $Y \gg y_1$，所以总输入 $Y-y_1+y_2>0$，系统为闭环的正反馈，输出