我最喜欢的趣味几何书

GEOMETRY

[俄罗斯] 别莱利曼 著　　柯楠 编译

中国纺织出版社

译者序

“全世界孩子最喜爱的大师趣味科学丛书”是世界著名科普作家别莱利曼最经典的作品之一，从1916年完成到1986年已经再版22次，被翻译成十几种文字，畅销20多个国家，全世界销量超过2000万册。

别莱利曼通过巧妙的分析，把一些高深的科学原理变得通俗简单，让晦涩难懂的科学习题变得生动有趣，还有各种奇思妙想以及让人意想不到的比对，这些内容大都跟我们的日常生活息息相关，有的取材于科学幻想作品，如马克·吐温、儒勒·凡尔纳、威尔斯等作者的作品片段，这些情节中描绘的奇妙经历，呈现出了鲜活的案例，不仅引人入胜，还能让读者在趣味阅读中收获知识。

由于写作年代的限制，这套书存在一定的局限性，毕竟作者在创作这套书时，科学研究没有现在严谨，书中用了一些旧制单位，且随着科学的发展，很多数据已经发生了改变。在编译这套书时，我们在保持这一伟大作品的精髓的同时，也做了些许的改动，并结合现代科学知识，进行了一些小小的补充。希望读者们在阅读时，能够有更大的收获。

在编译的过程中，我们已经尽了最大的努力，但依然不可避免会有疏漏之处。在此，恳请读者提出宝贵的意见和建议，帮助我们进行完善和改进。

目录

Chapter 1　森林中的几何学

Chapter 2　河畔几何学

Chapter 3　旷野中的几何学

Chapter 4　路途中的几何学

Chapter 5　不用工具和函数表的三角学

Chapter 6　地平线几何学

Chapter 7 鲁滨孙几何学

Chapter 8 黑暗中的几何学

Chapter 9 关于圆的旧知识与新知识

Chapter 10 无须测算的几何学

Chapter 1

森林中的几何学

利用阴影的长度来测量

直到现在，我依然清楚地记得一件事：在我很小的时候，曾经看到过一个秃顶的人，他想用一个小型的仪器测量一棵松树的高度。那棵松树很高，我以为他会拿着皮尺爬到树上去，可没想到，他却拿起一块方形的木板，对着松树瞄了一下，之后就把那个小仪器收起来了。然后，他拍拍手说："好了，测完了。"可在我看来，他根本就没有测量呀！

那时候，我的年纪还小，无法理解他的测量方法，也不知道是怎么回事，感觉就像变魔术一样。后来，我上了学，慢慢接触了几何学，才知道那根本不是魔术，原理也很简单。测量树木根本不需要做实际的测量，只需借助几种简单的仪器就行，且方法很多。

公元前 6 世纪，古希腊哲学家泰勒思发明了一个方法，这也被认为是最古老、最容易的方法。当时，很多人都想看看这位哲学家是如何测量高大的金字塔的，其中也包括法老和祭司。据说，泰勒思是这样做的：他选择了一个特殊的时间，在那个时间，他自身的影子长度刚好跟他的身高相等。此时，只要测量出金字塔影子的长度，就能知道金字塔的高度。只不过，金字塔影子的长度不是从金字塔的边缘计算，而是从塔底的正中心计算。

现在，即便是小孩子，对于这位哲学家发明的方法，也很容易明白其中的道理。但我们必须承认，这是因为我们学习了几何学之后才明白的，可当时还没有几何学。

大约在公元前 300 年，古希腊数学家欧几里得写过一本书，系统地论述了几何学。直至今天，这本书依然在被我们学习运用。对现在的中学生来说，书中的很多定理都很简单，可是在泰勒思

那个时代，这些定理尚未被人们所知。而在测量金字塔高度的过程中，却免不了要用到其中的一些定理，也就是下面的这些三角形的特性：

·等腰三角形的两个底角相等。反之，如果三角形有两个角相等，那么这两个角的对边也相等。

·对于任意一个三角形，它的内角和等于180°。

泰勒思发明的测量高度的方法，就是基于三角形的这两个特性。当影子的长度和他的身高相等时，说明太阳照向地面的角度刚好等于直角的一半，即45°。此时，金字塔的高度和影子的长度刚好是一个等腰三角形的两条边，所以它们是相等的。

倘若天气很好，在太阳的照射下，大树就会有影子。此时，我们就能用这种方法来测量大树的高度。当然，最好选择一棵独立的大树，不然的话，树的影子会重合，不方便测量。然而，在纬度比较高的地方，这个方法就不太好用了。因为在这些地方，只有中午很短的一段时间里，影子的长度才跟物体的高度相等。所以说，这个方法不适用于所有地方。

不过，在这些地方，我们可以将方法改进一下，只要有影子就可以得到物体的高度。这时，需要做的工作就是，先分别测量出物体的影子和自己的影子的长度，然后借助下面的比例关系计算出物体的高度，如图 –1 所示。

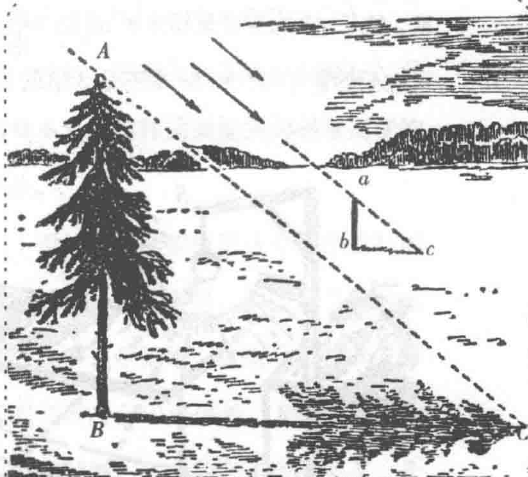


图 –1　利用阴影的长度来测量树的高度。

$$AB：ab=BC：bc$$

这个关系之所以成立，也是运用到了几何学中的知识，如果两个三角形 ABC 和 abc 相似，那么它们的对应边就

是成比例关系的。所以，物体的影子长度与身体的影子长度的比值，就与物体的高度跟身高的比值是相等的。

你可能会说：这么简单的道理，还要用几何学来证明吗？如果没有几何学，我们就无法测量出物体的高度了吗？事实恰恰如此。如图 –2 所示，如果我们把刚才的方法用到路灯以及它所形成的影子上，就行不通了。从图中可见，柱子 AB 的高度是矮木桩 ab 的 3 倍，可它们的影子 BC 和 bc 却不是 3 倍的关系，而是差不多 8 倍的关系。倘若没有几何学，要想充分解释这个方法的原理，并说明为何这个方法在此时不适用，是很困难的。

【题目】 为什么这个方法对路灯所形成的影子就不适用了呢？它跟前面测量大树的情形有什么不同？众所周知，我们把太阳照射出来的光线视为是平行的，而路灯发出的光线却并不平行，这一点我们可以从图 –2 中明显地看出来。那么，为何太阳发出的光线是平行

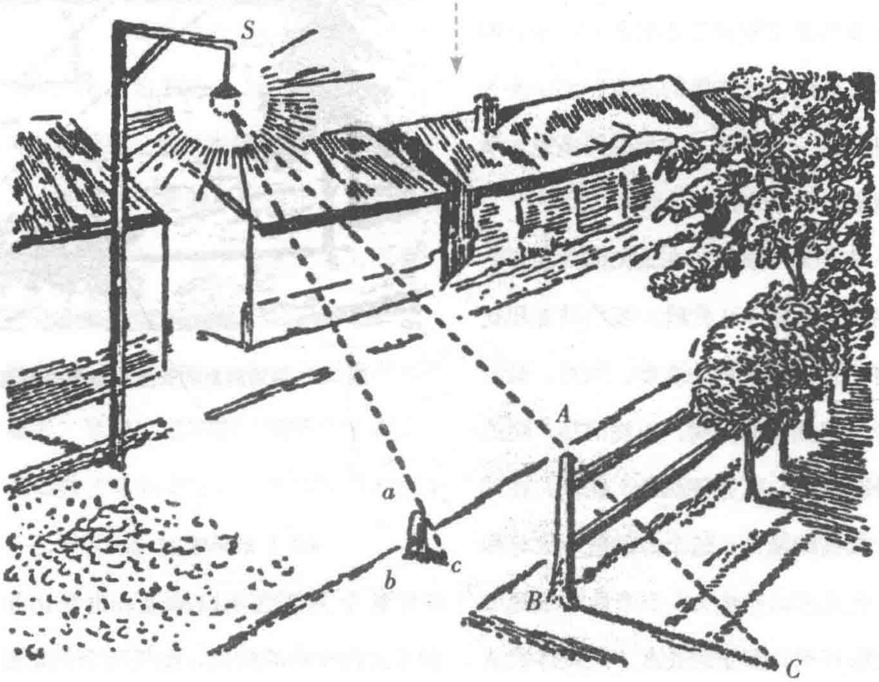


图 –2 为什么在路灯下这种测量方法不适用？

的呢？太阳光不也是从同一个太阳发出来的吗？

【解答】 我们之所以把太阳发出的光线视为是平行的，是因为从太阳发出的光线间的角度非常小，几乎可以忽略。这一点，我们可以用几何学的知识进行证明。假设从太阳上发出了两条光线，照射到地球上的某两个点，假定这两个点的距离有1000千米。如果我们有一个巨型的圆规，将其中的一只脚放到太阳的位置，另一只脚放到刚才的其中一个点上，画一个圆。显然，这个圆的半径刚好是地球到太阳的距离，也就是150000000千米。通过换算，即可得到这个圆的周长，它等于：

$$2\times\pi\times150000000\approx940000000\text{（千米）}$$

刚才选取的两点间的距离是1000千米，也就是圆上的一段弧长是1000千米的弧。我们知道，在圆周上的每一度对应的弧长都是圆周长的1/360。换算得出：

$$940000000\times\frac{1}{360}\approx2600000\text{（千米）}$$

每一分的弧长就是这个数值的$\frac{1}{60}$，约为43000千米，每一秒的弧长又是这个数值的$\frac{1}{60}$，即720千米。

前面我们提到的弧长只有1000千米，那么它对应的角度应该是$\frac{1}{720}$秒，就算是用精密的仪器也很难测量出这么小的角度，因此可以忽略不计。所以，在地球上看来，太阳发出的光线完全可以视为是平行的。需要指出一点，太阳照射到地球直径两端的光线之间的夹角大约是17秒，这个角度可以用仪器测量出来，科学家也恰恰是用这个角度计算出地球与太阳之间的距离的。

可见，倘若没有几何学的知识，我们根本无法解释前面提到的测量高度的方法。

不过，在现实中用这个方法进行测量的时候，并不容易。因为影子边缘的分界线不是很清晰，这就导致在测量影子的长度时会出现误差。太阳照射到物体上的时候，形成的影子边缘会有一个轮廓，这个轮廓呈现出的是半影，使得我们很难准确地找到影子的边缘。至于为何会产生半影，是因为太阳这个发光体太大了，光线不是从一个点上发出来的。

如图 –3 所示，树的影子 *BC* 在边缘处会多出来一段虚弱的半影 *CD*。实际上，半影 *CD* 的两端与树梢形成的夹角 *CAD* 与我们看向太阳直径两端形成的夹角是相等的，这个度数大约是半度。就算是在太阳的位置比较高的时候，半影依然会存在，所以此时就会产生测量误差。有时候，这个误差可能会达到 5%，甚至更多。加之地面凹凸不平等其他因素的影响，则会导致误差更大。如果在丘陵地带，这个方法是行不通的。

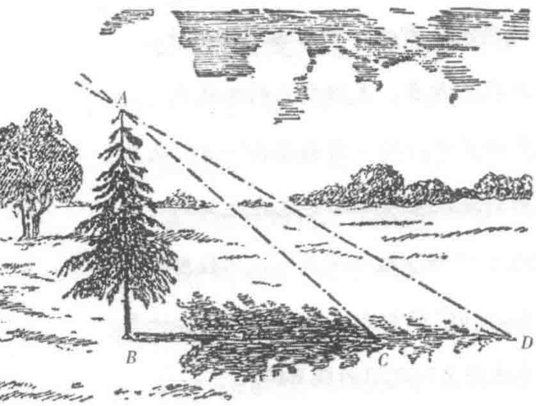


图 –3　半影是如何形成的？

测量大树的两个简单方法

前面我们谈到了用影子来测量物体的高度。其实，测量物体高度的方法还有很多，下面我们就介绍两种最简单的方法。

第一种方法，利用等腰直角三角形的性质来测量物体的高度。

我们需要一个简单的仪器，它很容易制作。如图 –4 所示，用一块木板和 3 个大头针就可以，在这块木板上画一个等腰直角三角形，接着把这三个大头针分别钉在三角形的顶点上。如果无法画出这个直角，不妨找一张纸，将其对折，横过来再对折一下，就得到了这个直角，且还可以用这张纸在木板上画出相等的距离，作为等腰直角三角形的两条边。就算是在野外，没有任何工具，我们也能制作出这样的一个仪器。

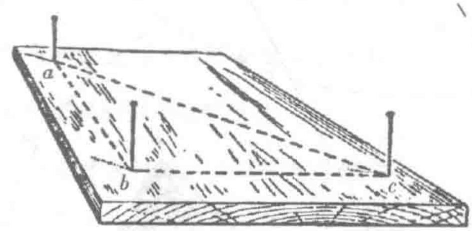


图 –4　三针仪。

用这个仪器进行测量的方法很简单，让我们回顾一下测量大树高度的情景。首先，用手拿着这个仪器，站到大树附近，在等腰直角三角形一条直角边顶端的大头针上拴上一条细绳，下面绑一个小石头之类的物体，让这条直角边跟细绳重合，保证直角是竖直的。然后，从刚才站立的位置向前或者向后移动，找到第一个点 A，如图 -5 所示。

这时，从点 A 通过大头针 a 和 c 看向大树的时候，树梢 C 刚好与这两个大头针在同一条直线上，点 C 在等腰直角

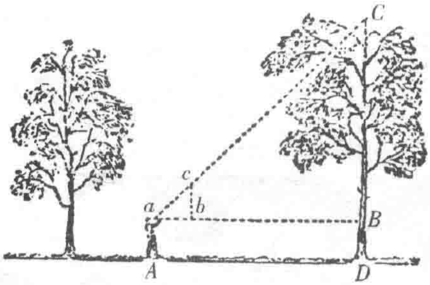


图 –5　三针仪的使用方法图示。

三角形 ac 边的延长线上。此时，由于角 a 等于 45°，所以 aB 和 CB 的长度是相等的。只要测出 aB 的长度，再加上 BD，也就是眼睛到地面的距离，就能得出树的高度了。

第二种方法也很简单，甚至无须制作仪器，只借助一根细长的木杆就行了。把木杆插到地里，让它露出地面的长度刚好等于你的身高（严格来说，这个高度应当是从地面到你眼睛的高度）。如图 –6 所示，仰面躺到地面上，脚跟抵住木杆的底端，使眼睛看向木杆顶端的时候，树梢刚好在这条直线的延长线上。此时，三角形 Aba 不仅是等腰三角形，还是直角三角形，所以角 A 等于 45°，$AB=BC$，眼睛平视到树的距离等于树的高度。

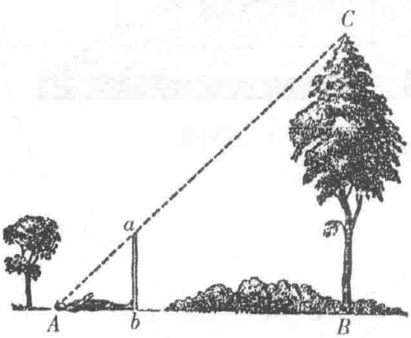


图 –6　第二种测量树高的方法。

凡尔纳的测量法

在凡尔纳的小说《神秘岛》中，工程师和赫伯特之间有一段风趣的对话。

工程师对赫伯特说：“走，今天我们去测量一下瞭望塔的高度。”

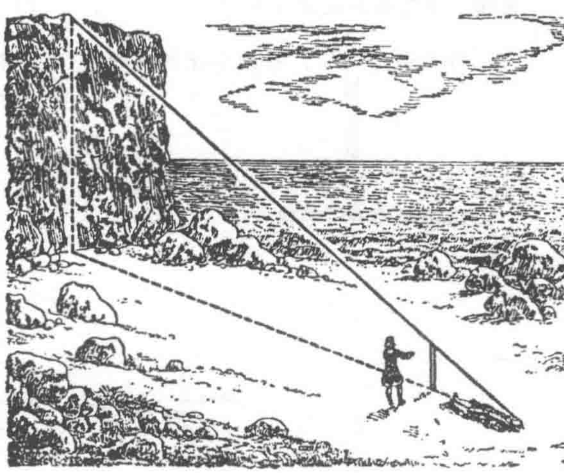
“噢，那要用什么仪器呢？”

“不需要仪器。今天我们换一种方法，同样能得到准确的数值。

赫伯特是个勤奋好学的青年，他想看看工程师到底是如何测量的。只见工程师先做了一个悬锤，就是在绳子的一端拴一块石头。工程师让赫伯特拿着，然后又拿起一根长度大概有12英尺的木杆，两个人一前一后向瞭望塔走去。

来到距离瞭望塔大约500英尺的地方，工程师把木杆的一头插到土里，插下去的深度约是2英尺。接着，工程师从赫伯特手里接过悬锤，对木杆进行校正，直到木杆完全竖直，又对木杆插到土里的部分进行固定。

固定好木杆后，工程师朝着远离木杆的方向走了几步，仰面平躺在了地面上，让自己的眼睛刚好可以通过木杆的尖端看到瞭望塔的最顶端。工程师在这个点上做了一个标记，如图–7所示。



图–7　《神秘岛》中工程师采用的测量方法。

接着，工程师从地上站了起来，问赫伯特说：“你学过几何学吗？”

“嗯，学过。”

“那你知道相似三角形有什么性质吗？”

“两个相似三角形的对应边成比例关系。”

“嗯，没错。现在，我们就来找相似三角形，且是直角相似三角形。把这根木杆视为三角形的一条边，刚才标记的那个点到木杆的距离作为另一条边，我的视线作为弦，这是一个三角形。另一个三角形的两条直角边是由要测量的瞭望塔的高度和瞭望塔底部到标记点的距离，而弦也是我刚才的视线。这两个直角三角形的弦是重合的。”

听工程师说完，赫伯特惊讶地叫起来：“我知道啦，标记点到木杆的距离与它到瞭望塔的距离之比，和木杆高度与瞭望塔高度的比值是相等的。”

“没错。只要分别测量出标记点到木杆和瞭望塔的距离，就能计算出瞭望塔的高度。木杆的高度我们知道，通过刚才的比例关系，就能算出瞭望塔的高度。所以，根本不需要用尺子测量。”

接下来，两个人对那两段距离进行了测量，分别是15英尺和500英尺，并列出下面的公式：

$$15 : 500=10 : D$$

$$D= 500\times 10\div 15 \approx 333$$

这就是说，瞭望塔的高度约是333英尺。需要注意的是，这里的木杆高度10英尺指的是木杆露在地面上的部分，而不是整根木杆的长度。

不靠近大树也能测树高

偶尔，我们也会遇到这样的情况：受地形或者其他因素的影响，无法抵达要测量的大树附近，这时能否测量大树的高度呢？

答案是肯定的。对于这样的情况，人们发明了另一种测量仪器，这个仪器也很容易制作。如图 –8 所示，找两根木条 ab 和 cd，把它们用钉子钉在一起，使其夹角成 90°，并使 ab 和 bc 长度相等，而 bd 则是 ab 长度的一半。这样，一个测高仪器就做好了。

测量物体高度的时候，把这个仪器拿在手里，让木条 cd 竖直。为了让它真正达到竖直的位置，可以事先在仪器上面钉一个小钉子，拴一个悬锤。然后，站在两个不同的地方点 A 和 A' 测量。

具体的方法是这样的：在点 A 测量的时候，要保证仪器的 c 端在上面；而

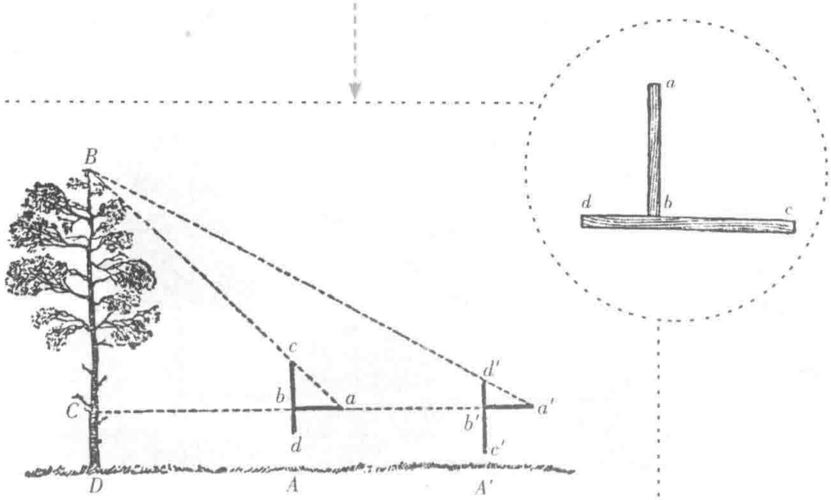


图 –8　利用两根木条测量树的高度。

在点 A' 测量的时候，要保证仪器的 d 端在上面。选择点 A 和 A' 也是有原则的：选择点 A 时，要使点 a、点 c 和树梢 B 在一条直线上，而选择点 A' 的时候，要使点 a'、d' 和树梢 B 在一条直线上。这样，树高的上半部分 BC 刚好等于 AA'，这是因为：

$$aC=BC$$

$$a'C=2BC$$

所以：

$$a'C-aC=BC$$

通过上述的分析可见，用这个仪器来测量大树的高度，无须走到大树附近。当然，如果能够走到大树附近的话，也可以用这一仪器进行测量。此时，只需要找一个点 A 或者 A' 就可以了。

可能有些读者已经想到了，这个仪器还可以进一步简化：直接找一块木板，按照刚才 a、b、c、d 4 个点的位置，在上面标记出来，钉上一个钉子，就能用来测量了。