

当一道道疑似难题摆在你面前时，是胸有成竹，还是找不着头绪？如果是前者，那恭喜你，你已经跨越了教材与考试之间的差距；如果是后者，那你也别急，《经纶学典·教材解析》在教材与考试间为你搭建一个沟通平台。

不少同学有这样的感觉：教材都熟悉了，课堂上也听懂了，但考试却取不到好成绩。原因在于教材内容与考试要求有差距，课堂教学与选拔性考试有差别。这就需要在教材之上、课堂之外能够得到补充、提升，直至达到高考的选拔要求。本书就是从以下两个方面填补这种差距。

首先是对教材的深度挖掘。教材内容通俗易懂，但里面包含着丰富的信息，我们把教材所包含的信息挖掘出来，并进行系统整理，让知识内涵和外延、知识间的联系充分展现。

第二是对课堂教学的补充和拓展。本书不是对课堂教学的重复，而是在课堂教学基础上，对课堂教学进行补充、提高，挖掘那些学生难以理解、难以掌握的内容，进行归纳和总结，为学生穿起一条规律性的“线”。数学侧重解题方法、解题技巧、解题思路的整理，注重方法的拓展，找出最优的解题方法，对本节内容与其他小专题内容进行归纳总结。这些由于课堂教学时间限制或教师水平发挥的问题，在课堂上并没有全部传授给学生，而这些恰恰就是考试中要考查的，学生拉开差距的所在。

正是本着上述编写理念，本丛书以学生为中心，用最易理解的表现形式呈现学习中难以理解的部分。希望本书为你的成长助力，有更好的想法和意见请登录：www.jing-lun.cn。

读者反馈表

尊敬的读者：

您好！感谢您使用《经纶学典·教材解析》！

为了不断提高图书质量，恳请您写下使用本书的体会与感受，我们将真诚地吸纳。在修订时将刊登您的意见，并予以一定的奖励，以表达我们诚挚的谢意。

读者简介	姓名	性别	出生年月
	所在学校	通讯地址	
	联系方式	(H): 手机:	(O): E-mail:
本书情况	学科	版本	年级
您对本书栏目的评价： 1. 教材梳理： 全面 <input type="checkbox"/> 一般 <input type="checkbox"/> 不全面 <input type="checkbox"/> 2. 教材拓展： 难 <input type="checkbox"/> 合理 <input type="checkbox"/> 易 <input type="checkbox"/> 3. 典型题解： 全面 <input type="checkbox"/> 不全面 <input type="checkbox"/> 4. 针对性练习： 难 <input type="checkbox"/> 合理 <input type="checkbox"/> 易 <input type="checkbox"/> 5. 拓展阅读： 需要 <input type="checkbox"/> 不需要 <input type="checkbox"/> 6. 五年高考回放： 需要 <input type="checkbox"/> 不需要 <input type="checkbox"/>		您对本书体例形式的评价： 1. 栏目设置： 过多 <input type="checkbox"/> 适中 <input type="checkbox"/> 过少 <input type="checkbox"/> 2. 题空： 过大 <input type="checkbox"/> 正好 <input type="checkbox"/> 过小 <input type="checkbox"/> 3. 版式： 美观 <input type="checkbox"/> 一般 <input type="checkbox"/> 不美观 <input type="checkbox"/> 4. 封面： 美观 <input type="checkbox"/> 一般 <input type="checkbox"/> 不美观 <input type="checkbox"/>	
您的购买行为： 1. 您购买本书的途径： 广告 <input type="checkbox"/> 教师推荐 <input type="checkbox"/> 家长购买 <input type="checkbox"/> 学校统一购买 <input type="checkbox"/> 自己购买 <input type="checkbox"/> 同学推荐 <input type="checkbox"/> 2. 您购买本书的主要原因(可多选)： 广告宣传 <input type="checkbox"/> 包装形式 <input type="checkbox"/> 内容 <input type="checkbox"/> 图书价格 <input type="checkbox"/> 封面设计 <input type="checkbox"/> 书名 <input type="checkbox"/>			
您对本书的其他意见： 			

欢迎登录：www.jing-lun.cn

通信地址：南京红狐教育传播研究所(南京市租用16-02#信箱)

邮编：210016

目录

M U L U

第一章 空间几何体

1.1 柱体、锥体、球体	1
1.1.1 柱体	1
1.1.2 锥体	1
1.1.3 球体	1
1.2 棱柱、棱锥、棱台	9
1.2.1 棱柱	9
1.2.2 棱锥	11
1.2.3 棱台	15
1.3 圆柱、圆锥、圆台	20
1.3.1 圆柱	20
1.3.2 圆锥	22
1.3.3 圆台	24
1.4 球	26
1.4.1 球	26
1.4.2 球的表面积和体积	28
本章小结	30

第二章 平面、直线、点

2.1 平面	34
2.1.1 平面的基本性质	34
2.1.2 平面的画法	36
2.1.3 平面的表示	36
2.2 直线	38
2.2.1 直线的画法	38
2.2.2 直线的表示	39
2.2.3 直线的方程	40
2.2.4 直线的斜率	41
2.2.5 直线的截距	42
2.3 平面与直线的关系	44
2.3.1 平面与直线的平行	44
2.3.2 平面与直线的垂直	46
2.3.3 平面与直线的斜交	47
2.3.4 平面与直线的距离	48
2.4 平面与平面的关系	50
2.4.1 平面与平面的平行	50
2.4.2 平面与平面的垂直	52
2.4.3 平面与平面的斜交	54
2.4.4 平面与平面的距离	55
本章小结	56

第三章 直线与方程

3.1 直线的倾斜角与斜率	103
3.1.1 倾斜角与斜率	103
3.1.2 两条直线平行与垂直的判定	107
3.2 直线的方程	113
3.2.1 直线的点斜式方程	113
3.2.2 直线的两点式方程	113
3.2.3 直线的一般式方程	113
3.3 直线的交点坐标与距离公式	121
3.3.1 两条直线的交点坐标	121
3.3.2 两点间的距离	127
3.3.3 点到直线的距离	132
3.3.4 两条平行直线间的距离	132
本章总结	140

第四章 圆与方程

4.1 圆的方程	146
4.1.1 圆的标准方程	146
4.1.2 圆的一般方程	151
4.2 直线、圆的位置关系	157
4.2.1 直线与圆的位置关系	157
4.2.2 圆与圆的位置关系	164
4.2.3 直线与圆的方程的应用	170
4.3 空间直角坐标系	177
4.3.1 空间直角坐标系	177
4.3.2 空间两点间的距离公式	181
本章总结	186

第二章 空间几何体



1.1 空间几何体的结构

1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征

1.1.2 简单组合体的结构特征

A 教材梳理

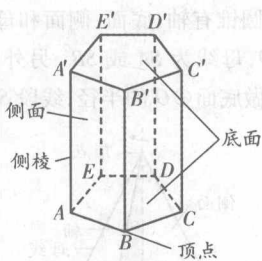
知识点一 棱柱的结构特征

1. 概念

一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱.

2. 棱柱的各部分名称

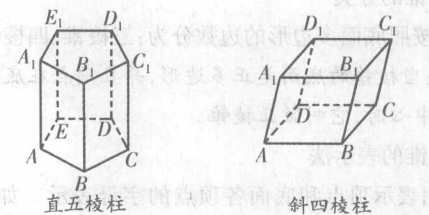
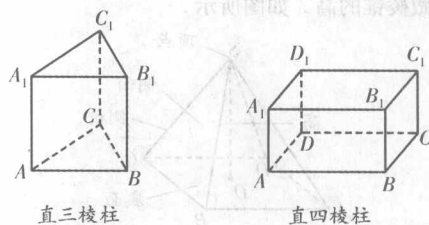
棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面;相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点. 如图所示.



3. 棱柱的分类

(1) 根据底面多边形的边数分为:三棱柱、四棱柱、五棱柱等.

(2) 按侧棱与底面是否垂直分为:直棱柱、斜棱柱. 直棱柱又可按底面是不是正多边形分为正棱柱、其他直棱柱. 直棱柱:侧棱与底面垂直的棱柱;斜棱柱:侧棱与底面不垂直的棱柱;正棱柱:底面多边形为正多边形的直棱柱(本章研究的棱柱多为直棱柱). 如图所示.



4. 棱柱的表示法

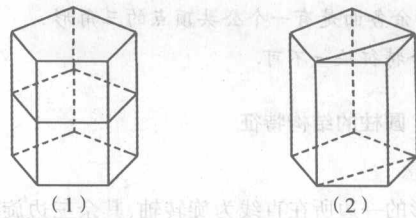
(1) 用表示底面各顶点的字母表示,如上图中的直五棱柱可记为棱柱 $A_1B_1C_1D_1E_1-ABCDE$.

(2) 用一条对角线(不在同一面上的两个顶点的连线)端点字母表示,如直五棱柱 AC_1 . 这种记法要说明棱柱的底面边数,若记为棱柱 AC_1 ,则无法确定它是几棱柱.

5. 棱柱的简单性质

(1) 侧棱都相等,侧面都是平行四边形.

(2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形,如图(1)所示.



(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形, 如图(2)所示.

注意:棱柱有两个本质特征: 一个是两个平面互相平行; 另一个是其余各面都是四边形, 并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行. 这两个特征缺一不可.

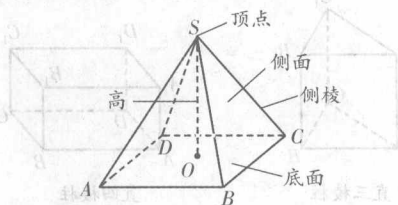
知识点二 棱锥的结构特征

1. 概念

一般地, 有一个面是多边形, 其余各面都是有一个公共顶点的三角形, 由这些面所围成的多面体叫做棱锥.

2. 棱锥各部分名称

在棱锥中, 这个多边形面叫做棱锥的底面或底; 有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的侧面; 各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点; 相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱; 顶点到底面的距离叫做棱锥的高. 如图所示.



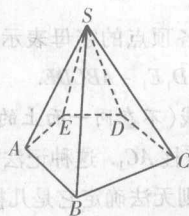
3. 棱锥的分类

一般按照底面多边形的边数分为: 三棱锥、四棱锥、……

注意:当棱锥的底面是正多边形, 并且顶点在底面内的射影为底面中心时, 它叫做正棱锥.

4. 棱锥的表示法

(1) 用表示顶点和底面各顶点的字母表示. 如图, 此棱锥可记为棱锥 $S-ABCDE$.



(2) 用表示顶点和底面一条对角线端点的字母表示, 如五棱锥 $S-AC$, 五棱锥 $S-AD$ 等.

注意:由棱锥的概念可得出棱锥的两个本质特征.

(1) 有一个面是多边形.

(2) 其余各面是有一个公共顶点的三角形.

这两个特征缺一不可.

知识点三 圆柱的结构特征

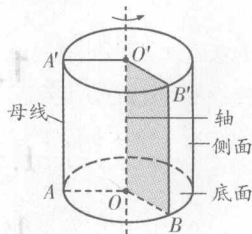
1. 概念

以矩形的一边所在直线为旋转轴, 其余三边旋转形成的

面所围成的旋转体叫做圆柱.

2. 圆柱的各部分名称

在圆柱中, 旋转轴叫做圆柱的轴; 垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面; 平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面; 无论旋转到什么位置, 不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线. 如图所示.



注意:圆柱有无数条母线, 它们平行且相等.

3. 圆柱的表示法

用表示它的轴的字母, 即表示两底面圆心的字母表示, 上图中的圆柱可记作圆柱 $O'O$.

4. 圆柱的简单性质

(1) 平行于底面的截面是与底面大小相同的圆.

(2) 过轴的截面(轴截面)是全等的矩形.

(3) 过任意两条母线的截面是矩形.

注意:圆柱和棱柱统称为柱体.

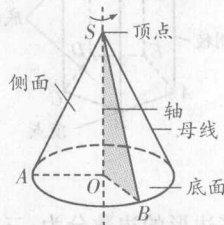
知识点四 圆锥的结构特征

1. 概念

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴, 其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.

2. 圆锥的各部分名称

同圆柱一样, 圆锥有轴、底面、侧面和母线, 如图所示, 轴为 SO , 底面为 $\odot O$, 母线为 SA 或 SB . 另外, S 叫做圆锥的顶点, OA (或 OB) 叫做底面 $\odot O$ 的半径, 线段 SO 是圆锥的高.



3. 圆锥的表示法

圆锥用表示它的轴的字母表示, 上图中的圆锥可记作圆锥 SO .

4. 圆锥的简单性质

(1) 平行于底面的截面都是圆.

(2) 过轴的截面是全等的等腰三角形.

注意:圆锥与棱锥统称为锥体.

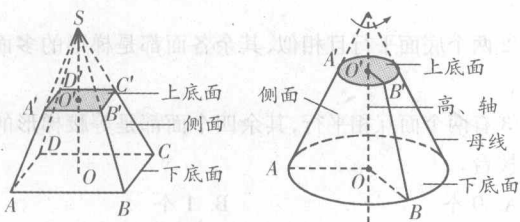
知识点五 圆台和棱台的结构特征

1. 概念

用平行于棱(圆)锥底面的平面去截棱(圆)锥,底面与截面之间的部分,这样的多面体(旋转体)叫做棱(圆)台.

2. 棱(圆)台各部分的名称

棱(圆)台的上、下底面分别是原棱(圆)锥的截面和底面.原棱(圆)锥的侧面被平面截去后剩余的曲面叫做棱(圆)台的侧面;原棱锥的侧棱被平面截去后剩余的部分叫做棱台的侧棱;原圆锥的母线被平面截去后剩余的部分叫做圆台的母线.如图.



3. 棱(圆)台的表示法

(1) 圆台的表示法:

用表示轴的字母表示,如圆台 OO' .

(2) 棱台的表示法:

①用各顶点表示:如四棱台 $ABCD - A'B'C'D'$.

②用对角面表示:如四棱台 AC' .

注意:(1)棱台的结构特征:一是上、下底面互相平行;二是各侧棱延长后必交于一点.

(2)怎样检查一个多面体是否是棱台呢?根据棱台的定义,知棱台的两底面应该是平行的相似多边形,所以它必须满足:①两底面的对应边分别平行;②这些对应边成比例.如果具备这两个条件就是棱台.

(3)圆台可以看作是由圆锥截得的,也可以看作是由直角梯形绕其直角边旋转而成的.

(4)圆台与棱台统称为台体.

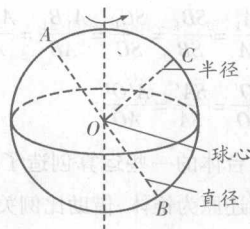
知识点六 球的结构特征

1. 概念

以半圆的直径所在直线为旋转轴,半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体,简称球.

2. 球的各个元素

半圆的圆心叫做球的球心;半圆的半径叫做球的半径;半圆的直径叫做球的直径.如图所示.



3. 球的表示法

球常用表示球心的字母表示,如上图中的球记作球 O .

注意:球、圆柱、圆锥、圆台都可以看成是由一个平面图形绕直线旋转而成的,它们都是旋转体.

知识点七 简单组合体

现实世界中的物体表示的几何体,除柱体、锥体、台体和球体等简单几何体外,还有大量的几何体是由简单几何体组合而成的,这些几何体叫做简单组合体.

棱柱、棱锥、棱台是由多个平面图形围成的几何体,像这样,由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体.

常见的组合体有三种类型,一是多面体与多面体的组合,二是多面体与旋转体的组合,三是旋转体与旋转体的组合.

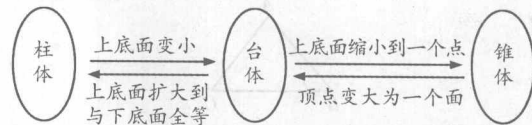
注意:解决组合体问题时,常把它分解成简单几何体,同时要注意组合的方式是切或是接等.

B 教材拓展

拓展点一 用运动变化的观点看待几何体的形式

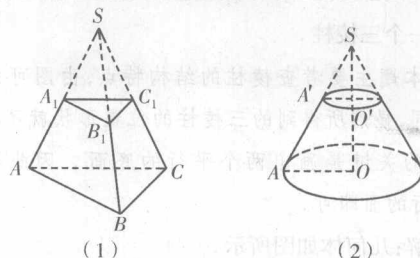
圆柱、圆锥、圆台和球都可以看作是平面图形绕轴旋转形成的几何体.棱柱可以看成是一个多边形(包含图形围成的平面部分)上各点都沿着同一个方向移动相同的距离所形成的几何体.棱锥可以看成是棱柱的一个底面缩小为一个点时而形成的几何体.棱台可以看成是棱柱的一个底面均匀缩小时而形成的几何体.

柱、锥、台体有如下关系:



拓展点二 台体与锥体中的有关比例

由台体的概念知,台体的上、下底面相似.



如图(1),有 $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$,

如图(2),有 $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{A'O'}{AO}$.

这一种相似为台体的一些运算创造了条件,因此台体中有关问题的处理可还原为锥体,借助比例关系求解.

C 典型题解

► 问题一 识图

例题 1 如图所示的物体是运动器材——空竹,你能描述它的几何结构特征吗?



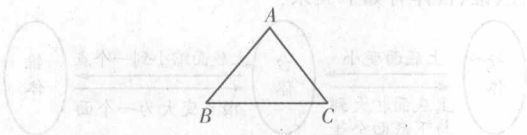
[解析] 本题主要考查组合体知识,关键是熟识简单几何体的结构特征.可联想基本几何体的结构特征,对其进行合理分割.

[答案] 解:此几何体是由两个大圆柱、两个小圆柱和两个小圆台组合而成的,也可以看成是由一个平面图形旋转而成的.

[点评] 组合体是由简单几何体拼接而成的,解决这类题时要正确把握简单几何体的结构特征.

► 问题二 几何体的结构特征

例题 2 如图所示.

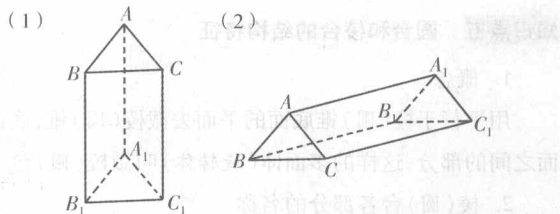


(1)如果把 $\triangle ABC$ 看作是水平放置的三角形,试以它为底面画一个三棱柱;

(2)如果把 $\triangle ABC$ 看作是竖直放置的三角形,试以它为底面再画一个三棱柱.

[解析] 本题主要考查棱柱的结构特点,由图可知, $\triangle ABC$ 的放法不同,显然所得到的三棱柱的位置形状就不一样.而画三棱柱的关键是画出两个平行的底面.因此再画出与 $\triangle ABC$ 平行的面即可.

[答案] 解:几何体如图所示.



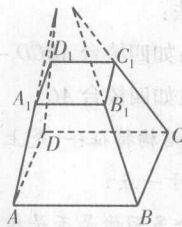
[点评] 一个柱体最明显的特征是上下粗细均匀,有时柱体的摆放状态并不是底面在下,这时应抓住几何体的特点进行判断.

例题 3 下列三个命题中,正确的有 ()

- ①用一个平面去截棱锥,棱锥底面和截面之间的部分是棱台;
- ②两个底面平行且相似,其余各面都是梯形的多面体是棱台;
- ③有两个面互相平行,其余四个面都是等腰梯形的六面体是棱台.

- A. 0 个
- B. 1 个
- C. 2 个
- D. 3 个

[解析] 本题主要考查台体的结构特征,关键是把握台体的特点.①中的平面不一定平行于底面,故①错;②③可用反例去检验,如图,故②③错.



[答案] A

[点评] 一个台体的基本特点是上、下底面平行且相似,侧棱或母线延长后交于一点,这是判断几何体是否为台体的依据.

例题 4 根据下列对几何体结构特征的描述,说出几何体的名称.

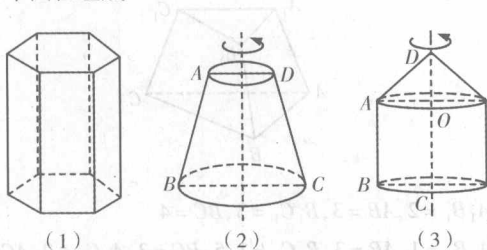
- (1)由八个面围成,其中两个面是互相平行且全等的正六边形,其余六个面都是矩形;
- (2)一个等腰梯形绕着两底边中点的连线所在的直线旋转 180° 形成的封闭曲面所围成的图形;
- (3)一个直角梯形绕较长的底面所在的直线旋转一周形成的曲面所围成的几何体.

[解析] 本题主要考查几何体的结构特征,关键是合理分析与构图.

[答案] 解:(1)如图(1),该几何体有两个面平行,其余六个面都是矩形,可使每相邻两个面的公共边都相互平行,故该几何体是正六棱柱.

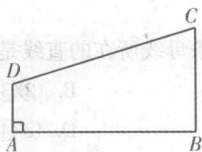
(2)如图(2),等腰梯形两底边中点的连线将梯形平分两个直角梯形,每个直角梯形旋转 180° 形成半个圆台,故该几何体为圆台.

(3)如图(3),由直角梯形 $ABCD$ 的顶点 A 作 $AO \perp CD$ 于 O 点,将直角梯形分为一个直角三角形 AOD 和一个矩形 $AOCB$,绕 CD 旋转一周形成一个组合体,该组合体由一个圆锥和一个圆柱组成.



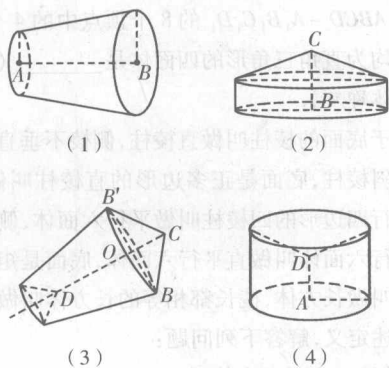
[点评] 对于不规则的平面图形绕轴旋转问题,要对原平面图形作适当的分割,再根据圆柱、圆锥、圆台的结构特征进行判断.

例题 5 一直角梯形 $ABCD$,如图所示,分别以 AB 、 BC 、 CD 、 DA 所在直线为轴旋转一周,画出所得几何体的大致形状,并指明它是由哪些简单几何体组成的.



[解析] 本题主要考查旋转成体和组合体,关键是作出不在轴上的点的旋转图形.

[答案] 解:几何体的形状分别如图所示.



其中图(1)是一个圆台,图(2)是一个圆柱和一个圆锥的

组合,图(3)是一个圆台挖去一个小圆锥,再加上一个大圆锥的组合,图(4)是一个圆柱挖去一个小圆锥.

[点评] 平面图形旋转成体关键是确定不在轴上点的旋转轨迹,这类题要先确定点的旋转图,然后连点成线成体.

►问题三 台体和锥体的有关计算

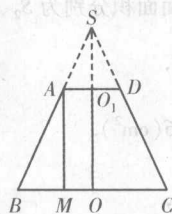
例题 6 一个圆台的母线长为 12 cm ,两底面面积分别为 $4\pi\text{ cm}^2$ 和 $25\pi\text{ cm}^2$.求:

(1)圆台的高;

(2)截得此圆台的圆锥的母线长.

[解析] 本题主要考查圆台中的有关计算,关键是在轴截面中,依据相似三角形求解.

[答案] 解:(1)如图,圆台的轴截面是等腰梯形 $ABCD$,由已知可得上底半径 $O_1A = 2\text{ cm}$,下底半径 $OB = 5\text{ cm}$,且腰长 $AB = 12\text{ cm}$,



$$\therefore AM = \sqrt{12^2 - (5-2)^2} = 3\sqrt{15}(\text{cm}).$$

(2)设截得此圆台的圆锥的母线长为 l ,

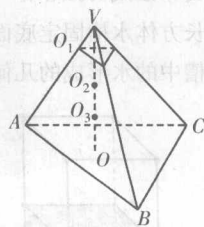
$$\text{则由 } \triangle SAO_1 \sim \triangle SBO \text{ 可得 } \frac{l-12}{l} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore l = 20\text{ cm}.$$

即截得此圆台的圆锥的母线长为 20 cm .

[点评] 解决这类问题一般是画出轴截面解三角形即可.

例题 7 如图,已知棱锥 $V-ABC$ 的底面积是 64 cm^2 ,平行于底面的截面面积是 4 cm^2 ,棱锥顶点 V 在截面和底面上的射影分别是 O_1 、 O ,过 O_1O 的三等分点作平行于底面的截面,求各截面的面积.



[解析] 本题主要考查棱台的平行于底面的截面性质,关键是找出相似比,然后转化为求面积比即可.



[答案] 解: 设棱锥的高为 h , 其顶点到已知截面的距离 $VO_1 = h_1$, O_1O 的三等分点分别为 O_2, O_3 ,

$$\text{由已知得 } \frac{h_1^2}{h^2} = \frac{4}{64},$$

$$\therefore \frac{h_1}{h} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore h_1 = \frac{1}{4}h,$$

$$\therefore O_1O = VO - VO_1 = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h,$$

而 $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O$, 则

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{1}{4}h.$$

$$\therefore VO_2 = \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}h = \frac{h}{2},$$

$$VO_3 = \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}h + \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h.$$

设过 O_2, O_3 的截面面积分别为 S_2, S_3 , 底面面积为 S , 则

$$S_2 : S = \left(\frac{1}{2}\right)^2 : h^2,$$

$$\therefore S_2 = \frac{1}{4} \times 64 = 16 (\text{cm}^2).$$

$$S_3 : S = \left(\frac{3}{4}\right)^2 : h^2,$$

$$\therefore S_3 = \frac{9}{16} \times 64 = 36 (\text{cm}^2).$$

\therefore 两截面的面积分别为 16 cm^2 和 36 cm^2 .

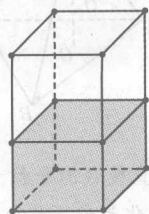
[点评] “面积比是相似比的平方”同样适用于立体图形, 但立体图形的相似是平面图形的推广.

D 针对性练习

1. 一个等腰三角形绕它的底边所在直线旋转 360° 形成的曲面所围成的几何体是 ()

- A. 球体
- B. 圆柱
- C. 圆台
- D. 两个共底面的圆锥组成的组合体

2. 如图, 将装有水的长方体水槽固定底面一边后倾斜一个小角度, 则倾斜后水槽中的水形成的几何体是 ()

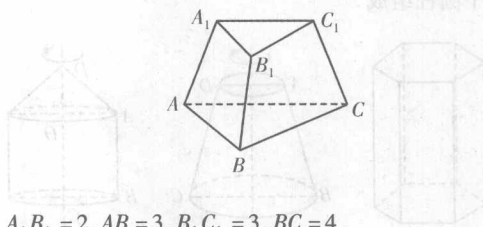


- A. 棱柱
- B. 棱台
- C. 棱柱与棱锥的组合体
- D. 不能确定

3. 截一个几何体, 各个截面都是圆, 则这个几何体一定是 ()

- A. 圆柱
- B. 圆锥
- C. 球体
- D. 它们的组合体

4. 如图, 能推断这个几何体可能是三棱台的是 ()



- A. $A_1B_1 = 2, AB = 3, B_1C_1 = 3, BC = 4$
- B. $A_1B_1 = 1, AB = 3, B_1C_1 = 1.5, BC = 3, A_1C_1 = 2, AC = 3$
- C. $A_1B_1 = 1, AB = 2, B_1C_1 = 1.5, BC = 3, A_1C_1 = 2, AC = 4$
- D. $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1$

5. 下列命题中, 正确的是 ()

- ①在圆柱的上、下底面的圆周上各取一点, 则这两点的连线是圆柱的母线;
- ②圆锥顶点与底面圆周上任意一点的连线是圆锥的母线;
- ③在圆台上、下底面圆周上各取一点, 则这两点的连线是圆台的母线;
- ④圆柱的任意两条母线所在的直线是互相平行的.

- A. ①②
- B. ②③
- C. ①③
- D. ②④

6. 不在同一个面上的两个顶点的连线叫做棱柱的体对角线, 则六棱柱有 _____ 条体对角线.

7. 已知三棱锥的底面是边长为 a 的等边三角形, 则过各侧棱中点的截面的面积为 _____.

8. 以正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点中的 4 个为顶点, 且 4 个面均为直角三角形的四面体是 _____ (只要写出一个四面体即可).

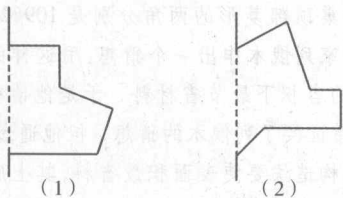
9. 侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱, 侧棱不垂直于底面的棱柱叫做斜棱柱, 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱, 底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体, 侧棱与底面垂直的平行六面体叫做直平行六面体, 底面是矩形的直平行六面体叫做长方体, 棱长都相等的长方体叫做正方体. 请根据上述定义, 解答下列问题:

- (1) 直四棱柱一定是长方体吗?
- (2) 正四棱柱一定是正方体吗?

(3) 设 $P = \{\text{四棱柱}\}$, $Q = \{\text{平行六面体}\}$, $R = \{\text{正四棱柱}\}$, $M = \{\text{直平行六面体}\}$, $N = \{\text{长方体}\}$, $J = \{\text{正方体}\}$, 则集合 P, Q, R, M, N, J 之间有怎样的关系?

解: $P \supseteq Q \supseteq R, M \supseteq N \supseteq J, P \supseteq M, Q \supseteq N$.

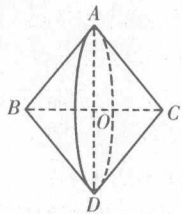
10. 如图, 绕虚线旋转一周后形成的立体图形是由哪些简单几何体构成的?



11. 把一个圆锥截成圆台, 已知圆台的上、下底面半径的比是 1:4, 母线长是 10 cm, 求圆锥的母线长.

[参考答案]

1. D 解析: 旋转体如图.



2. A 解析: 由棱柱的结构特征判断.

3. C 解析: 球的任意截面都是圆.

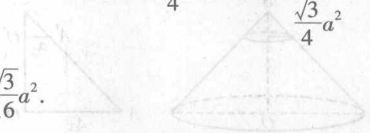
4. C 解析: 由题知 $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}$, 因此选 C.

5. D 解析: 可由旋转体的概念和结构特征判断.

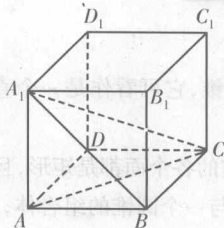
6. 18 解析: 取上底面一点 A , 则下底面中能和 A 成体对角线的只有三点, 共组成 3 条体对角线, 上底面有 6 个顶点, 则体对角线共有 6×3 条.

7. $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$ 解析: 底面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 由题知 $\frac{S}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$$\therefore S = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2.$$



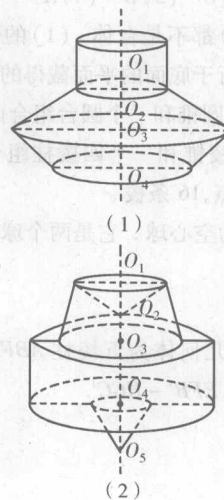
8. 四面体 A_1-ABC 等 解析: 符合题意的四面体特点是 A_1A 与面 ABC 垂直, 且在面 ABC 中, $\angle ABC = 90^\circ$.



9. 解: (1) 不一定. 只有底面是矩形的直四棱柱, 才是长方体.
(2) 不一定. 只有侧棱与底面边长相等的正四棱柱, 才是正方体.

(3) $P \supseteq Q \supseteq M \supseteq N \supseteq R \supseteq J$.

10. 解: 旋转后的图形如图所示.



其中(1)由一个圆柱 O_1O_2 和圆台 O_2O_3 、圆台 O_3O_4 组成; (2)由一个圆锥 O_4O_5 、一个圆柱 O_3O_4 及一个圆台 O_1O_3 中挖去圆锥 O_1O_2 组成.

11. 解:如图,作圆锥的轴截面,设圆锥的母线长为 y cm,圆台上、下底面半径分别为 x cm, $4x$ cm.

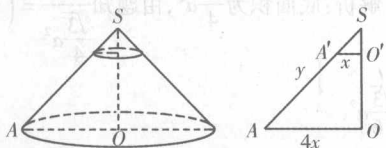
在 $Rt\triangle SOA$ 中, $\because O'A' \parallel OA$,

$$\therefore SA':SA = O'A':OA,$$

$$\text{即 } (y-10):y = x:4x,$$

$$\therefore y = 13\frac{1}{3}.$$

\therefore 圆锥的母线长为 $13\frac{1}{3}$ cm.



E 课后答案点拨

[练习(第7页)]

- (1) 一个圆锥,它可看作是一个直角三角形绕其一条直角边旋转而成;
- (2) 长方体,它的各个面都是矩形,且侧棱垂直于底面;
- (3) 一个圆柱与一个圆锥的组合体,上部分为圆锥,下部分为圆柱;
- (4) 一个棱柱里面挖去了一个圆柱.

- (1) 五棱柱 (2) 圆锥

[习题 1.1(第8页)]

A 组

- (1)C (2)C (3)D (4)A
- (1)(2)(3)都不是台体.(1)的侧棱不相交于一点,(2)(3)不是由平行于底面的平面截得的几何体.
- (1)由一个圆锥和一个圆台组合而成.
(2)由一个四棱锥和一个四棱柱组合而成,共由 9 个面组成,它有 9 个顶点,16 条棱.
- 几何特征为空心球.它是两个球中间所夹的部分.
- 略

B 组

- 解:剩下的几何体为五棱柱 $ABFEA' - DCGHD'$,截去的几何体为三棱柱 $EFB' - HGC'$.
- 略

F 拓展阅读

高明的建筑师——蜜蜂

法国数学家傅里叶有一句流传至今的名言:对自然的深入研究是数学发现的最富饶的源泉.蜂房问题就是极有趣的例子.蜂房的结构不仅有条理、有对称性,而且最省材料,这种“最省”实际上是极值问题.历史上不少学者注意到蜂房的奇妙结构.蜂房上有许多巢,取一个巢来看,它是正六边形的柱体,其上底是由三个全等的菱形组成.早在公元 300 年前后,亚历山大的巴普士就研究过蜂房的形状,他认为六棱柱的巢的结构是最经济的结构.开普勒曾说过这种充满空间的对称的蜂房的角应该和菱形 12 面体(各个面都是菱形的 12 面体)的角一样.18 世纪法国天文学家马拉尔弟经过实际测量后指出蜂巢顶部菱形的两角分别是 $109^\circ 28'$ 和 $70^\circ 32'$.法国自然哲学家列俄木作出一个猜想:用这样的角度来建造蜂房,在相同的容积下最节省材料.于是他请教瑞士数学家克尼希,克尼希证实了列俄木的猜想.但他通过数值计算推得:根据蜂房的构造法要使表面积最省料,其上底中菱形的两个角应为 $109^\circ 26'$ 和 $70^\circ 34'$,和马拉尔弟实际测量的数值仅有 $2'$ 之差!当时人们认为:蜜蜂毕竟不懂科学,它们解决这样一个复杂的极值问题只有 $2'$ 的误差,是不足为奇的.可是事情还没有结束.后来,在调查一艘轮船失事原因的过程中,发现船上所使用的对数表有错误,而当时数学家克尼希进行蜂房计算时,所使用的也是同类对数表.于是,人们又开始怀疑克尼希计算数据的准确性.1743 年,美国数学家马克劳林重新从理论上研究蜂巢中的极值问题,得到更惊人的结果.他完全用初等数学方法得到菱形的钝角是 $109^\circ 28' 16''$,锐角是 $70^\circ 31' 44''$,与实际测量的值一致.这 $2'$ 之差,不是蜜蜂不准,而是数学家克尼希算错了,他所用的对数表印错了.

马克思说得好:“蜜蜂建筑蜂房的本领使人间的许多建筑师感到惭愧.但是,最蹩脚的建筑师从一开始就比最灵巧的蜜蜂高明的地方,是他在用‘蜂蜡’建筑‘蜂房’以前,已经在自己的头脑中把它建成了.”

生物现象常常给人们很大启发,数学美是自然美的客观反映.

1.2 空间几何体的三视图和直观图

1.2.1 中心投影与平行投影

1.2.2 空间几何体的三视图

A 教材梳理

知识点一 中心投影

1. 由于光的照射,在不透明物体后面的屏幕上可以留下这个物体的影子,这种现象叫做投影.其中,我们把光线叫做投影线,把留下物体影子的屏幕叫做投影面.

2. 我们把光由一点向外散射形成的投影,叫做中心投影,中心投影的投影线交于一点,它的实质是一个点光源把一个图形射到一个平面上,这个图形的影子就是它在这个平面上的中心投影.

3. 中心投影的性质

- (1) 中心投影的投影线交于一点;
- (2) 点光源距离物体越远,投影形成的影子越小.

知识点二 平行投影

我们把一束平行光线照射下形成的投影,叫做平行投影.平行投影的投影线是平行的,投影线正对着投影面时,叫做正投影,否则叫做斜投影.

知识点三 三视图

1. 三视图是观察者从不同位置观察同一个几何体画出的图形.

三视图包括正视图、侧视图和俯视图三种图形,它是把一个空间几何体从不同的角度观察得到的图形画到平面上去的一种方法,其中“视图”是将物体按正投影的方法向投影面投射时所得到的投影图.光线从几何体的前面向后面正投影,得到投影图,这种投影图叫做几何体的“正视图”;第二种是光线从几何体的左面向右面正投影,得到投影图,这种投影图叫做几何体的侧视图;第三种是光线从几何体的上面向下面正投影,得到投影图,这种投影图叫做几何体的俯视图.几何体的正视图、侧视图和俯视图统称为几何体的三视图.

2. 三视图的排列规则

三视图的正视图、俯视图、侧视图分别是从物体的正前

方、正上方、正左方看到的物体轮廓线的正投影围成的平面图形.一个物体的三视图的排列规则是:俯视图放在正视图的下面,长度与正视图的一样;侧视图放在正视图的右面,高度与正视图的一样,宽度与俯视图的一样.即“长对正、高平齐、宽相等”或“正侧一样高、正俯一样长、俯侧一样宽”.

知识点四 柱、锥、台、球的三视图

1. 圆柱的正视图和侧视图都是矩形,俯视图为圆.
2. 圆锥的正视图和侧视图都是等腰三角形,俯视图是圆和圆心.
3. 圆台的正视图和侧视图都是等腰梯形,俯视图是两个同心圆.
4. 球的正视图、侧视图以及俯视图都是圆.

知识点五 组合体的三视图

对于简单几何体的组合体,一定要认真观察,先认识它的基本结构,然后再按三视图的定义和规则画它的三视图.

在绘制三视图时,应注意:

1. 若相邻两物体的表面相交,表面的交线是它们的分界线,在三视图中,分界线和可见轮廓线都用实线画出.
2. 不可见轮廓线用虚线画出.
3. 确定正视、俯视、侧视的方向,同一物体放置的方向不同,所画的三视图可能不同.
4. 观察简单组合体是由哪几个基本几何体生成的,并注意它们的生成方式,特别是它们的交线位置.

B 教材拓展

拓展点一 平行投影的性质

当图形中的直线或线段不平行于投射线时,平行投影具有下述性质:

1. 直线或线段的平行投影仍是直线或线段.
2. 平行直线的平行投影是平行或重合的直线.
3. 平行于投射面的线段,它的投影与这条线段平行且

等长.

4. 与投射面平行的平面图形,它的投影与这个图形全等.

5. 在同一直线或平行直线上,两条线段平行投影的比等于这两条线段的比.

拓展点二 由三视图还原成实物图

由实物可以画出它的三视图,实际生产中,工人要根据设计好的三视图加工零件,需要将三视图还原成实物,然后再加工生产,这就需要根据平面图形想像物体的空间形状.一般来说,绘制成实物草图后,再根据此草图的三视图验证所画的实物草图是否正确.

注意:三视图中的虚线是不可见的轮廓线,还原成实物图时,要注意三视图中实线和虚线的区分.

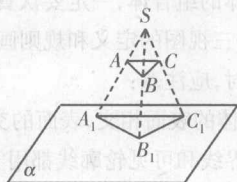
C 典型题解

►问题一 投影

例题 1 已知 $\triangle ABC$,选定的投影面与 $\triangle ABC$ 所在平面平行,则经过中心投影后所得的三角形与 $\triangle ABC$ ()

- A. 全等 B. 相似
C. 不相似 D. 以上都不对

[解析] 本题主要考查对中心投影的理解,合理的构图是关键.如图,光源 S 将 $\triangle ABC$ 投射到平面 α 上,得到三棱锥 $S-A_1B_1C_1$,由于平面 ABC 与平面 α 平行,因此 $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



[答案] B

[点评] 当一个平面图形与投影面平行时,经中心投影后所得图形与它相似.

例题 2 一条直线在平面上的平行投影是 ()

- A. 直线 B. 点 C. 线段 D. 直线或点

[解析] 本题主要考查平行投影,当投射线与直线平行时,投影是一个点;否则,就是一条直线.

[答案] D

[点评] 图形的平行投影与投影面的位置有关,也与投射线的方向有关,解题时要注意这两个量的变化.

例题 3 如果一个三角形的平行投影仍是三角形,那么它的中位线的投影一定是这个三角形的平行投影的_____.

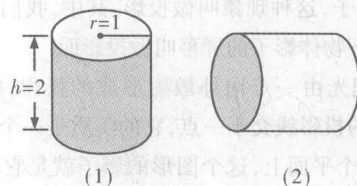
[解析] 本题主要考查平行投影的性质,关键是理解平行投影的性质.由于三角形的平行投影仍然是三角形,可知三角形的边都不和投影线平行(或都不与投射面垂直).由平行投影的性质:在同一直线上,两条线段平行投影的比等于这两条线段的比,即线段的中点进行了平行投影后仍是中点.故应填“中位线”.

[答案] 中位线

[点评] 解决关于平行投影的问题,应抓住投影的共点性、共线性、平行性以及平行线段之比的不变性这些特点.

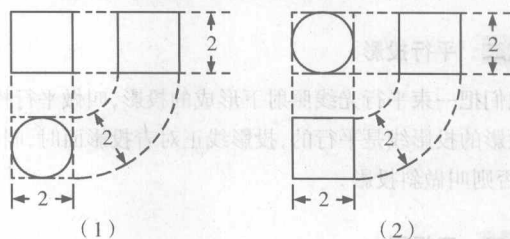
►问题二 画几何体的三视图

例题 4 图中是同一个圆柱的不同放置,阴影面为正面,画其三视图.



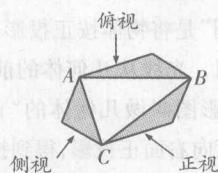
[解析] 本题主要考查三视图的画法,关键是理解三视图的投影方向和画法规则,可结合圆柱的模型画三视图.

[答案] 解:三视图如图(1)、(2)所示.



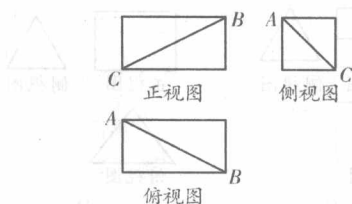
[点评] 这两个三视图中的几何图形尽管相同,但放置的顺序不同,即同一几何体的放置位置不同,则三视图可能不同.

例题 5 如图是截去一个角的长方体,画出它的三视图.



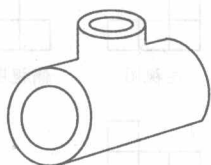
[解析] 本题考查三视图的画法,关键是画好轮廓线,可根据长方体的轮廓线和各面交线画三视图.

[答案] 解:长方体截去一个角后,截面是一个三角形,在每个视图中反映为不同的三角形,三视图如图所示.



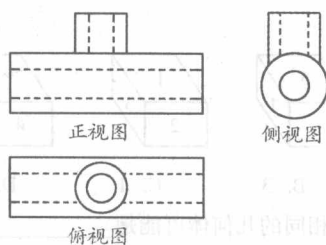
[点评] 在画几何体的三视图时,要将可见轮廓线画成实线,不可见轮廓线画成虚线.

例题 6 画出如图所示几何体的三视图.



[解析] 本题主要考查组合体的三视图,关键是分析出几何体的构成.

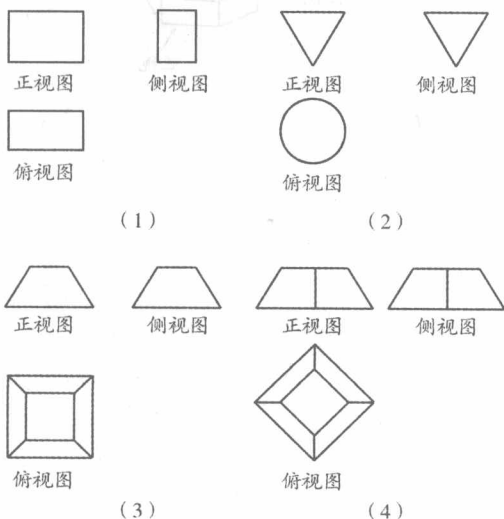
[答案] 解:如图所示.



[点评] 在画组合体的三视图时,要正确分解组合体,把握每个简单几何体的特点,并注意轮廓线是否可见.

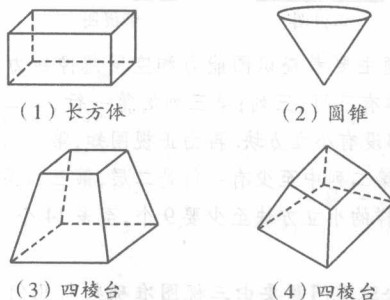
► 问题三 由三视图联想实物图

例题 7 根据几何体的三视图画出对应的几何体.



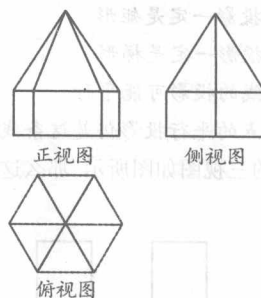
[解析] 本题主要考查空间想像能力,关键是由三视图特点合理想像几何体.

[答案] 解:它们的直观图如图所示.



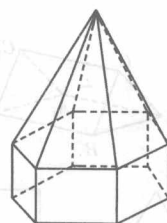
[点评] 物体的摆放位置和投影方向影响三视图的形状,因此,尽管(3)(4)的三视图不同,但它们都是棱台.

例题 8 根据下列三视图,想像对应的几何体,并画出草图.



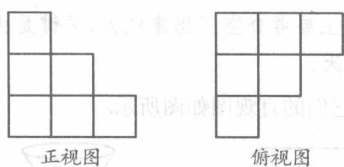
[解析] 本题主要考查识图能力和空间想像能力,关键是正确理解三视图的画法.由三视图知,该几何体是由一个柱体和锥体组合而成,画出草图即可.

[答案] 解:由正视图和侧视图可知该物体的下半部分为柱体,上半部分为锥体,又因俯视图为一个正六边形,故该几何体是由一个正六棱柱和一个正六棱锥组合而成的.它的实物草图如图所示.



[点评] 由三视图画实物草图一定要把握三视图的排列方式及实、虚线的位置,并合理想像几何体.

例题 9 用相同的小立方块搭一个几何体,使它的正视图和俯视图如图所示,则它最多需要_____个小立方块.



[解析] 本题主要考查识图能力和空间想像能力. 由俯视图知此几何体有三行、三列; 第三列的第一行、第二行及第二列的第一行都没有小立方块. 再由正视图知, 第一列中至少有一行是三层, 第二列中至少有一行是二层, 第三列第三行只有一层, 因此这样的小立方块至少要9个, 至多14个.

[答案] 14

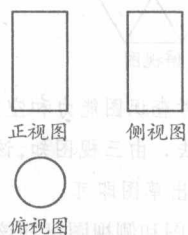
[点评] 解决这类问题要由三视图准确判断几何体有几行几列几层, 每一层可有几个小立方块, 一般先由俯视图入手, 再结合其他视图进行判断.

D 针对性练习

1. 下列说法中正确的是 ()

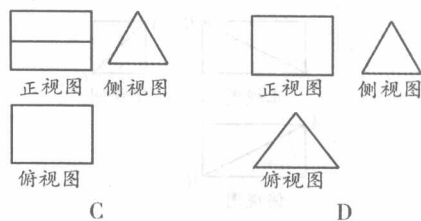
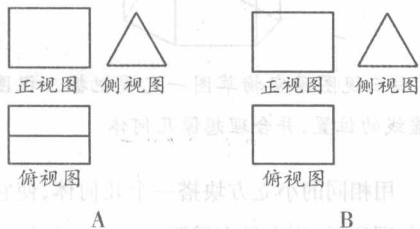
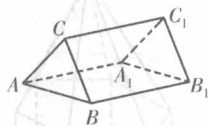
- A. 矩形的平行投影一定是矩形
- B. 梯形的平行投影一定是梯形
- C. 两条相交直线的投影可能平行
- D. 一条线段中点的平行投影仍是这条线段的中点

2. 已知某几何体的三视图如图所示, 那么这个几何体是 ()

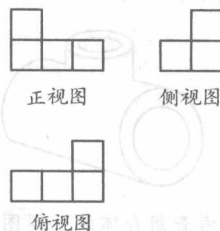


- A. 长方体
- B. 圆柱
- C. 立方体
- D. 圆锥

3. 如图, 以 BCC_1B_1 的前面为正前方画出的三视图正确的是 ()

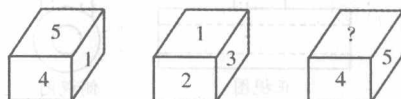


4. 一个几何体由几个相同的小正方体组合而成, 它的正视图、侧视图、俯视图如图所示, 则这个几何体包含的小正方体的个数是 ()



- A. 7
- B. 6
- C. 5
- D. 4

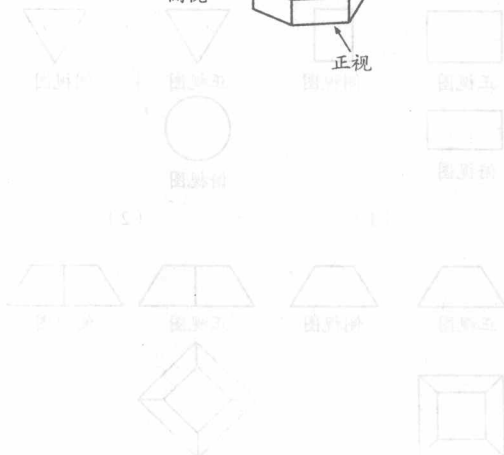
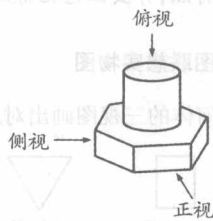
5. 一颗骰子标有 1~6 六个数字, 如图, 可推出“?”处的数字是 ()



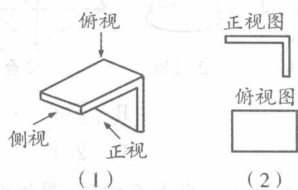
- A. 6
- B. 3
- C. 1
- D. 2

6. 三视图完全相同的几何体可能是_____ (填上你认为正确的一个几何体即可).

7. 螺栓是棱柱和圆柱的组合物, 如图, 试画出它的三视图.

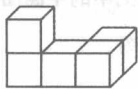


8. 图(2)是由图(1)中实物画出的正视图和俯视图,你认为正确吗?如果不正确,请找出错误并改正,然后画出它的侧视图.

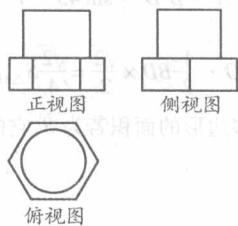


[参考答案]

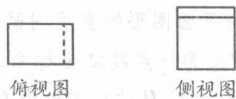
- D
- B 解析:由三视图可还原为圆柱.
- A 解析:B、C、D的俯视图错误.
- C 解析:根据三视图可得到它的空间图形如图所示.



- A 解析:1的对面是6,4的对面是3,5的对面是2.
- 正方体或球 解析:球的三视图是相等的圆,而正方体摆放位置合适时,它的三视图也可能相同.
- 解:该物体是由一个正六棱柱和一个圆柱组合而成的,正视图反映正六棱柱的三个侧面和圆柱侧面,侧视图反映正六棱柱的两个侧面和圆柱侧面,俯视图反映该物体投影后是一个正六边形和一个圆(中心重合).它的三视图如图:

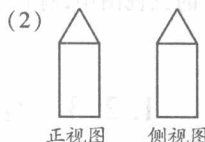
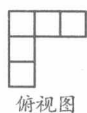
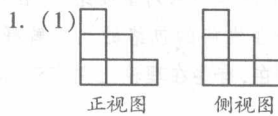


- 解:图(1)中是由两个长方体组合而成的,正视图正确,俯视图错误,俯视图应该画出不可见轮廓线(用虚线表示),侧视图轮廓是一个矩形,有一条可视的交线(用实线表示),正确画法如图所示.

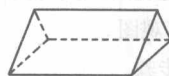


E 课后答案点拨

[练习(第15页)]



- 略
- (1)正六棱锥,图略 (2)略
- 是正三棱柱.



F 拓展阅读

拉格朗日

拉格朗日(1736~1813)是著名的数学家、力学家、天文学家.生于意大利都灵,卒于巴黎.少年时读到哈雷介绍牛顿的有关微积分的短文,对分析学产生兴趣.后上了都灵大学.18岁时研究等周问题,用纯分析的方法发展了欧拉开创的变分法.19岁时当上都灵炮兵学校的几何学教授.不久成为柏林科学院通讯院士,并继欧拉后出任柏林科学院数学总监.1757年参与创建都灵科学协会,在协会出版的科技会刊上发表了大量论文,内容涉及变分法、概率论、微分方程、弦振动、最小作用原理等.1764年因用万有引力解释月球天平动问题而获巴黎科学院奖金,1766年又用微分方程理论和近似解法研究六体问题再度获奖,成为欧洲极有声望的数学家.1766年接受普鲁士王腓特烈邀请到柏林科学院工作.1787年定居巴黎,历任法国米制委员会主任、巴黎高等师范学校和巴黎综合工科学学校数学教授.

拉格朗日的主要贡献有:在《关于代数方程解法的思考》等论文中,发现置换对解的影响,指出五次方程不可能有根式解,蕴含群论思想的萌芽;在《分析力学》中用分析学理论建