

核心问题

高中数学教学中的

学科教学核心问题研讨丛书

数形结合 与数学模型

史宁中 编著

高等教育出版社

学科教学核心问题研讨丛书



基本概念与运算法则

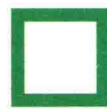
——小学数学教学中的核心问题

函数关系与几何证明

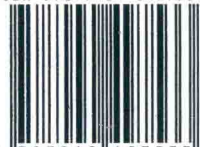
——初中数学教学中的核心问题

数形结合与数学模型

——高中数学教学中的核心问题



ISBN 978-7-04-049753-3



9 787040 497533 >

定价 42.80 元

核心问题

高中数学教学中的

学科教学核心问题研讨丛书

数形结合 与数学模型

史宁中 编著

高等教育出版社·北京

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

内容提要

本书以“数形结合”和“数学模型”的主线贯穿了高中数学教学中的核心问题，共30个问题和30个话题。“问题篇”阐述了高中数学内容的本质及其所蕴含的数学思想；“话题篇”侧重数学知识的拓展、数学内容产生的背景、数学内容之间的关联，并用较大篇幅介绍了高中数学课程标准所要求的数学模型。

本书充分体现高中数学课程标准的基本理念，有助于读者理解内容的数学本质、感悟内容的数学思想。可以作为高中数学教师校本研修的教材或参考书，为高中数学教学、大学数学教学、数学教学研究提供参考。

图书在版编目(CIP)数据

数形结合与数学模型：高中数学教学中的核心问题 /
史宁中编著. --北京：高等教育出版社，2018.7

(学科教学核心问题研讨丛书)

ISBN 978-7-04-049753-3

I. ①数… II. ①史… III. ①中学数学课-教学研究
-高中 IV. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第107076号

策划编辑 王文颖

责任编辑 王文颖

封面设计 张志奇

版式设计 张杰

插图绘制 于博

责任校对 高歌

责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印刷 河北鹏盛贤印刷有限公司

开本 787 mm × 960 mm 1/16

印张 22

字数 350千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>

<http://www.hepmall.com>

<http://www.hepmall.cn>

版 次 2018年7月第1版

印 次 2018年7月第1次印刷

定 价 42.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 49753-00

前 言

2013年，高等教育出版社出版了《基本概念与运算法则——小学数学教学中的核心问题》，我原本想一气呵成，把初中数学和高中数学教学中的核心问题一并完成。可惜的是，我虽然卸任了东北师范大学校长的工作，但依然公务缠身，特别是在普通高中数学课程标准的修订、大学先修课程的设计、各种各样名目繁多的评审工作上，花费了很多的时间和精力，导致我的写作工作断断续续，经常会因为时间间隔过长，而需要从头阅读写过的内容，重新梳理写作的思路。

值得庆幸的是，在高中数学课程标准修订的过程中，与修订组成员的共同研讨、与高中数学教材编写者的深入探究、与省市级高中数学教研员以及高中数学教师的座谈讨论，都促使我更加深入地思考高中数学的基本问题，包括对数学内容的理解，数学内容的教育价值，以及这些内容蕴含的数学思想，也包括在高中数学课程标准修订过程中所强调的数学核心素养。

高中数学不仅比初中数学的内容更加丰富，从思维的角度，至少有这样几个显著变化：初中数学的表达相对直观，高中数学的表达更加抽象（如集合概念的引入、函数概念的表达）；初中数学的概念相对具体，高中数学的概念更加一般（如弧度制的引入、三角函数的概念）；初中数学的几何与代数相对分离，高中数学的几何与代数更加融合；初中数学的统计与概率侧重描述，高中数学的统计与概率侧重推断。如果要概括高中数学的特征，那么可以说，高中数学更加抽象和严谨。这样的抽象和严谨是必要的，也是高中阶段的学生可以接受的。但无论如何，对于高中阶段的数学教育，应当认真分析这个特征的本质是什么、带来的弊端是什么，针对这些本质和弊端设计合理的教学策略。

数学严谨性的功能与数学教育。毋庸置疑，数学的严谨性极为重要，严谨性也是人们对数学的普遍认识。至少从高中阶段的数学教育开始，人们就非常强调并且认真遵循严谨性这个原则。可是，数学为什么需要严谨性呢？严谨性的功能是什么，或者说，严谨性对数学发展所起的作用是什么呢？对这个问题，英国数学家阿蒂亚有一段精彩的描述^①：

现在你可能会问：什么是严格性？一些人把“严格”定义为 *rigor mortis*（僵化），相信伴随纯粹数学而来的，是对那些知道如何得到正确答案的人的活动的

^① 阿蒂亚. 数学的统一性 [M]. 袁向东, 编译. 大连: 大连理工大学出版社, 2009: 35-36.

抑制。我想，我们必须再次记住数学是人类的一种活动。我们的目标不仅要发现些什么，而且要把信息传下去。

.....

严格的数学论证的作用正在于使得本来是主观的、极度依赖个人直觉的事物，变得具有客观性并能够加以传递。我完全不想拒绝直觉带来的好处，只是强调为了能向他人传播，所获得的发现最终应以如下方式表述：清晰明确，毫不含糊，能被并无开创者那种洞察力的人所理解。

.....

一旦你进入研究的下一阶段，对已得到的结构开始提出更复杂、更精细的问题时，对最初的基础性工作的深入理解就会变得越来越重要。所以，正是你所从事的研究本身，需要严格的论证，如果缺乏牢固的基础，你修建的整座建筑将岌岌可危。

不仅是阿蒂亚，数学家普遍认为，数学结论的发现依赖的并不是严谨性，而是主观的个人直觉。关于这一点，法国数学家阿达玛有专门的著作^①，其中给出了许多生动的实例。人们之所以强调数学的严谨性，是为了把主观的、个人的数学变为客观的、传递的数学，为了便于他人理解、与他人交流，便于把问题研究得更加深入。

基于这个事实，数学教育工作者应当从两方面认识数学的严谨性：一方面，正是因为数学的严谨性，才能保证数学教育得以实施；另一方面，数学教育应当重视严谨性，但不能拘泥于严谨性。理由非常简单，因为严谨性的功能不在于发现知识，而在于解释知识；甚至在数学教学活动中，严谨性的功能不在于理解知识的本质，而在于认同知识的表述。

任何事情，走到极端就会出现异化，这便是孔子所说的“过犹不及”，数学的严谨性也是如此。如果在数学教育的过程中，过分强调数学的严谨性，数学概念就会变成一堆符号，数学推理就会变为一种形式，数学就会变成英国哲学家罗素所说的那样^②：

我应当同意柏拉图的说法，纯粹数学并不是从知觉得来的。纯粹数学包含的都是类似“人是人”这样的同义反复，只不过是更为复杂罢了。要知道，判断一个数学命题是否正确，我们并不需要研究世界，而只需要研究符号的意义；而符号，当我们省略了定义之后，只不过是“或者”“不是”“一切”和“某些”之类的话语，并不指向现实世界中的任何事物。

^① 阿达玛. 数学领域中的发明心理学 [M]. 陈植荫, 肖奚安, 译. 大连: 大连理工大学出版社, 2008.

^② 罗素. 西方哲学史 [M]. 何兆武, 李约瑟, 译. 北京: 商务印书馆, 1976: 203-204.

罗素是哲学家，是数学逻辑主义学派的代表。在罗素的眼中，数学的命题或者说数学的结论，就是用一些表示关系的逻辑术语把表示概念的名词连接在一起。如果不顾及概念的实际含义，那么，数学最终就如罗素评述的那样：

数学的真理，正如柏拉图所说，与知觉无关，这是一种非常奇特的真理，仅仅涉及符号。

这样，罗素就把数学的逻辑性，或者数学的严谨性推到极致，我们不能也不应当用罗素的观点指导数学教育。那么，应当进行怎样的数学教学活动呢？

基于核心素养的数学教育。虽然现代数学中，数学结论的最终表述仅仅涉及符号和逻辑术语，看似平淡乏味，但在事实上，大多数数学结论的内涵是丰富多彩的，结论的形成过程是生机勃勃的，高中数学涉及的内容也是如此。比如，与数量有关，初等函数的出现、函数性质的探讨、最具创造力的数学工具微积分的产生与发展过程；与图形有关，圆锥曲线的构想、解析几何的创立、最具想象力的图形运动轨迹的代数表达等。

所以，高中阶段的数学教学活动，不能过分沉迷于符号和逻辑，不能过分拘泥于严谨和形式。完全符号化、形式化和公理化的教学，必然会掩盖数学命题的本质，淡化数学思维的活力，无法启发学生理解数学内容的本质，无法帮助学生积累数学思维的经验。对于这样的数学教学，正如德裔美国数学家柯朗所批评的那样^①：

今天，数学教育的传统地位陷入了严重的危机之中，而且遗憾的是，数学工作者要对此负一定的责任。数学教学有时竟变成空洞的解题训练。这种训练虽然可以提高形式推导的能力，但却不能导致真正的理解与深入的独立思考。

柯朗把问题阐述得非常明晰，如果把数学教学活动变成单纯的解题训练，不述说数学知识产生的背景、不展示数学概念以及运算法则的抽象过程、不顾及数学知识之间的关联，那么就不可能引发学生进行深入的独立思考，学生就不可能真正理解数学知识。关于如何获取真正的知识，爱因斯坦从哲学层面阐述了这个问题^②：

纯粹的逻辑思维不能给我们任何关于经验世界的知识；一切关于实在的知识，都是从经验开始，又终结于经验。用纯粹逻辑方法得到的所有命题，对于实在来说是完全空洞的。由于伽利略看到了这一点，尤其是由于他向科学界谆谆不倦地教导这一点，他才成为近代物理学之父，事实上，也成为整个近代科学之父。

① 柯朗，罗宾. 什么是数学：对思想和方法的基本研究. 左平，张饴慈，译. 上海：复旦大学出版社，2007：第一版序言.

② 爱因斯坦. 爱因斯坦文集：第一卷 [M]. 许良英，范岱年，编译. 北京：商务印书馆，1976：313.

那么,什么样的数学教育才有利于获取真正的知识呢?众所周知,“双基”是我国数学教育的传统特色,也是传统优势,希望培养出来的学生基础知识扎实、基本技能熟练。这里所说的“基础知识”主要是指概念的记忆和命题的理解,“基本技能”主要是指计算的技能 and 证明的能力。但是,只强调知识和技能的教肓,走到极端就会像柯朗所说的那样:扎实的知识靠记忆,熟练的技能靠训练。现实状况已经表明,长期实施的“双基”教育已经出现了异化,为了继承和发展中国数学教育的传统特色和优势,就必须突破传统、实现跨越,这就是义务教育课程标准提出的“四基”。关于“四基”,《义务教育数学课程标准(2011年版)解读》的绪论是这样描述的^①:

与教学大纲相比,课程标准更加重视学生能力的培养和素养的提高。《义务教育数学课程标准(2011年版)》的培养目标在原有“双基”的基础上,进一步明确提出了“基本思想”和“基本活动经验”的要求,这样就把“双基”扩展为“四基”。希望学生在义务教育阶段的数学学习中,除了获得必要的数学知识和技能之外,还能感悟数学的基本思想,积累数学思维活动和实践活动的经验。

思想的感悟和经验的积累是一种隐性的东西,但恰恰就是这种隐性的东西在很大程度上影响人的思想方法,因此,对学生,特别是对那些未来不从事数学工作的学生的重要性是不言而喻的,这是学生数学素养的集中体现,也是“育人为本”教育理念在数学学科的具体体现。

.....

显然,思想的感悟和经验的积累仅仅依赖老师的讲授是不行的,更主要的是依赖学生亲自参与其中的数学活动,依赖学生的独立思考,这是一种过程的教育。

因此,对于数学教育而言,“过程的教育”所说的“过程”,不是指数学知识产生的过程,更不是指数学家所描述的数学思维的过程,而是指学生自己理解数学知识的思维过程。一个学生学会“想问题”,主要不是教师“说教”的结果,而是这个学生经验的积累,是在独立思考的过程中逐渐形成的思维习惯和能力。在基础教育阶段,一个好的数学教育,在学生掌握知识和技能的基础上,还应当倾向于培养学生的数学思维习惯和能力:会在错综复杂的事物中把握本质,表现出抽象能力强;会在杂乱无章的事物中理清头绪,表现出推理能力强;会在千头万绪的事物中发现规律,表现出建模能力强。这里所说的抽象、推理和建模,恰恰是数学基本思想的核心。

《普通高中数学课程标准(2017年版)》强调数学核心素养,并以此为纲、贯穿数学教育始终。可以把数学核心素养总体理解为:是对经过数学教育以后培养出什么样

^① 教育部基础教育课程教材专家工作委员会. 义务教育数学课程标准(2011年版)解读[M]. 北京:北京师范大学出版社,2012:2.

人的描述。基于前面关于基础教育阶段数学教育的论述，我们可以认为，无论学生未来从事的工作是否需要进一步研究数学，数学教育的终极目标都是，使得学生：会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界。因为涉及数学教育的终极目标，所以可以把“三会”理解为数学核心素养。我们知道，数学的眼光主要是数学抽象，也包括直观想象；数学的思维主要是逻辑推理，也包括数学运算；数学的语言主要是模型，也包括数据分析。因此，如果要把数学核心素养进一步细化，那么就是：数学抽象、逻辑推理、数学模型、直观想象、数学运算、数据分析^①。这样，又回到了数学基本思想的范畴。

我和张奠宙先生一致认为^②，高中数学课程标准突出“四基”可能要比突出“数学核心素养”更好一些，因为“四基”不仅继承和发展了中国数学教育的传统特色和优势，而且与义务教育数学课程的基本理念一脉相承，有利于指导教学。指导教学的基本理念不应当经常变化，否则会让工作在第一线的教师无所适从。我想特别说明的是，张奠宙先生认为中国特色的数学教育就是“四基”，他呼吁教育专家和数学教育工作者应当充分重视“四基”，应当进行深入细致的研究。为了不引起歧义，在本书中，我们将等同看待基于数学核心素养的教学和基于“四基”的教学。

那么，一个基于数学核心素养的数学教学活动应当是什么样的呢？2016年，在帮助上海市总结上海数学教育经验的时候，我认真思考了这个问题，大概需要注意下面几个环节：

1. 把握数学内容本质，知道学生认知过程；
2. 创设合适教学情境，提出恰当数学问题；
3. 引发学生独立思考，鼓励学生相互交流；
4. 让学生在掌握知识与技能的同时，感悟知识所蕴含的数学思想；
5. 积累数学思维经验，发展数学核心素养。

简要分析这五个环节。第一个环节，说的是设计教学活动的前提，既要把握数学知识的本质，又要知道学生是如何认识和理解这些数学知识的；第二个环节，说的是教学活动的设计，要根据知识的本质和学生的认知过程设计合适的教学情境，提出恰当数学问题，特别要注意情境与问题的有机结合，其中的情境并不仅仅指生活中的情境，可以包括数学的情境和科学的情境；第三个环节，说的是在教学活动的实施过程中，设计教学情境和提出数学问题的目的是引发学生独立思考，除此之外，还要鼓励学生与教师交流、鼓励学生相互之间交流；第四个环节，说的是教学目标，可以称为第一层次目标或短期目标，就是让学生通过情境和问题，在思考和交流的基础上理解知识与技能，同时感悟数学的基本思想；第五个环节，说的依然是教学目标，可以称

^① 更详细的讨论，参见：史宁中，林玉慈，陶剑，郭民. 关于高中数学教育中的数学核心素养——史宁中教授访谈之七[J]. 课程·教材·教法，2017(4):8.

^② 朱雁，鲍建生. 从“双基”到“四基”：中国数学教育传统的继承与超越[J]. 课程·教材·教法，2017(1):63.

为第二层次目标或长期目标，帮助学生逐渐积累数学思维和实践的经验，形成和发展数学核心素养。

不言而喻，在数学教育教学的过程中，培养学生敢于质疑、善于思考、实事求是、一丝不苟的科学精神非常重要，培养学生学会学习、应用能力和创新意识更是不可或缺的，因此，《普通高中数学课程标准（2017年版）》中特别对这些进行了强调。

上面所说的五个环节不可能在一堂课中实现。我们应当注意到这样的事实，因为“微课”等网络授课的出现，知识内容已经被细化成非常破碎的知识点，破碎的知识点无法承载数学的基本思想，不利于学生形成和发展数学核心素养。所以，基于数学核心素养的数学教学，教学内容需要总体思考、教学活动需要整体设计。可以对一个课程单元进行统筹设计、提出总体目标，然后再把总体目标（包括相应的内容）分解到每一节课。《普通高中数学课程标准（2017年版）》已经把这样的设计思路写在“教学建议”和“评价建议”之中。因此，对于这样的总体目标，就可以在教学设计时全面考虑上述五个环节。

与《基本概念与运算法则——小学数学教学中的核心问题》一以贯之，本书名为《数形结合与数学模型——高中数学教学中的核心问题》。下面，我简单解释一下，为什么在高中数学教学中要强调数形结合和数学模型。

关于数形结合。比较小学和初中数学，高中数学体现的数形结合更加本质，具体表现是，越来越倾向于用代数的方法研究几何问题。《普通高中数学课程标准（2017年版）》已经充分显示了这种倾向，设计的三个贯穿始终的内容主线中，有一个内容主线就是“几何与代数”。无论对传统的高中数学大纲，还是对现行的高中数学课程标准，这样的提法还是第一次，这样整合数学内容的目的就是把几何与代数融为一体。其他两个内容主线是“函数”“统计与概率”。

事实上，高中的“函数”主要讨论初等函数的表达和性质，都呈现着鲜明的几何背景，并且通过解析几何实现函数与图形的有机结合，比如：一次函数与直线、二次函数与二次曲线；特别是利用导数研究函数基本性质的过程中，几乎所有表达都需要图像的支撑。在高中数学课程标准中，无论是内容的述说，还是教学的建议，都秉承这样的基本理念：通过几何建立直观，通过代数予以表达。正如希尔伯特所说：“算术符号是文字化的图形，而几何图形则是图像化的公式。”^①

因此，本书的写作原则，就是要充分体现这种基本理念，注重数学内容的几何分析和代数表达，希望读者能够从中理解内容的数学本质、感悟内容的数学思想。

关于数学模型。高中数学为学生学习数学模型积淀一定的储备：就知识而言，掌握几种形式的函数，研究函数的性质与图像，学习物体运动的数学表达；就思维而言，通过不断深化的数学概念使学生具备一定的数学抽象能力，通过数形结合的学习

^① 瑞德·希尔伯特：《数学世界的亚历山大》[M]。袁向东，李文林，译。上海：上海科学技术出版社，2003：116。

使学生建立一定的直观想象能力，通过函数性质的分析使学生形成一定的数学表达能力。基于这个理由，《普通高中数学课程标准（2017年版）》专门设计了“数学探究与数学建模”这样的超越具体数学内容的主题，并且把这样的主题贯穿在必修课程和选择性必修课程之中，让学生在数学建模活动中，感悟如何用数学语言讲述现实世界中的故事；特别是在选修课程中，还专门为有志于学习社会经济类学科的学生设计了数学模型的专题。

因此，本书在“话题篇”用较大篇幅介绍数学模型，其中许多是课程标准所要求的，包括自然界的数学模型，也包括社会学和经济学的数学模型。并且，严格遵循课程标准倡导的理念：首先讨论这些数学模型所要讲述的现实世界的故事是什么；其次分析这些数学模型是如何基于现实背景抽象出核心要素，如何思考核心要素之间的逻辑关系；最后研究如何用数学的语言表达这样的逻辑关系，形成并且验证数学模型。

就写作体例而言，与《基本概念与运算法则——小学数学教学中的核心问题》相同的是，本书也设计了30个问题和30个话题；不同的是，本书中没有设计教学案例，这不仅是因为我没有高中数学的教学经验，主要还是因为高中数学涉及的内容太多，是为了不给这本书造成过大的篇幅。非常感谢北京大学附属中学张思明老师和他的团队针对本书的内容并结合教材，制作了一定数量的微课，可供读者参考。因此，我在30个问题中，尽可能述说数学内容的本质及其所蕴含的数学思想；在30个话题中，则侧重数学知识的拓展、数学内容产生的背景、数学内容之间的关联，以及介绍一些重要的数学模型。希望这本书能够对高中数学教学、大学数学教学以及数学教学研究提供参考。

因为我没有系统研究过课程论和教学方法，本书述说的内容可能不完全符合实际，特别是关于如何实施教学的有关内容。但是我相信，数学教育工作者、活跃在教学第一线的教研员和广大的教师有着无限的创造力，只要理解了这本书所述说的内容和理念，就一定能够创造出生动活泼、行之有效的教学方案和教学方法。

最后，我想感谢日本统计数理研究所为我提供了很好的生活和工作条件，使我能够安下心来进行写作。两年前，我到这里访问一个月，完成了《数学基本思想18讲》的最后定稿，2016年由北京师范大学出版社出版。2017年，我到这里访问三个月，完成了本书的最后定稿。同时，我还要感谢高等教育出版社，特别要感谢王文颖编辑的耐心等待和细心编辑。

史宁中

2018年1月

目 录

问 题 篇

第一部分	函数与导数	3
问题 1	集合的本质是什么?	4
	数量与数量关系的抽象/数学的基本语言/从数量到数字/从数字到字母/从字母到集合/集合的定义是形式化的/集合是由元素唯一确定的	
问题 2	为什么要用对应关系重新定义函数?	8
	初中阶段函数定义至少存在两个不确切/如何把握函数的形式/如何研究函数的性质/用对应关系定义函数/对应关系定义函数需要注意的问题	
问题 3	如何理解指数函数和对数函数?	11
	指数函数最初的含义就是一个数自乘的表达/等比数列通项/从离散到连续的演变/对数函数与指数函数互为反函数/对数函数源于现实计算的需要/常用对数	
问题 4	为什么要借助单位圆重新定义三角函数?	14
	三角函数源于三角形边角关系的表达/勾股定理与余弦定理的关系/作为函数形式的三角函数/弧度制的核心是用实数刻画角的大小/三角函数的周期性非常重要	
问题 5	如何认识极限?	18
	极限是一种运算/从有限到无限、从平直到弯曲/通过自然对数理解极限/用数学语言表达极限运算/数列极限收敛的充要条件	
问题 6	如何理解函数的连续性?	23
	连续性是函数的一种分类标准/连续性是函数可以求导数的必要条件/实数具有连续性/函数连续性的直观表达/函数连续性的形式表达/利用离散表述连续	
问题 7	如何理解导数?	27
	导数的核心是极限运算/用导数表示运动物体的瞬时速度/用静态计算刻画动态过程的瞬间/用导数表示曲线上某一点的切线/用割线斜率的极限刻画切线的斜率	
问题 8	为什么通过导数可以研究函数的性质?	31
	导函数与原函数自变量相同/用线性函数表示函数的微小变化/导数是线性函数的斜率/用导数判断函数的单调性/用导数判断函数的极值点/用导数判断函数的周期性	

问题 9	为什么说牛顿-莱布尼茨公式非常重要?	33
	积分是连续曲线下的面积, 是“以直代曲”的典范/积分与微分之间的逻辑桥梁/积分与微分之间的逻辑关系/数学对称之美/积分与导数之间的互逆	
问题 10	为什么实数可以比较大小, 而复数却不能比较大小?	35
	自然数是对数量的抽象/自然数大小关系源于数量多少关系/三歧性定理表示自然数的大小关系具有传递性/实数的大小关系/复数不能比较大小	
第二部分 几何与代数		40
问题 11	如何用几何的方法研究代数?	41
	算术符号是文字化的图形/几何图形则是图像化的公式/线段的加减/垂线与平行线/线段的乘除/线段的平方根/古希腊学者欢欣鼓舞	
问题 12	什么是不可作图问题?	45
	有些问题用尺规作图是不能解决的/尺规作图可能实施的范围是代数数/不能三等分角/阿基米德的设想/不能三等分 60° 角/不能化圆为方	
问题 13	如何理解向量? 如何用向量的投影表示物体受力?	51
	向量的概念来自物理学/力的平行四边形法则/向量的几何表达与运算/向量的代数表达与运算/向量的投影与物体的受力状况	
问题 14	如何理解向量的数量积与矢量积?	55
	向量的数量积/向量数量积的几何意义/向量的长度/向量的夹角/两点间的距离/数量积与物理学的功/矢量积的数学意义与物理意义	
问题 15	如何利用向量刻画线性空间的基本概念?	59
	向量的线性无关与线性空间的基底/基于基底的向量线性表出构建了向量空间与线性代数之间的桥梁/通过代数的语言确切地表达几何学的基本概念/ n 维空间的超平面	
问题 16	行列式运算是如何规定的? 如何用行列式表达方程组的解?	63
	用行列式判断和表达方程组的解/二维行列式: 平行四边形的面积/三维行列式: 平行六面体的体积/用行列式表达线性方程组的解, 即克莱姆法则	
问题 17	矩阵运算是如何规定的? 如何用矩阵求线性方程组的解?	65
	二维向量与二维矩阵/矩阵和行列式/如何规定矩阵运算法则/矩阵乘法不满足交换律/单位矩阵/逆矩阵/正交矩阵/用矩阵表示线性方程组的解	
问题 18	线性变换的本质特征是什么? 为什么用矩阵可以刻画线性变换?	70
	刻画图形全等: 图形运动与线性变换/两点间距离是刚体变换的不变量/三种变换与刚体变换/平移变换/旋转变换/反射变换	

问题 19	如何理解距离? 如何理解向量的投影?	74
	距离的一般定义/距离的三条共性/基于正定矩阵的距离/基于绝对值的距离/基于距离的向量投影/向量投影是向量到子空间的最短距离/投影与样本均值	
问题 20	为什么古希腊学者称圆锥曲线为“齐曲线”“亏曲线” “盈曲线”?	80
	圆锥曲线的定义/三种圆锥曲线的原始定义/亏曲线: 椭圆/盈曲线: 双曲线, 齐曲线: 抛物线/圆锥曲线与动点的轨迹	
第三部分 概率与统计		86
问题 21	如何理解随机事件? 如何表达和刻画随机事件的 概率?	87
	随机现象/随机现象的数学特征: 一种被称为概率的度量/概率的数学表达: 样本空间和随机事件/概率的性质与运算/概率是随机事件的固有属性/自然齐一性原理	
问题 22	如何理解条件概率? 如何理解随机事件的独立性?	96
	条件概率的数学表达/条件概率与无条件概率大小的比较: 如何理解条件概率中的条件/两个随机事件的独立性/根据定义计算两个独立事件的概率/三个随机事件的独立性	
问题 23	什么是随机变量? 如何得到随机变量的分布?	102
	随机变量与函数变量的共性与区别/概率空间/随机事件对应于随机变量的具体取值/构建随机变量的导出空间/随机变量是可测映射/进行度量: 得到随机变量的分布函数/建立导出概率空间的必要性	
问题 24	什么是离散型随机变量? 二项分布是如何得到的?	109
	离散型随机变量的分布/伯努利模型: 只有两个可能结果/随机变量的两重性/二项分布的推导	
问题 25	什么是连续型随机变量? 正态分布是如何得到的?	112
	连续型随机变量的分布/密度函数/分布函数/随机误差模型/随机误差正负抵消、和为零/最大似然原理: 正态分布的推导	
问题 26	统计学与数学的区别是什么? 应当如何理解统计学?	116
	通过数据验证假设、估计概率/统计学与数学的区别/如何理解统计学/描述统计学/推断统计学/统计学的定义	
问题 27	为什么不能用频率的极限定义概率?	124
	用频率极限定义概率的方法与理由/随机变量序列的收敛法则/弱大数定律/强大数定律/依概率 1 发生并不等价于必然发生/用频率估计概率	
问题 28	如何理解估计? 如何理解估计的有效性?	129
	统计空间/参数估计/非参数估计/几个重要的统计数字特征值/参数估计的方法: 最大似然估计/非参数估计的方法: 矩估计/基于损失函数的估计	

- 问题 29 如何理解检验问题? 如何理解列联表的独立性检验? 137
判断药物的有效性/统计检验的基本思想/统计检验的一般数学表达/列联表的检验/优比检验/拟合优度检验/皮尔逊卡方检验统计量
- 问题 30 如何理解线性统计模型? 如何理解回归模型? 144
线性统计模型中的系数是未知的/线性方程组与随机误差/线性统计模型的参数估计/回归模型/条件均值/正态分布与线性回归模型/皮尔逊相关系数

话 题 篇

- 话题 1 关于集合的故事 153
- 话题 2 关于 ZF 集合论公理体系 162
- 话题 3 选择公理的必要与困惑 166
- 话题 4 函数定义的演变过程 173
- 话题 5 基本初等函数的形式化定义 175
- 话题 6 微积分形成过程与极限理论确立 183
- 话题 7 实数理论的确立 188
- 话题 8 复数、四元数与麦克斯韦方程 191
- 话题 9 几何基本概念与几何公理体系 200
- 话题 10 再论几何学的思维基础与基本概念 208
- 话题 11 罗巴切夫斯基几何及其现实意义 218
- 话题 12 黎曼几何及其现实意义 226
- 话题 13 经纬线、地图与坐标系 235
- 话题 14 极坐标与圆锥曲线的统一表达 241
- 话题 15 二次曲线分类、几何变换与不变性质 246
- 话题 16 时空模型与几何、时空变换与不变量 258
- 话题 17 伽利略是如何得到自由落体方程的 264
- 话题 18 开普勒是如何得到行星运动轨迹的 271
- 话题 19 牛顿万有引力定律与开普勒定律的关系 275
- 话题 20 爱因斯坦狭义相对论和广义相对论 280
- 话题 21 投入产出模型: 线性方程组解的存在及其意义 293
- 话题 22 凯恩斯经济模型: 从静态的到动态的 299
- 话题 23 人口增长模型: 为什么是指数形式? 302
- 话题 24 养老金模型: 如何思考社会问题 306

话题 25	环境指数模型：如何表达多样性	309
话题 26	优化模型：不能两全事物的决策	313
话题 27	估计的三种优良性准则	316
话题 28	孟德尔遗传学与统计检验	321
话题 29	偶然与必然的关系	325
话题 30	原因与结果的关系	330

问题篇

