中国矿业大学(北京)越崎系列规划教材

张量及其应用简明教程

宋彦琦 编著

煤炭工业出版社

·北 京·

内 容 提 要

本书阐述了张量基本知识及其在弹性力学和流体力学中的应用。

全书共分四章，第一章、第二章介绍张量的基础知识，包括张量代数和张量分析，第三章、第四章介绍张量在力学中的应用。本书从简单的笛卡儿张量入手，由浅入深，目的是使读者能在较短的时间内掌握张量的基本知识及其在弹性力学和流体力学中的应用，以便为进一步学习后续课程和攻读力学等相关文献打下必要的基础。

本书是高等学校力学专业工科本科生和研究生的教材，也可作为高等院校相关专业教师、科研院所研究人员、工程技术人员的参考用书。

自　　序

本书是为工程力学专业和工程专业的本科生学习张量理论的基础知识而编写的。张量能以简洁的表达形式和清晰的推导过程有效地描述复杂问题的本质，因而近50年来越来越多的力学文献和力学理论教科书纷纷采用张量符号。如果我们熟悉张量符号、代数与微积分的话，研究力学就会简单。

笔者有幸在最初接触张量的基本内容时，就跟随戴天民教授学习了张量和连续介质力学的相关知识，打下了较为坚实的基础。在后来的授课和编写讲义中也以戴天民教授在1986年出版的《张量和连续介质力学》为依据，并不断向初学者推荐此书。

在多年的学习、工作生涯中，笔者深知张量在力学学科中的重要性。平时经常听到有人讲："张量重要，但太难学"，在与周围的同行或研究生进行探讨和研究张量的有关问题时，笔者深深感到让从未接触过张量分析的人有一本简明的入门书籍非常重要。这就是编写本书的初衷。

在本书编写过程中，参考了戴天民教授的《张量和连续介质力学》的内容，同时参考并引用了其他有关张量分析教材的书籍，在此向他们表示衷心的感谢。

本书涉及张量代数、张量分析和张量在弹性力学和流体力学中的应用等几个方面，并给出了一些相关的示例。作为一门学科，张量分析的内容相当广泛。由于本书是为工科学生编写的，为便于理解，并未涉及张量中更为复杂的理论知识，所涉及的张量理论都是工程力学专业和工程专业学生所必须掌握的基本知识。

本书曾作为讲义为中国矿业大学（北京）的多届学生使用。在整个编写过程中，非常感谢诸多学生为书中的内容提出的建议，特别感谢我的几位研究生尤其周涛硕士为本书的校对所付出的心血。由于编写经验不足、水平有限，书中难免有不妥和错误之处，敬请各位前辈、同行及读者给予批评指正。

本书的出版得到了中国矿业大学（北京）越崎教材基金的资助，在此表示衷心的感谢！

宋彦琦

2014 年 10 月

前 言

张量理论是数学的一个分支学科，在力学中有着重要的应用。张量分析已成为研究力学理论的常用数学工具。

张量(Tensor)的研究可以追溯到很早，一开始是由高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)和克里斯托夫(Christoffel)在发展绝对微分几何时提出来的。1887 年，黎奇(Ricci)创立了张量分析。1901 年黎奇和他的学生——另一位意大利数学家列维 - 齐维他(Levi - Civita)对张量分析的算法做了进一步的阐述。但由于张量记号的概括抽象性使初学者迷惑，不容易看到公式的直观意义，初创时采用者极少。约 30 年后，爱因斯坦在 1915 年发表了关于广义相对论的著名论文，从数学工具上黎奇的张量分析起了基本的作用。这就重新引起了人们对张量研究的兴趣，并促进了张量分析的进一步发展。此后，张量分析在理论物理的发展上起了重要的作用。

张量之所以重要，不仅在于它可以把方程写得简洁、紧凑，更在于它可以满足一切物理定律必须与坐标系的选择无关的特性。近来，在物理、力学的科技书和教科书中以及科技文献中，越来越多的作者应用了张量分析和指标表示法。正如美国普林斯顿大学爱林根(A. C. Eringen)教授所指出："在今天，如果对张量分析没有一定程度的通晓，就不可能攻读大部分文献。"因此，张量分析对于科研工作者，特别是力学工作者是必不可少的。

很多专门介绍张量的书，大多从一般曲线坐标入手，引入张量的定义及其性质，这样往往会使初学者望而生畏。本书是一本阐述有关张量理论(包括张量代数和张量分析)的基本知识及其在弹性力学和流体力学中应用的简明教程。从简单的笛卡儿张量入手，由浅入深，目的是使读者能在较短的时间内掌握张量理论的基本知识及其在弹性力学和流体力学中的应用，以便为进一步学习后继课程和攻读力学等相关文献打下必要的基础。

编著者

2014 年 9 月

目　　录

第一章 张 量 代 数

本章简要地介绍了张量代数的基本知识,并列举若干示例,以使理论和应用相结合,易于读者掌握要点。首先介绍矢量的有关概念和性质,然后用坐标变换的方法引进张量的概念,接着讲述张量代数的基本知识。为使读者易于接受,本章只讲述直角坐标系下的卡氏张量。

第一节 概 述

在数学和物理中遇到的一些几何量和物理量都是与坐标系的取法无关的量。其中有一些比较简单的量,如平面图形的面积、有限物体的体积、质量密度和温度,它们都可以用一个数来表示,通常把它们叫做标量。还有一些比标量复杂一点的量,如力、速度等,可以用三维空间中标明方向的线段来表示这些物理量,数学上把这种量叫做矢量或向量。矢量服从平行四边形法则,用粗体小写字母,如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 等表示。这种表达形式称为不变性记法或称抽象记法。所谓"不变",意味着与坐标系的取法无关,也就是说,它并不因坐标系的改变而发生变化。

众所周知,在处理具体问题时,常常需要选定坐标系。当取不同的坐标系时将得到不同的分量,显然,矢量的分量与坐标系有关。虽然如此,同一矢量在不同坐标系下取得的不同分量之间必然可以通过坐标变换关系而找到它们之间的联系。于是,也可以用满足一定坐标变换关系的三个有序数来定义矢量,每个数称为矢量的分量。可以是标量矢量

随着科学技术的发展,又出现了比矢量更为复杂的几何量和物理量,这就是本书中重点介绍的张量。这些几何量和物理量具有复杂的性质,它们不能用标量和矢量来描述或表示。例如,固体中的一点由于内力而产生的应力,弹性体中任一体积元的形变以及转动惯量,等等。这些量只能用张量才能充分地描述和表示。实际上,张量的应用比我们熟悉的标量和矢量广泛得多,标量和矢量只是张量最简单的特例。

张量,作为一个数学实体,是矢量的发展和推广。张量有不变性记法和分量记法(常称之为指标记法)两种表示法。众所周知,矢量可以用一个有方向的线段简单明了地表示出来,可是对于张量却办不到,也就是说单纯从不变性记法来认识张量是有困难的。所以,我们借助于坐标系,把张量的不变性记法用形式上有点像矢量式的方式来表示,于是得到一组有序数,称之为张量的分量。显然,与矢量的分量一样,在不同的坐标系下,张量的分量也是不相同的,同一张量在不同坐标系下所取得的不同分量之间是可以通过坐标变换关系找到它们之间的联系。于是,同样可以用满足一定坐标关系的一组有序数来定义张量,这种定义法称为张量的指标记法。使用张量的指标记法的显著优点是能使力学中大量冗长的基本方程和数学推导大为简洁。一旦定义了 n 阶张量后,会发现标量和矢量也属于张量的范畴,分别代表零阶张量和一阶张量。

应当指出，张量和矢量一样，它的一个重要特点是其本身与用来描述它的任何具体坐标系无关，但其分量还是要通过一个适当的坐标系来定义。如果其分量是在笛卡儿直角坐标系中定义的，称为笛卡儿张量（简称为卡氏张量）；在一般坐标系中定义的，则称为一般张量，或者简单地称为张量。由于笛卡儿直角坐标系是一般坐标系中特殊的一种，所以笛卡儿张量也是一般张量的一个特殊情况。

第二节　矢　　量

由于张量和矢量密切相关，而且又是矢量的发展和推广，因此有必要从矢量入手进行讨论。

一、矢量及其表示法

物理中的位移、速度、力都是矢量。矢量的表示法有三种：

（1）矢量的直观表示法。利用三维空间中的有向线段表示矢量是最直观的表示法。有向线段的长度代表矢量的大小，这种方法不依赖于坐标系的选择。如图 1－1 所示，矢量用一个有大小和方向的量来表示，如 $\boldsymbol{v}$。这种简单的几何直观的定义不便于推广到张量。

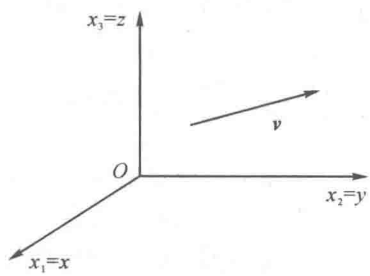


图 1－1　笛卡儿坐标与矢量

（2）矢量的分量表示法。选定一个坐标系，比如通常的正交直线坐标系（也称为卡氏直角坐标系），矢量对于该坐标系的分量为 v_x, v_y, v_z，则可用三个数（标量）的集合 $\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ 定义一个三维空间中的矢量。这种定义没有体现矢量的本质。例如，一个人的出生年、月、日，这 3 个数的集合显然不构成一个矢量。构成矢量的三个数应与坐标系有关，并随坐标系的改变按一定规则转换。

这种表示法可推广到张量，但其缺点是该表示法依赖于坐标系，写法不够简洁且缺乏几何直观性。

（3）用分解式定义矢量。即用沿 3 个坐标轴的单位矢量与其对应的分量可以写成

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = v_{1'}\boldsymbol{e}_{1'} + v_{2'}\boldsymbol{e}_{2'} + v_{3'}\boldsymbol{e}_{3'}$$

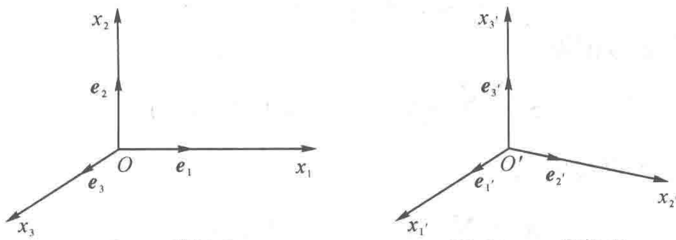
其中

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0),\quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$$

表示沿笛卡儿坐标轴的单位矢量，称为基矢量，如图 1－2 所示。

这 3 个互相正交的单位基矢量构成正交标准化基，并且具有如下的重要性质：

① 每个基矢量的模为 1，即



(a) $Ox_1x_2x_3$坐标系 (b) $O'x_{1'}x_{2'}x_{3'}$坐标系

图 1-2 笛卡儿坐标系的基矢量

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1$$

② 不同基矢量互相正交,即

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0, \quad \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0, \quad \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0$$

可以看到,在不同的坐标系中,分量与基矢量均不同,但它们组合起来得到的结果不变。

二、指标符号

上面所述用分量(v_x, v_y, v_z)或用基矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 来表示矢量的方法,如果推广到比三维更高的空间就有困难了。因此,产生了另一种方法。把 x, y, z 分别记为 x_1, x_2, x_3。这样,一个 n 维空间的矢量(无法用直观图表示)用分量表示为

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$$

它可视为一个 n 维的单行矩阵。同理,n 维空间的基矢量,可写为 $\boldsymbol{e}_i (i = 1, 2, \cdots, n)$,这时矢量 $\boldsymbol{v}$ 可以写成

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

其中

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{第 } i \text{ 个}}}{1}, 0, \cdots, 0)$$

对于一组 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,或 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,通常可记做 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 或 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$。当 x_i 或 a_i 单独出现时,它可代表 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 或 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的任意一个。i 所代表的正整数的取值范围应在每种具体情况下标明,比如上述 $i = 1, 2, \cdots, n$,该符号 i 叫做指标。一般来说,指标可以写在右上角或右下角,分别称为上指标和下指标,但当不涉及非正交坐标系中的矢量及张量分析时,仅限于采用下指标。采用指标的这种符号叫做指标符号。

第三节 指 标 记 法

一、求和约定

了解张量必须先知道张量的两项规定,即求和约定和张量指标。

在张量运算中,常常遇到求和。例如:

$$S = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \tag{1-1}$$

通常可用求和记号记为

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-2}$$

方程(1-2)也可以写成

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_jX_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-3}$$

$$S = \sum_{m=1}^{n} a_mX_m \qquad (m = 1,2,\cdots,n) \tag{1-4}$$

等等。

在张量记法中,为了简便,约定:每逢某个指标在一项中重复1次,就表示对该指标求和,指标取遍整数1,2,…,n(n表示空间维数)。这样重复的指标,称为哑指标。这个约定就是有名的爱因斯坦(Einstein)求和约定。按照这个约定,和式(1-2)可以省略求和记号$\sum\limits_{i=1}^{n}$,直接记为

$$S = a_iX_i \tag{1-5}$$

方程(1-2)中的指标i、方程(1-3)中的指标j和方程(1-4)中的指标m,均为哑指标。因为哑指标仅仅用来表示遍历求和,因此具体采用哪个字母对它是无关紧要的,如:

$$a_jb_j = a_kb_k = a_lb_l = \cdots$$

指标符号可以带有多个指标,即同一项中还可以出现几对哑指标,也就是说,求和约定也可以用来表示双重和式、三重和式等等。如:

$$S = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}X_iX_j$$

用爱因斯坦求和约定可将上式简写成

$$S = a_{ij}X_iX_j \tag{1-6}$$

式(1-6)中的指标i和j都是哑指标,这时每对哑指标都服从求和约定。

将表达式(1-6)展开,则它给出九项之和,即

$$\begin{aligned} S &= a_{ij}X_iX_j \\ &= a_{11}X_1X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 + a_{21}X_2X_1 + \\ &\quad a_{22}X_2X_2 + a_{23}X_2X_3 + a_{31}X_3X_1 + a_{32}X_3X_2 + a_{33}X_3X_3 \end{aligned}$$

可把上述展开分成两步进行,首先对i求和,再对j求和;反之亦然。即

$$\boxed{a_{ij}X_iX_j} = a_{1j}X_1X_j + a_{2j}X_2X_j + a_{3j}X_3X_j$$

而

$$\begin{aligned} a_{1j}X_1X_j &= a_{11}X_1X_1 + a_{12}X_1X_2 + a_{13}X_1X_3 \\ a_{2j}X_2X_j &= a_{21}X_2X_1 + a_{22}X_2X_2 + a_{23}X_2X_3 \\ a_{3j}X_3X_j &= a_{31}X_3X_1 + a_{32}X_3X_2 + a_{33}X_3X_3 \end{aligned}$$

类似地,可把三重和式

$$S = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}X_iX_jX_k \tag{1-7}$$

简写成

$$S = a_{ijk}X_iX_jX_k \tag{1-8}$$

显然,上述三重和式表示 27 项之和。

在此需要强调的是,在同一项中各对哑指标必须采用不同的符号,而像 $a_ib_iX_i$ 这样的表达式不在此约定范围之内。也就是说,如果应用求和约定,指标重复不能多于 1 次;如果遇到要对 3 个指标取相同的值并遍历求和,必须保留求和符号 $\sum$。在指标符号公式中如果出现同一项有 3 个或 3 个以上相同指标的重复而未保留求和符号 $\sum$,皆属于非法应用。因此,对于在同一项有 3 个或 3 个以上相同指标的表达式必须保留它的求和符号,即

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_iX_i$$

另外,如无特别声明,本书总取 $n = 3$(对二维空间 $n = 2$)。例如:

$$a_iX_i = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$$

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \qquad 3^1$$

$$a_kb_k = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad 3^1$$

$$a_i\boldsymbol{e}_i = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \qquad 3^1$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = {} & \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \\ & \sigma_{32}\varepsilon_{32} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\varepsilon_{21}\end{aligned} \qquad 3^2 = 9$$

二、张量指标

张量指标包含哑指标和自由指标。哑指标前文已介绍,不再赘述。现介绍自由指标。

考察下列线性代数方程组:

$$\begin{cases}a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = C_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = C_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = C_3\end{cases} \tag{1-9}$$

对每个方程应用爱因斯坦求和约定,则式(1-9)可写成

$$\begin{cases}a_{1j}X_j = C_1 \\ a_{2j}X_j = C_2 \\ a_{3j}X_j = C_3\end{cases}$$

还可以简写成

$$a_{ij}X_j = C_i \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1-10}$$

其中,指标 j 为哑指标;指标 i 是对每一项不重复的指标,在各项中只出现 1 次。这种在方程的各项中只出现 1 次的指标称为自由指标。一个自由指标每次可取整数 $1,2,\cdots,n$,与哑指标一样,若无特殊声明,本书亦取 $n = 3$,它表示方程个数。因此,这一指标符号方程式(1-10)实际上对应于 3 个代数方程。由此可知,式(1-10)就是式(1-9)的指标记法。

例如,设 $\boldsymbol{e}'_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 表示矢量,则

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{1-11}$$

表示

$$\boldsymbol{e}'_1 = A_{11}\boldsymbol{e}_1 + A_{12}\boldsymbol{e}_2 + A_{13}\boldsymbol{e}_3$$

$$e'_2 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + A_{23}e_3$$
$$e'_3 = A_{31}e_1 + A_{32}e_2 + A_{33}e_3$$

再如

$$c_i = a_{ij}b_j \tag{1-12}$$

表示

$$c_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3$$
$$c_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3$$
$$c_3 = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3$$

在式(1-11)和式(1-12)中，i 是自由指标，j 是哑指标。

如果在方程中出现2个自由指标，例如：

$$T_{ij} = A_{ik}A_{jk} \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{1-13}$$

其中，i 和 j 是自由指标；k 是哑指标。则式(1-13)是9个方程的简写，写成展开式为

$$T_{11} = A_{1k}A_{1k} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}$$
$$T_{12} = A_{1k}A_{2k} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$
$$\vdots$$
$$T_{33} = A_{3k}A_{3k} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}$$

指标符号作为一种简洁的符号系统可对公式起缩写作用，一方面通过哑指标对求和起缩写作用，另一方面通过自由指标可将方程组缩写为一个指标符号方程。为了避免混淆，在同一项中不同的自由指标不能采用同样符号，自由指标与哑指标也不能采用同一符号。此外，同一公式中不同项的对应自由指标则必须采用相同的指标符号，如式(1-10)中的 $a_{ij}X_j$ 不能写成 $a_{jj}X_j$，亦即自由指标与哑指标不能采用同一符号；同样，不能将式(1-10)写成 $a_{ij}X_j = C_k$，这样的表达式是无意义的，即出现在方程内的每项自由指标必须相同。

在注意到同一公式中对应的自由指标的对应关系的前提下，自由指标的符号也是可以任选的，比如式(1-10)可改写成

$$a_{kj}X_j = C_k \qquad (j,k = 1,2,3)$$

第四节　克罗内克符号

在卡氏直角坐标系下，由 δ_{ij} 表示的克罗内克(Kronecker)符号定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (当\ i = j\ 时) \\ 0 & (当\ i \neq j\ 时) \end{cases} \tag{1-14}$$

δ_{ij} 记号表示9个分量。由定义显然有

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{31} = \delta_{13} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$$

如果把它排成矩阵，则为

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是单位矩阵。

显然

$$\boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}} \tag{1-15}$$

δ_{ij} 的性质和作用：

（1）当 δ_{ij} 的指标取值为 1,2,…,n 时，

$$\boxed{\delta_{ii} = n}$$

特别地，在三维空间中，有

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{1-16}$$

（2）

$$\delta_{1j}a_j = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1$$
$$\delta_{2j}a_j = \delta_{21}a_1 + \delta_{22}a_2 + \delta_{23}a_3 = a_2$$
$$\delta_{3j}a_j = \delta_{31}a_1 + \delta_{32}a_2 + \delta_{33}a_3 = a_3$$

或表示成

$$\boxed{\delta_{ij}a_j = a_i} \tag{1-17}$$

（3）

$$\delta_{1j}T_{jk} = \delta_{11}T_{1k} + \delta_{12}T_{2k} + \delta_{13}T_{3k} = T_{1k}$$
$$\delta_{2j}T_{jk} = \delta_{21}T_{1k} + \delta_{22}T_{2k} + \delta_{23}T_{3k} = T_{2k}$$
$$\delta_{3j}T_{jk} = \delta_{31}T_{1k} + \delta_{32}T_{2k} + \delta_{33}T_{3k} = T_{3k}$$

或表示成

$$\boxed{\delta_{ij}T_{jk} = T_{ik}} \tag{1-18}$$

由式(1-17)和式(1-18)可见，δ_{ij} 在运算中起着指标置换的作用。即当 δ_{ij} 的某一指标与任意一个指标符号的一个指标构成哑指标时，所起的作用就是将该指标符号的这个指标换成 δ_{ij} 的另一个指标。

另外，还可写出：

$$\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \tag{1-20}$$

$$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3 \tag{1-21}$$

$$\delta_{ik}\delta_{kj}\delta_{jl} = \delta_{il} \tag{1-22}$$

等等。

用直接展开法极易证明上述各式。利用这些性质表示公式是方便的，例如：

（1）若 $\sigma_{11} = \sigma, \sigma_{22} = \sigma, \sigma_{33} = \sigma$，而其余分量为零，其中 σ 为常数。这时，9 个分量可以用一个公式统一表示为

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma\delta_{ij}}$$

（2）若 $S_{11} = \sigma_{11} - \sigma, S_{22} = \sigma_{22} - \sigma, S_{33} = \sigma_{33} - \sigma, S_{12} = \sigma_{12}, S_{21} = \sigma_{21}, S_{23} = \sigma_{23}, S_{32} = \sigma_{32}, S_{31} = \sigma_{31}, S_{13} = \sigma_{13}$ 共 9 个方程，可以通过 δ_{ij} 用一个方程表示为

$$\boxed{S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}}$$

（3）

$$a_{ij}x_j - \lambda x_i = a_{ij}x_j - \lambda\delta_{ij}x_j = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j$$

另外，若 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 表示卡氏直角坐标系中互相垂直的单位矢量，则

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

它表示两个基矢量的点积(dot product)。

第五节　置换符号

置换符号也称黎奇(Ricci)符号或列维-齐维他(Livi-Civita)符号,用记号 e_{ijk} 表示,共27个分量,定义为

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & (\text{当 } i,j,k=1,2,3 \text{ 顺时针排列时})\\ -1 & (\text{当 } i,j,k=1,2,3 \text{ 逆时针排列时})\\ 0 & (\text{当 } i,j,k \text{ 任何2个或3个指标相等时})\end{cases} \tag{1-23}$$

说明(图1-3):

(1) 顺时针排列:i,j,k 不取相同值,且按顺时针排列,即有

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=+1 \tag{1-23a}$$

(2) 逆时针排列:i,j,k 不取相同值,且按逆时针排列,即有

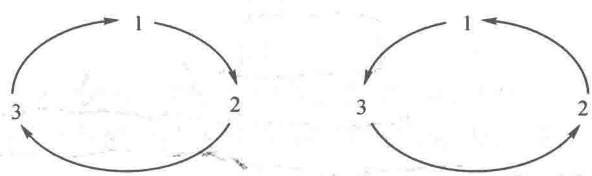
$$e_{321}=e_{213}=e_{132}=-1 \tag{1-23b}$$

(3) i,j,k 中有2个以上的指标取相同值时,例如

$$e_{111}=e_{121}=e_{112}=e_{222}=e_{323}=\cdots=0 \tag{1-23c}$$

从式(1-23a)和式(1-23b)可以看出

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji}$$



(a) 顺时针　　(b) 逆时针

图1-3　指标排序

若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是右手卡氏直角坐标系的单位基矢量,则利用置换符号可以将两单位基矢量的叉积写成

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

并且不难证明:

$$\boldsymbol{e}_k=\frac{1}{2}e_{ijk}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j$$

运用置换符号简化表达式是十分广泛的,利用置换符号可以简化公式。

(1) 表示行列式:

对于3行3列行列式,即

$$a=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

展开得

$$a=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

行列式展开后得到 6 项,3 项为正,3 项为负,利用式(1－23)可写为

$$a = e_{123}a_{11}a_{22}a_{33} + e_{312}a_{13}a_{21}a_{32} + e_{231}a_{12}a_{23}a_{31} + e_{321}a_{13}a_{22}a_{31} + e_{132}a_{11}a_{23}a_{32} + e_{213}a_{12}a_{21}a_{33}$$

采用置换符号,可以将上式右边的 6 项简写为 1 项,运算时就方便得多,即

$$\boxed{a = e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}}$$

1 交换行列式 a 中的任意两行,行列式的值变号。例如:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a$$

可记为

$$\boxed{e_{213}a = e_{ijk}a_{2i}a_{1j}a_{3k}}$$

对行列式 a 的行进行奇数次变换,行列式的值为 $-a$;进行偶数次交换,行列式的值为 a。一般可以表示为

$$\boxed{e_{lmn}a = e_{ijk}a_{li}a_{mj}a_{nk}} \tag{1-24}$$

2 类似地,交换行列式的列可表示为

$$\boxed{e_{ijk}a = e_{lmn}a_{li}a_{mj}a_{nk}} \tag{1-25}$$

充分运用置换符号及求和规则,在数学分析和运算过程中起到简化的作用。

(2) 表示矢量叉积的展开式:

设矢量

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

其中,每个矢量都可以用基矢量表示为

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{b} = b_j\boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{c} = c_k\boldsymbol{e}_k \tag{1-26}$$

根据向量的叉积乘法公式,有

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

展开得

$$\boldsymbol{c} = \overset{c_1}{(a_2b_3 - a_3b_2)}\boldsymbol{e}_1 + \overset{c_2}{(a_3b_1 - a_1b_3)}\boldsymbol{e}_2 + \overset{c_3}{(a_1b_2 - a_2b_1)}\boldsymbol{e}_3 \tag{1-27}$$

将式(1－27)与式(1－26)的第三式对比,并利用式(1－23),有

$$\begin{cases} c_1 = a_2b_3 - a_3b_2 = e_{123}a_2b_3 + e_{132}a_3b_2 = e_{1jk}a_jb_k \\ c_2 = a_3b_1 - a_1b_3 = e_{231}a_3b_1 + e_{213}a_1b_3 = e_{2jk}a_jb_k \\ c_3 = a_1b_2 - a_2b_1 = e_{312}a_1b_2 + e_{321}a_2b_1 = e_{3jk}a_jb_k \end{cases} \tag{1-28}$$

式(1－28)可简写为

$$\boxed{c_i = e_{ijk}a_jb_k} \tag{1-29}$$

置换符号 e_{ijk} 与克罗内克符号 δ_{ij} 是非常重要的量,在张量理论中应用广泛。它们可以通过恒等式

$$\boxed{e_{ijk}e_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} \ *$$

联系起来。可以证明下列各恒等式成立:

① $e_{ijk}e_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$

② $e_{ijk}e_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

③ $e_{ijk}e_{ljk} = 2\delta_{il}$

④ $e_{ijk}e_{ijk} = 6 = 3!$

证:① 设元素为 A_{ij} 的 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为

$$\det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

对行列式交换行或列,则符号发生变化,即

$$\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{11} & A_{13} \\ A_{22} & A_{21} & A_{23} \\ A_{32} & A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} = -\det\boldsymbol{A}$$

交换行,用置换符号表示为

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} = e_{ijk}\det\boldsymbol{A}$$

交换列,表示为

$$\begin{vmatrix} A_{1l} & A_{1m} & A_{1n} \\ A_{2l} & A_{2m} & A_{2n} \\ A_{3l} & A_{3m} & A_{3n} \end{vmatrix} = e_{lmn}\det\boldsymbol{A}$$

如果同时交换行和列,则

$$\begin{vmatrix} A_{il} & A_{im} & A_{in} \\ A_{jl} & A_{jm} & A_{jn} \\ A_{kl} & A_{km} & A_{kn} \end{vmatrix} = e_{ijk}e_{lmn}\det\boldsymbol{A}$$

若取 $A_{ij}' = \delta_{ij}$,则 $\det\boldsymbol{A} = 1$,得证。

② 因为

$$e_{ijk}e_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} e_{ijk}e_{lmk} &= \delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{km}) - \delta_{jl}(\delta_{im}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{km}) + \delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jm}) \\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{il}\delta_{jm} - 3\delta_{jl}\delta_{im} + \delta_{jl}\delta_{im} + \delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{jm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im} \end{aligned}$$

③ 将上式的 m 换成 j,得

$$e_{ijk}e_{ljk} = \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{jl}\delta_{ij}$$

$$= 3\delta_{il} - \delta_{il}$$
$$= 2\delta_{il}$$

④ 将上式的 l 换成 i，得

$$e_{ijk}e_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6 = 3!$$

第六节　关于指标记法的运算

一、代入

若有

$$a_i = U_{im}b_m \tag{1-30}$$

和

$$b_i = V_{im}c_m \tag{1-31}$$

为了把式(1-31)中 b_i 代入式(1-30)中，则根据指标记法的规定，必须首先把式(1-31)中的自由指标 i 换成 m，并把式(1-31)中的哑指标 m 换成其他指标(如 n)，即

$$b_m = V_{mn}c_n \tag{1-32}$$

$3^2=9$

此时，把式(1-32)代入式(1-30)，则得

$$a_i = U_{im}V_{mn}c_n \tag{1-33}$$

式(1-33)表示 3 个方程，每个方程在其右侧是具有 9 项的和式。

二、乘积

若

$$p = a_m b_m$$
$$q = c_m d_m$$

则

$$pq = a_m b_m c_n d_n$$

显然，$pq \neq a_m b_m c_m d_m$，因为这个表达式的右侧根本不符合求和约定，关于这点必须注意。

三、因式分解

如果

$$T_{ij}n_j - \lambda n_i = 0 \tag{1-34}$$

则应用克罗内克符号，可写出

$$n_i = \delta_{ij}n_j \tag{1-35}$$

把式(1-35)代入式(1-34)，得

$$T_{ij}n_j - \lambda\delta_{ij}n_j = 0$$

即