

自学参考用书

高中代数

GAO ZHONG DAI SHU

—— 浙江人民出版社 ——

自学参考用书

高中代数

崔东伯编著

國家圖書館藏

浙江人民出版社

自学参考用书

高中代数

崔东伯 编著

*

浙江人民出版社出版

浙江杭州印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本：787×1092 1/32 印张：13 5/8

1959年12月第1版

1978年11月第4次印刷

印数：30,001—180,000

统一书号：7103·1005

定 价：0.93 元

出版说明

应广大读者要求,将我社文化大革命前出版的《高中代数》、《高中三角》和杭州大学数学系一九七四年编写的《初等几何》等书,略作修订后重印和编印出版,统称《自学参考用书》,供具有高中文化程度的工、农、知识青年、在职干部和中学教师自学参考。

这几本书以帮助读者学习和掌握基础知识为主,按照适合自学的要求进行编写,除注意科学性和系统性外,文字也比较浅近。但与迅速发展的科学技术要求相比还是感到不足。存在的缺点和错误,希望读者批评指正。

浙江人民出版社

1978年6月

目 录

第 一 章	幂和方根	1
第 二 章	二次方程和可以化成二次方程的方程 ...	25
第 三 章	函数和它的图象	58
第 四 章	二元二次方程组	96
第 五 章	数列	121
第 六 章	指数	155
第 七 章	对数	171
第 八 章	排列组合和二项式定理	196
第 九 章	复数	254
第 十 章	不等式	297
第十一章	高次方程	367
习题答案		412

第一章 幂和方根

I. 乘 方

1. 乘方 一个正方形的边长2尺, 它的面积是 $2 \times 2 = 2^2$ 平方尺, 2^2 是2的2次幂, 或2的2次方.

一个立方体的边长2尺, 它的体积是 $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ 立方尺, 2^3 是2的3次幂, 或2的3次方.

又如 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$, 它是3的4次幂或3的4次方.

所以乘方就是求相同因数的积的运算.

乘方的一般形式: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} = a^n$

a^n 是 a 的 n 次幂或 a 的 n 次方, a 是幂的底数, n 是幂的指数.

负数的偶次幂是一个正数, 负数的奇次幂是一个负数.

例如: $(-2)^4 = 16$; $(-2)^3 = -8$;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{243}.$$

2. 幂的运算法则

(1) 同底数的幂相乘, 只要把各因数的指数的和做指数, 底数不变.

例如: $a^4 \cdot a^5 = a^{4+5} = a^9$;

$$a^3 \cdot a^5 \cdot a^2 = a^{3+5+2} = a^{10};$$

$$\therefore a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (m, n \text{ 都是正整数})$$

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p = a^{m+n+p}, (m, n, p \text{ 都是正整数})$$

(2) 同底数的幂相除，在被除数的指数大于除数的指数的时候，只要把被除数的指数减去除数的指数所得的差做指数，底数不变。

例如： $a^8 \div a^7 = a^{8-7} = a; (a \neq 0)$

$$\therefore a^m \div a^n = a^{m-n} (m, n \text{ 都是正整数}, m > n, a \neq 0)$$

(3) 把一个幂乘方，只要把这个幂的指数乘以乘方的指数，底数不变。

例如： $(a^6)^3 = a^{18};$

$$\therefore (a^m)^n = a^{mn}. (m, n \text{ 都是正整数})$$

(4) 把一个积乘方，只要把每个因数分别乘方。

例如： $(ab)^5 = a^5 b^5;$

$$(abc)^6 = a^6 b^6 c^6;$$

$$\therefore (ab)^n = a^n b^n; (n \text{ 是正整数})$$

$$(abc)^n = a^n b^n c^n. (n \text{ 是正整数})$$

(5) 把一个分式乘方，只要把分子分母分别乘方。

例如： $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}; (b \neq 0)$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. (n \text{ 是正整数}, b \neq 0)$$

3. 多项式的平方

因 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

故 $(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)c$

$$= a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

同理求得：

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab \\ + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

故多项式的平方等于各项平方的和加上每两项乘积的2

倍.

例1 计算: $(-9x^3y^2)^2 \cdot (-4x^2y^3)^3 \div (-6x^4y^4)^3$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (-9x^3y^2)^2 \cdot (-4x^2y^3)^3 \div (-6x^4y^4)^3 \\ & = 81x^6y^4 \cdot (-64x^6y^9) \div (-216x^{12}y^{12}) \\ & = 81 \times 64x^{12}y^{13} \div 216x^{12}y^{12} = 24y. \end{aligned}$$

例2 计算: $(a^2b)^n \cdot (ab^2)^{n+1} \div (a^3b^3)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (a^2b)^n \cdot (ab^2)^{n+1} \div (a^3b^3)^{n-1} \\ & = a^{2n}b^n \cdot a^{n+1}b^{2n+2} \div a^{3n-3}b^{3n-3} \\ & = a^{3n+1}b^{3n+2} \div a^{3n-3}b^{3n-3} \\ & = a^{3n+1-3n+3}b^{3n+2-3n+3} = a^4b^5. \end{aligned}$$

例3 计算: $(x^3-3x^2-2x+1)^2$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & (x^3-3x^2-2x+1)^2 = (x^3)^2 + (-3x^2)^2 \\ & + (-2x)^2 + 1^2 + 2x^3(-3x^2) + 2x^3(-2x) \\ & + 2x^3 \cdot 1 + 2(-3x^2)(-2x) + 2(-3x^2) \cdot 1 \\ & + 2(-2x) \cdot 1 = x^6 + 9x^4 + 4x^2 \\ & + 1 - 6x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 12x^3 - 6x^2 - 4x \\ & = x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 4x + 1. \end{aligned}$$

习 题 一

1. 计算:

$$(1) \left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5c}{6a}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b}{3d}\right)^2;$$

$$(2) \left[\left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2 \div \left(\frac{mnp}{a^2b}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6 \div \left(\frac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right].$$

2. 计算:

$$(1) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z\right)^2;$$

$$(2) (1-2a-3a^2+4a^3)^2.$$

3. 求证:

$$(1) (2x^3-x^2-3x+1)^2 = (-2x^3+x^2+3x-1)^2;$$

$$(2) (a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2.$$

II. 方 根

1. 方根 如果一个数的 n 次幂等于 a , 那么这个数就叫做 a 的 n 次方根. 例如: $x^n = a$, x 就是 a 的 n 次方根, 用记号 $x = \sqrt[n]{a}$ 来表示, a 叫做被开方数, n 叫做根指数, 所以开方是乘方的逆运算.

2. 方根的性质 开方是乘方的逆运算, 现在按照根指数是奇数或偶数分别来研究方根的性质:

(1) 奇次方根的性质 因为正数的奇次幂是正数, 所以正数的奇次方根必须是正数, 且方根的个数不能多于一个.

$$\text{例如: } \because 4^3 = 64, \therefore \sqrt[3]{64} = 4.$$

因为负数的奇次幂是负数, 所以负数的奇次方根必须是负数, 且方根的个数不能多于一个.

$$\text{例如: } \because (-5)^3 = -125,$$

$$\therefore \sqrt[3]{-125} = -5.$$

因为零的奇次幂是零, 故零的奇次方根还是零.

归纳以上的结论, 得出奇次方根的性质:

正数的奇次方根, 不能多于一个, 并且必须是正数; 负数的奇次方根, 不能多于一个, 并且必须是负数; 零的奇次方根只有唯一的值, 就是零.

(2) 偶次方根的性质 因为正数的偶次幂是正数, 而负数的偶次幂也是正数, 所以正数的偶次方根, 必须是两个相反的数, 而且不能多于两个; 其中正的方根叫做算术根, 当 a 是正数, n 是偶数的时候, 记号 $\sqrt[n]{a}$ 表示的是算术根.

例如: $\because 7^2=49, (-7)^2=49,$

$\therefore \sqrt{49}=\pm 7(+7 \text{ 是算术根}).$

因为正数或负数的偶次幂都是正数, 所以负数的偶次方根没有意义; 零的偶次幂是零, 所以零的偶次方根还是零.

归纳以上的结论, 得出偶次方根的性质:

正数的偶次方根, 必须是两个相反的数, 并且不能多于两个; 负数的偶次方根没有意义; 零的偶次方根, 只有唯一的值, 就是零.

例 1 求下列各式的平方根:

(1) $\sqrt{3^2};$ (2) $\sqrt{(-3)^2};$

(3) $\sqrt{a^2};$ (4) $\sqrt{(m-n)^2}.$

解 (1) $\sqrt{3^2}=3;$ (2) $\sqrt{(-3)^2}=3;$

(3) $\sqrt{a^2}=|a|;$ (4) $\sqrt{(m-n)^2}=|m-n|.$

例 2 在下列各种情况, 求 $\sqrt{(a-2)^2}$ 的值,

(1) $a>2;$

(2) $a<2.$

解 (1) 如果 $a>2$, 则 $a-2$ 是正数,

$\therefore \sqrt{(a-2)^2}=a-2;$

(2) 如果 $a<2$, 则 $2-a$ 是正数,

$\therefore \sqrt{(a-2)^2}=\sqrt{(2-a)^2}=2-a;$

例 3 当 n 是什么数值时, 等式 $\sqrt[n]{a^n}=a$ 是正确的?

解 当 $a \geq 0$, n 是偶数或奇数时, 则等式 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 是正确的;

当 $a < 0$, n 是奇数时, 则等式 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 是正确的;

当 $a < 0$, n 是偶数时, 则等式 $\sqrt[n]{a^n} = a$ 不正确.

3. 完全平方数的开方 如果一个有理数 a 等于另一个有理数 b 的平方, 那么这个有理数 a 就叫做完全平方数. 因为负数的偶次方根没有意义, 所以负数都不能是完全平方数. 要把一个完全平方数开平方, 可以用开平方的方法, 求出它的算术根 b , 则所求的平方根为 $\pm b$.

例如:

求 $\sqrt{533.61}$

$$\sqrt{533.61} = 23.1$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ 3 \overline{) 133} \\ \underline{129} \\ 461 \\ 1 \overline{) 461} \\ \underline{461} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{533.61} = \pm 23.1$$

4. 非完全平方数的正数开平方 我们已经知道所有的负数都不是完全平方数, 而所有的正数也并不都是完全平方数. 例如, 2 就不是一个完全平方数. 意思就是没有一个有理数的平方能够等于 2.

例如: 求 2 的近似平方根(算术根)精确到 0.001.

$$\sqrt{2} = 1.414$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 24 \overline{) 100} \\
 \underline{4 } \\
 281 \overline{) 400} \\
 \underline{1 } \\
 2824 \overline{) 11900} \\
 \underline{4 } \\
 604
 \end{array}$$

精确到 0.001, 则 1.414 是 2 的不足近似值; 1.415 是 2 的过剩近似值.

精确到 0.01, 则 1.41 是 2 的不足近似值; 1.42 是 2 的过剩近似值.

精确到 0.1, 则 1.4 是 2 的不足近似值; 1.5 是 2 的过剩近似值.

例 1 求 $\sqrt{3}$ 精确到 0.1.

解 $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \cdot 10}}{10} = \frac{\sqrt{300}}{10} \therefore 1.7 < \sqrt{3} < 1.8$

例 2 求 $\sqrt{7}$ 精确到 $\frac{1}{5}$.

解 $\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7 \cdot 5}}{5} = \frac{\sqrt{175}}{5} \therefore \frac{13}{5} < \sqrt{7} < \frac{14}{5}$

习 题 二

1. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{64009}$; (2) $\sqrt{2.89}$; (3) $\sqrt{0.00080089}$.

2. 求证:

(1) 没有一个有理数, 它的平方能够等于 3;

(2) 没有一个有理数, 它的立方能够等于 2.

3. 求 $\sqrt{5}$ 精确到 0.1.

4. 求 $\sqrt{2}$ 精确到 $\frac{1}{15}$.

5. 若 $a < 0$, $\sqrt{a^2}$ 等于什么?

III. 实 数

1. 无理数 我们已经知道整数和分数总称有理数. 任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式. 例如: $3=3.0$; $-\frac{12}{5}=-2.4$; $\frac{1}{3}=0.333\cdots$.

因为有限小数都可以改写成分母是 10 的某次幂的分数, 所以有限小数都是有理数. 无限循环小数都可以化成分数 (以后再证明), 所以无限循环小数也都是有理数.

上面已经证明 2 的平方根不是一个有理数, 而是一个无限不循环小数, 它不能化成分数.

无限不循环小数叫做无理数.

在含无理数的运算中, 是应用无理数的近似值的. 例如:

$\sqrt{3}=1.73205\cdots$, 精确到 0.1、0.01、0.001、0.0001、等等的不足近似值分别是 1.7、1.73、1.732、1.7320 等等; 而精确到 0.1、0.01、0.001、0.0001 等等的过剩近似值分别是 1.8、1.74、1.733、1.7321 等等. 如果无限地继续近似值的计算过程, 所得对应的过剩近似值和不足近似值的差, 可以小于任何指定的正数.

2. 实数 有理数和无理数总称实数.

(1) 所有的实数, 都可以用有限小数或无限小数表示.

(2) 每一个正实数有一个和它相反的负实数, 例如: 3 和 -3 、 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$ 等等.

(3) 正数的绝对值, 就是它的本身; 负数的绝对值, 是和它相反的正数; 零的绝对值还是零. 例如: $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ 、 $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ 、 $|- \sqrt{2}| = \sqrt{2}$ 、 $|0| = 0$ 等等.

(4) 所有的实数, 都可以用数轴上的点表示.

用数轴上的点, 表示有理数, 在初中代数里已经学过, 现在说明怎样用数轴上的点表示无理数.

例如: $\sqrt{2} = 1.414213\cdots$.

表示相同精确度的不足近似值和过剩近似值的两点, 就在数轴上截得一条线段. 所得线段的长度, 随着精确度的增大而逐渐缩小直到趋近于零. 因此只能有一个点属于所有这些线段. 这个点就表示这个无理数. 下面的 A 点就表示 $\sqrt{2}$.



图 1

实数和数轴上的点是一一对应的.

(5) 实数大小的比较 设有两个实数 α 和 β , 并且设数轴上的 A 点表示实数 α , B 点表示实数 β .

1) 若 A 点在 B 点的左面, 则 $\alpha < \beta$;

2) 若 A 点和 B 点重合则 $\alpha = \beta$.

由此可知:

1) 任何正实数大于零; 任何负实数都小于零; 任何正实数都大于任何负实数.

2) 若两个正实数的绝对值相等, 则这两个正实数相等; 若

两个正实数的绝对值不等, 则绝对值大的正实数较大. (S)

3) 若两个负实数的绝对值相等, 则这两个负实数相等; 若两个负实数的绝对值不等, 则绝对值大的负实数较小. (B)

3. 实数的运算

(1) 加法 例如

$$\alpha = \sqrt{3} = 1.73205\ldots$$

$$\beta = \sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

$$\text{求 } \alpha + \beta = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.73205\ldots + 1.41421\ldots$$

两个正无理数 α 和 β 相加, 就是求一个数 r , 使它大于这两个无理数的任意一组对应的不足近似值的和, 小于任意一组对应的过剩近似值的和. 这样的 一个数 r 是存在的, 并且只有一个.

所以如果求 α 与 β 的和, 精确度到 0.1,

则 $r = \alpha + \beta = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.7 + 1.4 = 3.1$

或 $r = \alpha + \beta = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.8 + 1.5 = 3.3.$

如果求 α 与 β 的和, 精确度到 0.01,

则 $r = \alpha + \beta = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.73 + 1.41 = 3.14$

或 $r = \alpha + \beta = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1.74 + 1.42 = 3.16.$

减法是加法的逆运算, α 减去 β 就是求一个数 x 使

$$\beta + x = \alpha.$$

(2) 乘法 例如

$$\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1.73205\ldots \times 1.41421\ldots$$

两个正无理数 α 和 β 相乘, 就是求一个数 r , 使它大于这两个无理数的任意一组对应的不足近似值的积, 而小于任意一组对应的过剩近似值的积. 这样的 一个数 r 是存在的, 并且只有一个.

所以如果求 α 和 β 的积, 精确度到 0.1,

则 $\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1.7 \times 1.4 = 2.38$

或 $\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1.8 \times 1.5 = 2.70$.

如果求 α 与 β 的积精确度到 0.01,

则 $\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1.73 \times 1.41 = 2.4393 \approx 2.44$

或 $\alpha \cdot \beta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 1.74 \times 1.42 = 2.4708 \approx 2.47$.

除法是乘法的逆运算, α 除以 β , 就是求一个数 x , 使

$$\beta x = \alpha.$$

(3) 乘方 求正无理数 α 的 n 次方, 就是求 n 个 α 相乘的积.

开方是乘方的逆运算, α 开 n 次方, 就是求一个数 x , 使

$$x^n = \alpha.$$

注意: 负无理数的运算法则, 可以依照负有理数的运算法则得出. 有理数的运算性质, 如加法交换律、加法结合律、乘法交换律、乘法结合律、乘法对于加法的分配律等等, 在实数范围里仍然保持. 同理, 不等式在有理数范围里的性质, 在实数范围里也仍然保持.

IV. 根 式

1. 根式 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, 当 n 为奇数时, a 可以是任何实数; 当 n 为偶数时, a 可以是任何正实数或者零, 否则就不是根式. 例如: $\sqrt[3]{-2}$; $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ 等都是根式, 而 $\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-\frac{2}{3}}$ 等就不是根式.

当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时, 则 $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

当 a 是正数或者零的时候, 则 $\sqrt[n]{a^n} = a$. (n 是大于 1 的整

数)

当 a 是负数的时候, 若 n 为奇数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = a$; 若 n 为偶数, 则 $\sqrt[n]{a^n} = -a$. 例如,

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2, \quad \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{2^2} = 2 = -(-2).$$

因 $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{-2} = -\sqrt{2}$, 所以任何负数的奇次方根都可以化成和某一个算术根相反的数. 因此我们研究根式的性质, 只要研究根的性质就可以了.

2. 根式的基本性质 对于算术根来说, 一个根式的根指数和被开方数的指数, 都乘以一个正整数, 这个根式的值不变. 用式子来表示, 就是:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

证 $(\sqrt[n]{a^m})^{np} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = (a^m)^p = a^{mp}$

$$(\sqrt[np]{a^{mp}})^n = a^{mp}$$

所以 $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[np]{a^{mp}}$ 都是 a^{mp} 的 np 次的算术根, 但这样的算术根只有一个, 所以 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

(1) 异次根式可以化为同次根式.

例 1 把 $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt[6]{xz^2}$ 化为同次根式.

解 $\sqrt[3]{xy^2} = \sqrt[6]{x^2y^4}$, $\sqrt{yz} = \sqrt[6]{y^3z^3}$, $\sqrt[6]{xz^2} = \sqrt[6]{xz^2}$

例 2 不求方根的值比较 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 和 $\sqrt[4]{\frac{1}{10}}$ 的大小.

解 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{9}}$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{3}} > \sqrt[4]{\frac{1}{10}}$$

(2) 若被开方数是一个实数的幂, 并且幂的指数和根指数有公约数, 则这个公约数可以约去.