"十三五"全国高等医学院校本科规划教材

供基础、临床、护理、预防、
口腔、中医、药学、医学技术类等专业用

医用高等数学

Medical Advanced Mathematics

·第2版·

主编 李 霞 彭继世

北京大学医学出版社

"十三五"全国高等医学院校本科规划教材

供基础、临床、护理、预防、口腔、中医、药学、医学技术类等专业用

医用高等数学

Medical Advanced Mathematics

（第2版）

主　编　李　霞　彭继世

副主编　许超汉　何　兰　原　杰　张云鹏

编　委（按姓名汉语拼音排序）

何　兰（齐齐哈尔医学院）
姜　伟（南京航空航天大学）
李　静（福建医科大学）
李　霞（哈尔滨医科大学）
李冬果（首都医科大学）
刘　琳（滨州医学院）
彭继世（贵州医科大学）
宋运娜（齐齐哈尔医学院）
滕　辉（齐齐哈尔医学院）
王　理（哈尔滨医科大学）
王世缘（哈尔滨医科大学）
王书元（哈尔滨医科大学）
徐　娟（哈尔滨医科大学）
许超汉（哈尔滨医科大学）
原　杰（哈尔滨医科大学）
张云鹏（哈尔滨医科大学）
赵红颖（哈尔滨医科大学）

秘　书　白　静（哈尔滨医科大学）

北京大学医学出版社

YIYONG GAODENG SHUXUE

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学 / 李霞，彭继世主编．—2 版．
—北京：北京大学医学出版社，2018. 10
ISBN 978-7-5659-1855-1

Ⅰ．①医…　Ⅱ．①李…　②彭…　Ⅲ．①医用数学 - 医学院校 - 教材　Ⅳ．① R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 210610 号

医用高等数学（第 2 版）

主　　编：李　霞　彭继世
出版发行：北京大学医学出版社
地　　址：（100191）北京市海淀区学院路 38 号　北京大学医学部院内
电　　话：发行部 010-82802230；图书邮购 010-82802495
网　　址：http：//www.pumpress.com.cn
E-mail：booksale@bjmu.edu.cn
印　　刷：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：新华书店
责任编辑：罗德刚　　责任校对：靳新强　　责任印制：李　啸
开　　本：850 mm × 1168 mm　1/16　　印张：16　　字数：461 千字
版　　次：2018 年 10 月第 2 版　2018 年 10 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5659-1855-1
定　　价：35.00 元

修订说明

国务院办公厅颁布《关于深化医教协同进一步推进医学教育改革与发展的意见》、以“5+3”为主体的临床医学人才培养体系改革、教育部本科临床医学专业认证等一系列重要举措，对新时期高等医学教育人才培养提出了新的要求，也为教材建设指明了方向。

北京大学医学出版社出版的临床医学专业本科教材，从2001年开始，历经3轮修订、17年的锤炼，各轮次教材都高比例入选了教育部“十五”“十一五”“十二五”国家级规划教材。为了顺应医教协同和医学教育改革与发展的要求，北京大学医学出版社在教育部、国家卫生健康委员会和中国高等教育学会医学教育专业委员会指导下，经过前期的广泛调研、综合论证，启动了第4轮教材的修订再版。

本轮教材基于学科制课程体系，在院校申报和作者遴选、编写指导思想、临床能力培养、教材体系架构、知识内容更新、数字资源建设等方面做了优化和创新。共启动47种教材，其中包含新增的《基础医学概论》《临床医学概论》《诊断学》《医患沟通艺术》4种。《基础医学概论》和《临床医学概论》虽然主要用于非临床医学类专业学生的学习，但须依托于临床医学的优秀师资才能高质量完成，故一并纳入本轮教材中。《诊断学》与《物理诊断学》《实验诊断学》教材并存，以满足不同院校课程设置差异。第4轮教材修订的主要特点如下：

1．为更好地服务于全国高等院校的医学教育改革，对参与院校和作者的遴选精益求精。教材建设的骨干院校结合了研究型与教学型院校，并注重不同地区的院校代表性；由各学科的委员会主任委员或理事长和知名专家等担纲主编，由教学经验丰富的专家教授担任编委，为教材内容的权威性、院校普适性奠定了坚实基础。

2．以“符合人才培养需求、体现教育改革成果、教材形式新颖创新”为指导思想，以深化岗位胜任力培养为导向，坚持“三基、五性、三特定”原则，密切结合国家执业医师资格考试、全国硕士研究生入学考试大纲。

3．部分教材加入了联系临床的基础科学案例、临床实践应用案例，使教材更贴近基于案例的学习、以问题为导向的学习等启发式和研讨式教学模式，着力提升医学生的临床思维能力和解决临床实际问题的能力；适当加入知识拓展，引导学生自学。

4．为体现教育信息化对医学教育的促进作用，将纸质教材与二维码技术、网络教学平台相结合，教材与微课、案例、习题、知识拓展、图片、临床影像资料等融为一体，实现了以纸质教材为核心、配套数字教学资源的融媒体教材建设。

在本轮教材修订编写时，各院校对教材建设提出了很好的修订建议，为第4轮教材建设的顶层设计和编写理念提供了详实可信的数据储备。第3轮教材的部分主编由于年事已高，此次不再担任主编，但他们对改版工作提出了很多宝贵的意见。前3轮教材的作者为本轮教材的日臻完善打下了坚实的基础。对他们的贡献，我们一并表示衷心的感谢。

尽管本轮教材的编委都是多年工作在教学一线的教师，但囿于现有水平，书中难免有不当之处。欢迎广大师生多提宝贵意见，反馈使用信息，以臻完善教材的内容，提高教材的质量。

“十三五”全国高等医学院校本科规划教材评审委员会

序

国务院办公厅《关于深化医教协同进一步推进医学教育改革与发展的意见》（以下简称《意见》）指出，医教协同推进医学教育改革与发展，加强医学人才培养，是提高医疗卫生服务水平的基础工程，是深化医药卫生体制改革的重要任务，是推进健康中国建设的重要保障。《意见》明确要求加快构建标准化、规范化医学人才培养体系，全面提升人才培养质量。要求夯实 5 年制临床医学教育的基础地位，推动基础与临床融合、临床与预防融合，提升医学生解决临床实际问题的能力，推进信息技术与医学教育融合。从国家高度就推动医学教育改革发展作出了部署、明确了方向。

高质量的医学教材是满足医学教育改革、培养优秀医学人才的核心要素，与医学教育改革相辅相成。北京大学医学出版社出版的临床医学专业本科教材，立足于岗位胜任力的培养，促进自主学习能力建设，成为临床医学专业本科教学的精品教材，为全国高等医学院校教育教学与人才培养工作发挥了重要作用。

在医教协同的大背景下，北京大学医学出版社启动了第 4 轮教材的修订再版工作。全国医学院校一大批活跃在教学一线的专家教授，以无私奉献的敬业精神和严谨治学的科学态度，积极参与到本轮教材的修订和建设工作当中。相信在全国高等医学院校的大力支持下，有广大专家教授的热情奉献，新一轮教材的出版将为我国高等医学院校人才培养质量的提高和医学教育改革的发展发挥积极的推动作用。

柯杨　詹启敏

前 言

当代生物医学技术的飞速发展使得生物医学数据产生了迅猛增长。因此，在基础医学、临床医学、药学和预防医学等研究领域都迫切需要利用数学的方法对这些海量的生物医学数据资源进行研究和分析，这要求现代医学人才应当具有更加扎实的数学理论基础及更高的数学素养。为了适应这种发展需求，北京大学医学出版社组织全国八所高校一线教师和学者共同参与这本《医用高等数学》第 2 版教材的修订和编写工作。

本书共分为九章，主要包括：函数、极限与连续；导数与微分；不定积分；定积分；多元函数微积分；常微分方程基础；线性代数基础和概率论基础。本书可作为高等医学院校中各专业的高等数学教材使用，也可供医学研究人员学习和参考。本书在总结编者多年来的教学经验和教学成果的基础上，注重基础知识和医学实例的紧密结合，通过大量的具体医学问题，使学生能够将相对枯燥的数学理论融入医学应用中。此外，本书在每章中还提供了知识扩展与知识链接，这不仅有助于扩大学生的数学知识面，同时也有利于提高其学习数学的兴趣。最后，本书在第九章中介绍了计算机软件 MATLAB 的基本操作以及前面各章典型例题的求解，希望使学生多掌握一种工具，能够更加方便地实现一些数学方法并应用到实际问题中。这些都体现了本书的科学性、系统性、实用性和先进性的特点。本书可满足 48 ~ 70 学时的医用高等数学课程的教学需要。针对不同医学院校、不同专业的具体情况，教师可适当删减学习内容，以适应教学目标的要求。由于本书增加了计算机软件 MATLAB 的内容，建议在讲授该课程时应适当安排学生的上机实验。

本书在编写过程中，得到了哈尔滨医科大学、首都医科大学、福建医科大学及南京航空航天大学等八所高校的大力支持，在此表示衷心的感谢。

尽管本书作者多年来一直从事医用高等数学的教学与研究，但是限于水平和时间，难免存在不当和错误之处，敬请读者批评指正。

编者

2017 年 12 月

目 录

第1章 函数、极限与连续

案例	糖尿病患者每隔时间 τ 注射一次胰岛素，剂量为 D_0。第 n 次注射后到第 $n+1$ 次注射前的时间里，体内胰岛素含量与时间 t 的关系为 $$D_n(t)=\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}D_0e^{-kt}\ (k>0\ 为常数)。$$ 问题：糖尿病患者体内最终的胰岛素含量 $D(t)$ 与时间 t 的关系式是什么？

函数是高等数学中最基本的研究对象，它刻画的是变量之间的关系。极限刻画的是变量的变化趋势，是深入研究函数的重要方法。用极限方法研究函数是高等数学与初等数学的本质区别。函数与极限的初步知识在中学已经学过，这里仅作必要的复习和补充。本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念、性质及计算。

第一节 函　　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

在某一研究过程中保持不变的量称为**常量**(constant)。在某一研究过程中可以改变的量称为**变量**(variable)。常量通常用字母 a、b、c 表示，变量通常用字母 x、y、z 表示。

一个量是常量还是变量不是绝对的，而是相对的。例如，儿童服药的剂量决定于儿童的体重。如果治疗时间较短，该儿童体重可视为常量。若治疗时间长达数年，其体重就是一个变量。常量可以看作特殊的变量。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。邻域也是常用的一种区间概念。设 x_0 是一定点，δ 是任一正数，则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**(neighbourhood)，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径。点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $U^\circ(x_0,\delta)$，即

$$U^\circ(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}。$$

2. 函数的概念

定义 1-1　设在同一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 所能取的每一个值，按照一定的对应关系，变量 y 总有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(function)，记为 $y=f(x)$。变量 x 称为**自变量**(independent variable)，变量 y 称为**因变量**(dependent variable)。

自变量 x 的所有可以取值的集合，称为函数的**定义域**(domain)，记为 D。因变量 y 的所有对应值的集合，称为函数的**值域**(range)，记为 R。

函数的表示法通常有三种：解析法、列表法和图像法。

例 1-1 在自由落体运动中，设物体下落的高度为 h，物体运动路程 s 和下落的时间 t 之间的函数为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，g 为重力加速度，求函数 s 的定义域。

解 只从解析式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 看，t 可以取全体实数。但考虑到实际意义，应有 $t\geqslant 0$ 且 $0\leqslant s\leqslant h$，当 $s=h$ 时，$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，故函数 s 的定义域为 $\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$。

例 1-2 在恒温条件下，每克蛋白质的药物吸收量 y 与血浆浓度 x 的关系，如表 1-1 所示。

表 1-1 药物吸收量与血浆浓度的函数关系

血浆浓度 x	12.7	21.2	51.7	77.2	212.4	9.5	22.5	42.3	67.8	234.8
药物吸收量 y	0.103	0.466	0.767	1.573	2.462	0.083	0.399	0.899	1.735	2.260

例 1-3 心电图描述了电流活动随时间的变化情况，是时间的函数。虽然可以拟合一个心电图函数的近似公式，但是必要性不大。医生根据心电图的图形诊断更方便，所以这个函数用图像法表示更合适。图 1-1 和图 1-2 分别为正常人和心脏病患者的心电图。

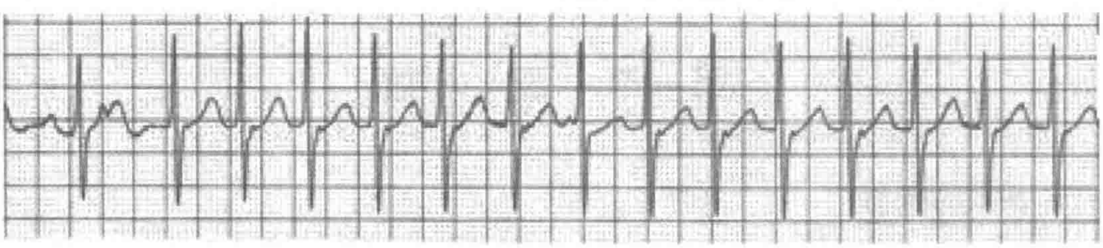

图 1-1 正常人的心电图

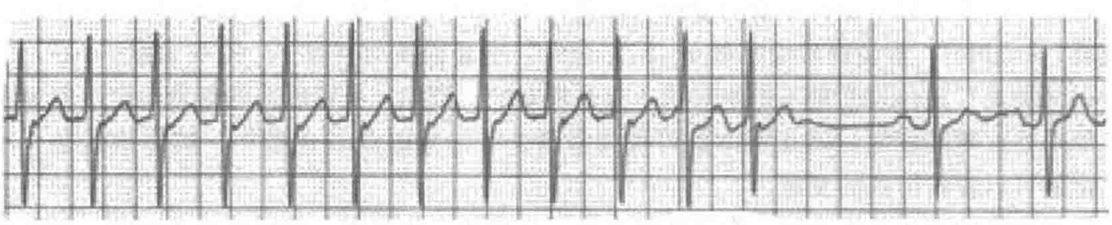

图 1-2 心脏病患者的心电图

二、函数的特性

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subseteq D$。如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**(monotone function)。

2. 函数的奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 定义域 D 内的任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函**

数(even function)。如果对于函数 $f(x)$ 定义域 D 内的任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function)。

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D。如果存在一个正数 T，使得对每一个 $x\in D$，都有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**(periodic function)。正数 T 称为这个函数的周期。满足此关系式的最小正数称为函数的最小正周期，通常所说的周期是指最小正周期。

许多生物节律近似地以 12 小时或 24 小时为周期。心电图曲线也可看作周期函数。

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $X\subseteq D$。如果存在正数 M，使得对一切 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**(bounded)。如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**(unbounded)。

例如，函数 $y=\cos x$ 在 R 上有界。函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无界。函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，在 $(1,+\infty)$ 上有界。

三、初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**(basic elementary function)。

(1) 幂函数：$y=x^{\alpha}$(α 为实数)；

幂函数的共性是在区间 $(0,+\infty)$ 内均有定义，且都过点 $(1,1)$。

(2) 指数函数：$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$；

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$。当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $a<1$ 时，函数单调减少。

(3) 对数函数：$y=\log_{a}x(a>0,a\neq 1)$；

对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $a<1$ 时，函数单调减少。

(4) 三角函数包括以下六个函数：

正弦函数　$y=\sin x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$。它是奇函数，周期函数，周期为 2π（图 1-3a）。

余弦函数　$y=\cos x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$。它是偶函数，周期函数，周期为 2π（图 1-3b）。

正切函数　$y=\tan x$，定义域为 $x\in R$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。它是奇函数，周期函数，周期为 π（图 1-3c）。

余切函数　$y=\cot x$，定义域为 $x\in R$，且 $x\neq k\pi$，$k\in Z$，值域为 $(-\infty,+\infty)$。它是奇函数，周期函数，周期为 π（图 1-3d）。

正割函数　$y=\sec x$。定义域为 $x\in R$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，值域为 $|y|\geqslant 1$。它是偶函数，周期函数，周期为 2π。

余割函数　$y=\csc x$。定义域为 $x\in R$，且 $x\neq k\pi$，$k\in Z$，值域为 $|y|\geqslant 1$。它是奇函数，周期函数，周期为 2π。

根据这些三角函数的定义，还可以得到以下常用三角函数关系式。

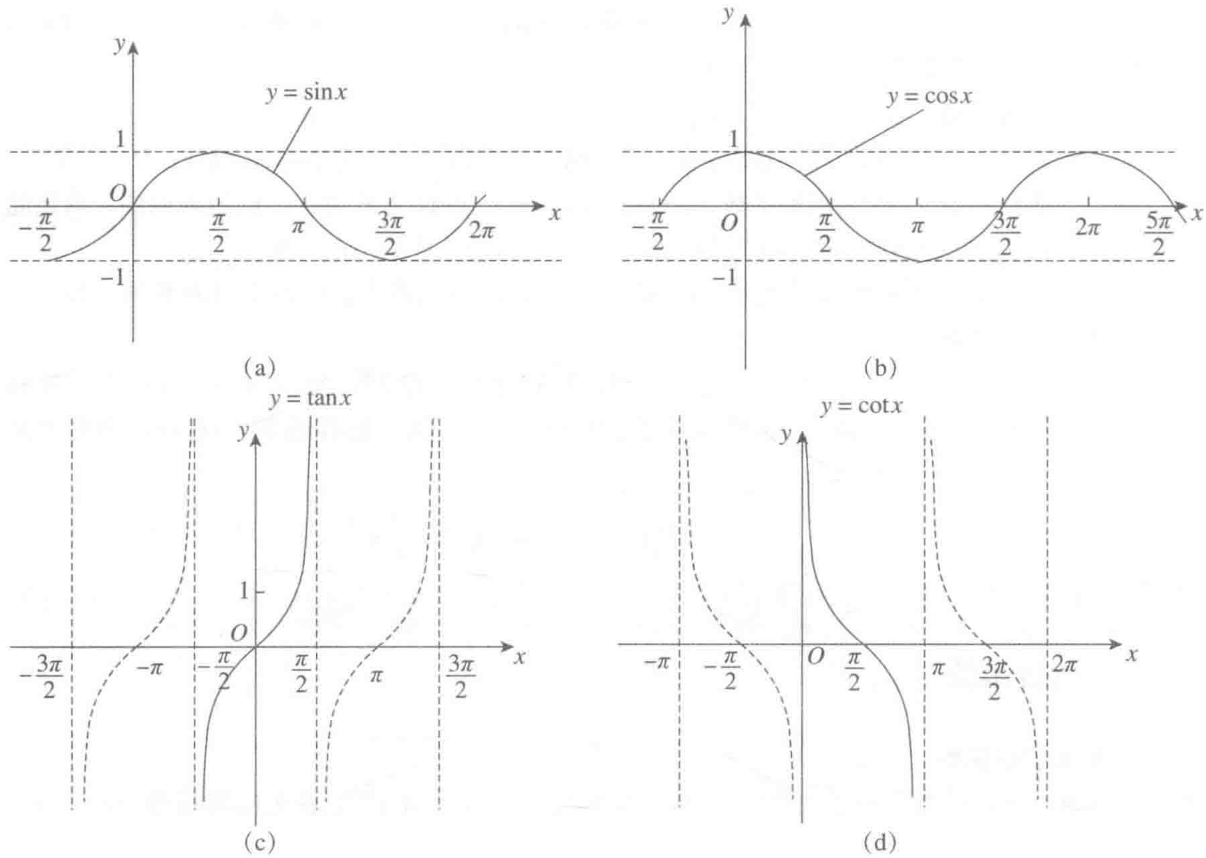

图 1－3

倒数关系：$\tan x\cot x=1$，$\sin x\csc x=1$，$\cos x\sec x=1$。

商的关系：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$。

平方关系：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\sec^2 x=1+\tan^2 x$，$\csc^2 x=1+\cot^2 x$。

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$ 和 $y=\mathrm{arccot}\, x$ 等。

1）反正弦函数：正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，称为反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$。$y=\arcsin x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。它在定义域上是单调增加的，奇函数（图 1－4）。

2）反余弦函数：余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数，称为反余弦函数，记作 $y=\arccos x$。$y=\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$。它在定义域上是单调减少的，非奇非偶函数（图 1－5）。

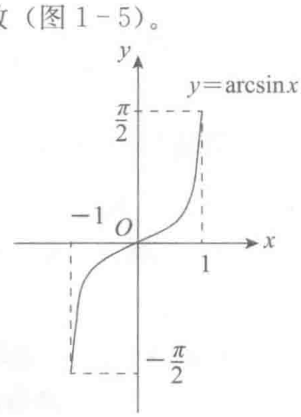

图 1－4

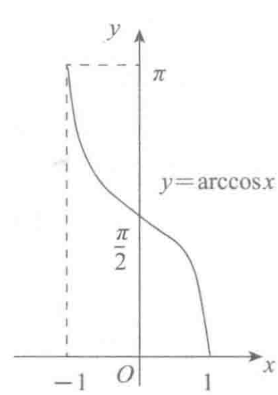

图 1－5

3）反正切函数：正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数，称为反正切函数，记作 $y=\arctan x$。$y=\arctan x$ 的定义域为 R，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。它在定义域上是单调递增的，奇函数（图 1-6）。

4）反余切函数：余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数，称为反余切函数，记作 $y=\operatorname{arccot} x$。$y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域为 R，值域为 $(0,\pi)$。它在定义域上是单调递减的，非奇非偶函数（图 1-7）。

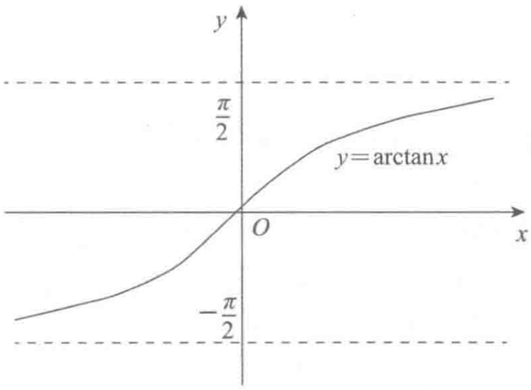

图 1-6

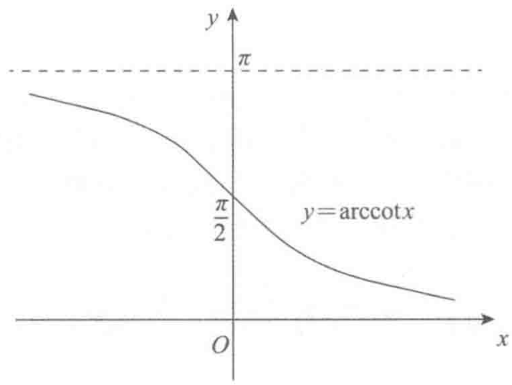

图 1-7

2. 复合函数

定义 1-2　若变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 是变量 x 的函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x)。$$

当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的子集上取值时，所对应的 u 值使函数 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**(compound function)，记作 $y=f[\varphi(x)]$。其中，称 u 为中间变量，x 为自变量，y 为因变量。

并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数。例如，函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 不能复合成一个函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=2+x^2$ 的值域为 $[2,+\infty)$，它们的交集为空集。

复合函数的定义可以推广到多个函数的情形。例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，其中 u 和 v 都是中间变量。

把一个复合函数分解成若干个简单函数，对下一章学习导数和微分的运算非常重要。所谓简单函数，是指由常数和基本初等函数经过四则运算所构成的函数。

例 1-4　将下列复合函数分解为简单函数。

(1) $y=e^{\arctan 3x}$；　(2) $y=\sin^2(2x+3)$；　(3) $y=\ln(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$。

解 (1) $y=e^u$，$u=\arctan v$，$v=3x$；

(2) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+3$；

(3) $y=\ln u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+w^2$，$w=\cos x$。

3. 初等函数

定义 1-3　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为**初等函数**(elementary function)。例如

$$y=\sqrt{1+2x-x^2}、y=\ln^2 x+\cos x、y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

都是初等函数。本课程中讨论的函数绝大多数都是初等函数。

四、分段函数

在生物学、医学和工程技术中，经常会遇到一类函数，这类函数在自变量的不同变化范围中，对应关系用不同式子表示，这样的函数称为**分段函数**(piecewise function)。求分段函数的函数值时要注意根据自变量的值选择相应的解析式。

例 1-5 某药物的每天服用剂量 y（克）与服药者的年龄 x（岁）之间的函数关系如下：

$$y=\begin{cases}0.125x, & 0<x<16,\\ 2, & x\geqslant 16,\end{cases}$$

求 4 岁、12 岁和 20 岁的患者每天服药剂量。

解 将 $x=4$、$x=12$ 和 $x=20$ 分别代入相应的解析式，可得 4 岁、12 岁和 20 岁的患者每天服药剂量分别为 0.5 克、1.5 克和 2 克。

例 1-6 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$。例如，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-1.5]=-2$。函数 $y=[x]$ 称为取整函数，它的定义域为 R，是一个分段函数。它的图形是阶梯状的，称为阶梯曲线（图 1-8）。

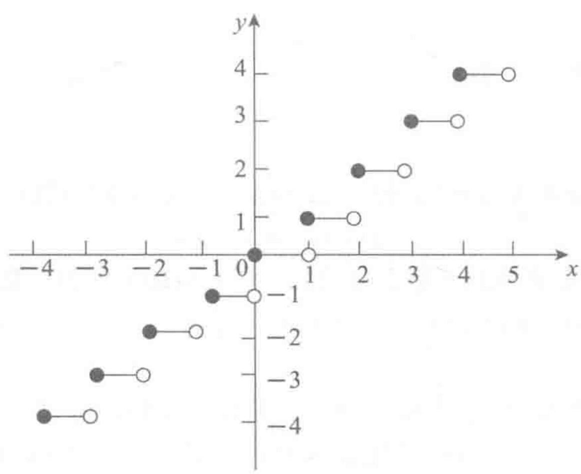

图 1-8 阶梯曲线

知识链接

几种特殊的分段函数

(1) 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0。\end{cases}$$

(2) 狄利克雷（Dirichlet）函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}。\end{cases}$$

(3) 黎曼（Riemann）函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (p,\ q\text{ 为正整数},\ \dfrac{p}{q}\text{ 为既约真分数}),\\ 0, & x=0,\ 1\text{ 及 }(0,\ 1)\text{ 内的无理数}。\end{cases}$$

第二节　极　　限

函数 $y=f(x)$ 描述的是变量 x 和 y 之间的静态关系。而当自变量 x 不断变化时，因变量 y 相应的变化趋势如何，反映的是 y 和 x 之间的动态关系，这正是极限描述的问题。极限方法是高等数学的重要方法，是学习微积分知识必备的基础。

一、极限的概念

1. 数列的极限

如果按照某一法则，对于每一个 $n\in N^*$，对应着一个确定的常数 x_n，按 n 从小到大排列得到的一列实数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为**数列**(sequence of number)，简记为 $\{x_n\}$。

定义 1－4　如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的**极限**(limit)，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(\text{当 } n\to\infty)\text{。}$$

如果不存在这样的常数 A，则称该数列 $\{x_n\}$ 发散，习惯上说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在。

例如，当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为 1，数列 $\{2^n\}$ 的极限不存在。当 $n\to\infty$ 时，2^n 是无限增大的，可以写成 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$。

例 1－7　见章前案例。

解　依题意，参数 $\tau>0$ 为常数，$0\leqslant t\leqslant\tau$，当 $n\to\infty$ 时，$e^{-kn\tau}\to 0$，于是这位患者体内最终的胰岛素含量与时间的关系式为

$$D(t)=\lim_{n\to\infty}D_n(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}D_0e^{-kt}=D_0\frac{e^{-kt}}{1-e^{-k\tau}}\text{。}$$

知识链接

割圆术　战国时期庄子在《天下篇》中引用过惠施的一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"也就是说一根长为一尺的木棒，每天截去一半，这样的过程可以无限制地进行下去。这就是我国古代极限思想的萌芽。

到了魏晋时期（公元前 3 世纪），我国古代数学家刘徽创立了著名的"割圆术"。割圆术的具体方法：首先，作一圆的内接正六边形，它的面积记为 A_1；再作内接正十二边形，面积记为 A_2；循此下去，每次边数加倍，A_n 则表示内接正 3×2^n 边形的面积。这样就得到一数列：

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$$

当 n 越大，内接正 n 边形的面积与圆的面积就越接近。当 n 无限增大时，A_n 无限接近于一个确定的数值，这个确定的数值就是圆的面积。

正如刘徽所说："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣。"

2. 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1-5 当自变量 x 的绝对值无限增大时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to\infty)。$$

在定义 1-5 中，自变量 x 的绝对值无限增大是指 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形。

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$。

例如，函数 $y=\sin x$，当 $x\to\infty$ 时，函数值在 -1 和 $+1$ 之间波动，故当 $x\to\infty$ 时，$\sin x$ 的极限不存在。

但有时只考虑其中一种情形。例如，当 $x\to-\infty$ 时，$2^x\to 0$；而当 $x\to+\infty$ 时，2^x 极限不存在。

例如，当 $x\to+\infty$ 时，$\arctan x\to\dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to-\infty$ 时，$\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

容易理解，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

3. 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1-6 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当 x 以任意方式无限趋近于点 x_0 时，函数 $f(x)$ 都无限趋近于一个常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0)。$$

由定义 1-6 知，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关。

例 1-8 讨论函数 $f(x)=x+1$，当 $x\to1$ 时的极限。

解 因为当 $x\to1$ 时，$x+1\to2$，所以

$$\lim_{x\to1}(x+1)=2。$$

在定义 1-6 中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的，也就是 x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋近于 x_0。但有时只能或只需考虑 x 从一侧趋近于 x_0 的情形。

当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(left limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A。$$

类似地，当 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**(right limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A。$$

左极限和右极限统称为单侧极限。容易证明，函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限和右极限都存在且相等。即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A。$$

例 1-9 验证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

证 函数 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。因为

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$