北京教育丛书

数学教学与科学思维能力培养

高保民 著

北京教育出版社

《北京教育丛书》编辑委员会

序

徐惟诚

教育事业的重要，已经日益被愈来愈多的人认识了。

中国要振兴，归根到底要靠我们中国人自己努力奋斗，要靠我们的全体劳动者创造出数十倍于今日的劳动生产率。这是一个全体国民素质提高的过程。人们自然要寄希望于教育。

要搞好教育，需要做许多事情，其中最根本的还是要靠人，靠教师。尤其是担负着国民基础教育任务的中小学教师。

教师的重担，关系着祖国未来的命运，也关系着每一个教育对象未来的命运。他们所教的学生在未来的社会条件下，究竟怎样做人，怎样立身处世，能不能用自己的双手为社会做出贡献，从而也创造自己的幸福生活，在相当大的程度上取决于在青少年时代所受到的教育。

我们知道，人，是世上已知物质发展的最高形态。关于人的意识、观念、智力的形成和发展的规律，我们离知道得很清楚还有很大的距离。社会主义的教育科学需要有一个大发展，这是毫无疑义的。

在教书育人第一线工作的广大中小学教师，对社会主义教育科学的发展应当有特殊的贡献。他们当中的许多人把一辈子的心血都用来为祖国培育后代，造就人才，积累了丰富的经验。这些经验理当成为整个教育战线的共同财富。可是由于种种原

因，这件总结和传播经验的工作过去做得还很不够。为此，中共北京市委和北京市人民政府决定，拨出专款，指定专人组成编委会，编辑出版一套《北京教育丛书》。这个决定受到广大中小幼教师的欢迎和支持。在短短一年多时间内，已经报来几百部书稿。又有一批热心而有经验的同志担任编审工作，看来任务是可以完成的。

我们相信，《北京教育丛书》的编辑出版，对于鼓励广大教师钻研业务，积累经验，对于传播和交流这些经验，对于推动教育科学研究，对于提高普通教育的水平，都是有积极作用的。同时，这套丛书的出版，也将有助于人们认识教师所作的艰苦的、创造性的劳动。

改革和建设的大潮在祖国大地上汹涌澎湃，每天都有许多新问题提到我们面前来，也把许多新问题提到我们的教育工作者面前。这是一个需要有许多新创造的时代。教育战线上的同志们为祖国的振兴所建立的功绩，是不会被人们忘记的。

目　录

第一章　通过数学教学活动培养科学思维习惯

第一节　思维习惯与科学思维能力

一、科学思维能力

人类对自身的思维和思维能力的关注和研究,可以追溯到久远的古代. 只是直到近代,借助于飞速发展的科学技术,人们才逐渐对科学的思维能力有了比较清晰的认识.

从哲学的认识论的角度来研究思维,所谓思维,就是人脑对客观事物的本质、相互关系及其内在规律性的概括和间接反映.

从心理学的角度来研究思维,思维的实质是在人的感觉、知觉、印象和概念的基础上进行综合、判断、推理等认识活动的全过程.

从现代认知心理学的观点来研究思维,则把人的大脑模拟成信息加工的机器. 所谓思维,就是人脑对信息的转换,它包括对信息的接收、加工、存取以及对转换过程的调控等.

而逻辑学则认为,人的思维是以语言为载体,对事物和事物的发展变化规律作出的推理、判断等的表述.

思维是人类的理性认识活动,它推动着人类社会的发展,同时也促进人类自身的智能发展.

所谓数学思维，就是以数学为对象，以数学活动为载体的一种思维. 数学思维是人脑对信息(包括外部信息和内部信息)的加工、整合过程. 外部信息指的是数学思维对象，即由现实世界中事物的空间形式和数量关系以及由此而发展出来的各种数学对象. 例如由数学的概念、命题、公式、定理、法则、公理等形成的数学问题，这些问题主要以语言文字、符号和数学图形的形式给出. 内部信息主要是指人脑中有关数学的认知结构(系统).

思维能力是指人在面对思维对象进行思维时，其思维的质量和水准. 思维能力的主要指标是思维的习惯(也称思维方式或思维的形式)和思维的品质(也称思维的水平或思维的质量).

概括有关科学思维能力的研究成果，结合长期通过数学教学活动对学生科学思维能力的训练和培养的实践，我们认为，所谓科学思维能力，是指面临思维对象，能够使思维横向、纵向、正向、逆向、发散、聚合、开放地依情势而灵活多变、收发自如运行的思维能力；是在思维活动中，自觉正确运用分析、综合、比较、分类、抽象、概括、归纳、演绎等科学方法的思维能力；也是思维呈现高水平的敏捷性、灵活性、广阔性、深刻性、逻辑性(也称组织性)、批判性和创造性的思维能力.

二、科学的思维习惯是科学思维能力的载体

我们已经知道，思维习惯(方式)是思维能力的最主要的指标之一. 可以这样认为，一个人的思维能力是否科学，在很大程度上取决于他的思维习惯是否优良，是否也是科学的.

科学的思维习惯(方式)应当具备以下主要特征：

1. 反常性. 能够依据具体情况及时改变正常的思维程序，不盲从于“人云亦云”的思维“潮流”，敢于独立思考，抉异探奇，善于另辟蹊径. 与一般思维习惯不同的是，科学的思维习惯思维常常倒退、逆转、旁敲侧击，方式灵活多样而且多为出乎意料

之举．不墨守成规，善于使思维方式随时处于动态，以便更机动地面对思维对象，这也是科学思维习惯反常之处．

2．发散性．从纵向上讲，需要思维具有高度的流畅性，即在解决问题时，能在同一方向上并列产生出多种同类型思维方式；从横向上讲，需要思维具有高度的变通性，即在解决问题时，能在不同方向上产生出不同类型的思维方式；从总体上说，能从同一思维对象，生发出多条思维路线，即具备较强的思维开放性．

3．综合性．能把思维对象的各个部分、各个方面和各种因素有机地联系在一起，全盘考察．不仅使思维指向思维对象自身的独特性，而且指向思维对象的母系统对子系统的影响以及系统（结构）各要素之间的关系．既要求在宏观上具有高瞻远瞩的能力，又要求在微观上具有很强的显微能力．

4．统摄性．统摄性就是思维的抽象能力，即用一个概念取代若干个概念的能力．能够以概括力更强的符号取代旧有的概念，或者是赋予旧的概念以更多的新内容．不断增加思维在信息储存方面的内容和总的容量，具有较强的驾驭信息的能力．

5．预见性．通过对过去和现在的各种数据、资料进行详细、深入的思考和研究，根据事物发展的逻辑关系，综合考虑各种因素的相互影响，在定量分析和定性分析的基础上，找出事物"链"之间的因果关系，推测出事物发展的未来进程．

6．多维性．思维不局限于某一个点或者某一个面，而是从点到面，从面到体，点、面、体并存，点、面、体互补，形成一个立体网络系统．也就是思维能够从各个方向、各个角度、各个层面和各种深度全面考察思维对象．

7．创造性．科学思维能力的最本质的特点，就在于它的高度的创造性．创造性即是思维的创新性、独创性．它表现为在思维活动中创造出前所未有的新的"东西"，而这新的"东西"具

有新的结构、新的完形和新颖性. 创造性是人类思维所追求的最高境界. 创造性要求思维者具备合理的认知结构、良好的心理条件、敏锐的观察力、强烈的好奇心、高昂的情绪、积极的思维状态和坚强的意志等.

具备以上特征的思维习惯,就是良好的科学的思维习惯. 只有科学的思维习惯才能充当科学思维能力的载体;只有养成良好的科学的思维习惯,科学思维能力才具有坚实的基础.

第二节 变单向思维为多向思维

单向思维,顾名思义,就是思考和研究问题只囿于很狭小的范围之内,就事论事,使思维只朝着一个方向发展. 单向思维是一种低水平思维习惯,只有代之以思维的多向性,才能使思维进入较高级的状态.

一、着意点拨,激发联想

在进行数学教学活动时,要有意识地采取适当措施,打乱学生单向思维的定势和格局,激活他们多向联想思维.

1. 提供素材,引导和帮助学生养成"多思"的良好习惯,善于联想,多方联系. 在考察某一个或某几个思维对象时,能够做到使自己的思维焦点不只是停留在这一个或那几个思维对象上,而是以这一个或那几个思维对象为基点或反射点,迅速、准确地"捕获"众多的相关信息.

比如,我们曾经组织学生进行过以下类型的研究和训练.

研究题:在数学中,1 是什么? 0 是什么?

这个问题一经提出,犹如"一石激起千层浪",学生的思维被这两个极普通、极简单的数激活了. 很快,以 1 和 0 这两个数为"结"的两个思维网块,在学生的头脑中形成.

1 是实数的单位；

1 是正整数中最小的数；

1 是非零的两个相同的数的商；

$1=a^{\circ} \quad (a\in R, a\neq 0)$；

$1=\log_a a \quad (a>0, a\neq 1)$；

$1=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \quad (k\in Z)$；

$1=\cos(2k\pi) \quad (k\in Z)$；

$1=\tan\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right) \quad (k\in Z)$；

$1=[\sin f(x)]_{\max}$；

$1=[\cos\varphi(x)]_{\max}$；

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$；

$1=\tan\alpha\cdot\cot\alpha \quad (\alpha\neq k\pi$ 且 $\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z)$；

$1=\sin\alpha\cdot\csc\alpha \quad (\alpha\neq k\pi, k\in Z)$；

$1=\cos\alpha\cdot\sec\alpha \quad (\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z)$；

$1=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha \quad (\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z)$；

$1=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha \quad (\alpha\neq k\pi, k\in Z)$；

……

0 是正、负数的分界数；

0 是绝对值最小的实数；

0 是非负数的最小值；

$0=\log_a 1 \quad (a>0, a\neq 1)$；

$0=\sin(k\pi) \quad (k\in Z)$；

$0=\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \quad (k\in Z)$；

$0=\tan(k\pi) \qquad (k\in Z)$;

$0=\cot\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right) \qquad (k\in Z)$;

$0=m-m \qquad (m\in C)$;

……

虽然,在同学们的具体思维过程中,有漏洞、有错误,而且,以1和0这两个数作为思维的基点,稍嫌简单些,但是训练和研究的结果,却取得了意想不到的好效果:

有的学生竟然列出了近四十个不同形态的1和近五十种不同形式的0;

对1和0的研究和讨论从课堂上延续到课外,一直持续了很长时间;

不少学生认真撰写了小论文"1的妙用"、"奇妙的0"等,对1和0的深层内涵进行了探讨;

鉴于1和0这两个数在数学上的特殊重要地位,这样的训练为后来对1和0的灵活运用打下了坚实的基础;

最重要的是,通过这两个极简单、"司空见惯"的数的研究,使学生初步形成了以单一思维对象为基点,让思维进入多维的思维空间的习惯,逐步形成以这些单一思维对象为"结"的科学思维网络.

2. 把握时机,适时点拨,激发学生探究未知的欲望和热情;引导学生深入钻研,透过现象抓住本质,逐步养成把看似单一的思维对象,分成若干个更具深刻性、更能反映这个思维对象实质的小单元的习惯.

例如,在研究复数开方和二项方程 $ax^n+b=0(a、b\in C,n\in N)$时,我们适时进行了以下训练:

研究题:1的 n 次方根的性质及应用.

首先,给出1的 n 次方根的定义:

方程　$x^n-1=0$ 的 n 个复数根

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

(其中　$k=0,1,2,\cdots,n-1$ 而 $n\in N$,且 $n>1$)叫做 1 的 n 次方根.

其次,研究 1 的 n 次方根的性质:

性质(1)　$(\omega_k)^n=1$　　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

证明:$\because\ \omega_k$ 为方程 $x^n-1=0$ 的根,

$\therefore\ (\omega_k)^n-1=0$,

即 $(\omega_k)^n=1$.

性质(2)　$\omega_k=(\omega_1)^k$　　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

证明:$\because\ \omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=(\omega_1)^k,$$

$\therefore\ \omega_k=(\omega_1)^k$.

性质(3)　$|\omega_k|=1$　　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

证明:$|\omega_k|=\sqrt{\cos^2\frac{2k\pi}{n}+\sin^2\frac{2k\pi}{n}}=1$.

性质(4)　当 n 为奇数时,$\omega_0=1$ 是 1 的惟一实数方根;当 n 为偶数时,$\omega_0=1$ 和 $\omega_{\frac{n}{2}}=-1$ 是 1 的两个实数方根. 1 的 n 次方根中,除去实数方根外,其余各个虚数方根成对共轭(证明略去).

性质(5)　1 的任意两个 n 次方根的积,仍是 1 的 n 次方根.

证明:设 ω_i、ω_j(i、$j=0,1,2,\cdots,n-1$,以下同)是 1 的任意两个 n 次方根,则有

$$(\omega_i)^n=1,(\omega_j)^n=1.$$

$\therefore\ (\omega_i\omega_j)^n=(\omega_i)^n(\omega_j)^n=1.$

性质(6) 1 的任一 n 次方根的倒数,仍是 1 的 n 次方根.

证明:设 ω_i 是 1 的任一 n 次方根,则有$(\omega_i)^n=1$.

$\therefore\ (\omega_i^{-1})^n=(\omega_i^n)^{-1}=1^{-1}=1.$

性质(7) $1+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1}=0.$

证明:$\because\ \omega_k=(\omega_1)^k\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$(性质(2)),

$$\begin{aligned}\therefore\quad &1+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_{n-1}\\&=1+\omega_1+(\omega_1)^2+(\omega_1)^3+\cdots+(\omega_1)^{n-1}\\&=\frac{1-\omega_1^n}{1-\omega_1}=\frac{1-1}{1-\omega_1}=0.\end{aligned}$$

(限于篇幅,以下证明略)

性质(8) $1+\omega_k+(\omega_k)^2+\cdots+(\omega_k)^{n-1}=0\qquad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$

性质(9) $(1-\omega_1)(1-\omega_2)\cdots(1-\omega_{n-1})=n.$

性质(10) $\omega_1\omega_2\cdots\omega_{n-1}=\begin{cases}1\ (n=2m-1,m\in N),\\-1\ (n=2m,m\in N).\end{cases}$

性质(11) 复数 z 的某一个 n 次方根分别乘以 1 的 n 次方根,可以得到 z 的所有的 n 次方根.

性质(12) ω_k 表示复平面上单位圆周的 n 等分点对应的复数,其中 $\omega_0=1$ 是单位圆与实轴正半轴的交点对应的复数.

然后再组织学生研讨 1 的 n 次方根的具体应用问题.

题 1 设复数 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$,则 $\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5=$____.

解 $\because\ \omega=\cos\frac{2\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$,

$\therefore\ \omega^5=1$,即 ω 为 1 的 5 次方根.

由性质(7),有 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0.$

则 $\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5=\omega(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)=0$.

题 2　求 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ 的值.

解　考虑 1 的 7 次方根,由性质(7)易得

$$1+\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_6=0,\text{即}$$

$$1+\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{7}\right)+$$

$$\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{8\pi}{7}\right)+$$

$$\left(\cos\frac{10\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{10\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{12\pi}{7}+\mathrm{i}\sin\frac{12\pi}{7}\right)=0.$$

即 $\left(1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\right.$

$\left.\cos\frac{12\pi}{7}\right)+\mathrm{i}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}+\right.$

$\left.\sin\frac{10\pi}{7}+\sin\frac{12\pi}{7}\right)=0.$

则有　$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$

但　$\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{12\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{8\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{10\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$,代入上式,

则　$1-2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{3\pi}{7}=0$.

$\therefore$　$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

题3　求证 $\odot O$ 上任一点 P 到此圆的内接正 n 边形 $A_0A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 各顶点的距离的平方和 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}|PA_k|^2$ 为定值.

证明　取圆心 O 为坐标原点,不妨设圆的半径为 1,则圆内接正 n 边形的 n 个顶点对应的复数分别为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$(其中 $\omega=\omega_1$),$\odot O$ 上任意一点为 Z,它所对应的复数为 z,则有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}|PA_k|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}|z-\omega^k|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k)\overline{(z-\omega^k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(z-\omega^k)(\overline{z}-\overline{\omega^k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(|z|^2-\omega^k\overline{z}-z\overline{\omega^k}+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(|z|^2+1)-\overline{z}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k-z\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\omega^k} \\
&= n|z|^2+n(\text{由性质(8)得}) \\
&= 2n.
\end{aligned}
$$

在这个训练项目中,学生通过自己的独立思维,加上教师的及时点拨,比较透彻地剖析了 1 的 n 次方根这个表面看起来并无特色的思维对象,引发出了十几条重要性质和多种应用. 应当说,学生在这种类型的训练中,获得的不仅仅是相关的知识与技能. 更为重要的是,他们获得了终生受益的多向思维、深入探究和透彻剖析的能力.

二、及时导引,使思维向纵深发展

不少学生养成了一种不良思维习惯,这就是:当他们对思维对象的研究、分析刚刚达到某一深度时,便停止继续思维;当他们自认为已经完成思维任务而实际上其思维仍很肤浅时,就不再使思维向纵深方向发展;当他们面对思维障碍时,便立即终止