中学生课外读物

现代科学技术丛书

多目标规划

应玫茜 著

人民教育出版社

《现代科学技术丛书》

目　录

一、写在前面

当你期望在现有的条件下尽量把一件事情办好时，你是否意识到自己是在自觉或不自觉地从若干个可行的方案中挑选出令人较为满意的方案来？在进行方案好坏的比较时，在你心目中肯定是有评判标准的，这种评判标准有时只有一个，有时却有好几个。例如你想用不超过 20 元的钱买一件款式合身的上衣，现有的条件是花钱不许超过 20 元，上衣好坏的唯一评判标准是款式是否合乎自己心意。在挑选的过程中，也许你会发现款式好的上衣不止 20 元钱，而在比 20 元便宜的上衣中实在挑不出较为满意的款式来。怎么办？办法之一是放宽花钱的限量，把上衣的价格高低看成另一个评判标准。也许你会发现价格和款式之间存在矛盾。款式好的，价格高，而价格低的，款式差。你只好把挑选的范围缩小到“款式还算可以，价格不算很高”。如果你对两个评判标准不是同等看待。例如，价格低比款式好重要，你的最终方案可能买到一件较便宜但款式不算很满意的上衣；反过来，如款式好比价格低重要，那么你买到的上衣可能是款式较合心意但价格较贵。这种考虑问题的常识人皆有之。对于因素简单的问题，也许可以凭经验和直观最后作出令人满意的决定，但对因素复杂的，现有条件限制较严的，评判标准很多的，或者对方案的精确度要求较高的问题，则必须以数学和高速电子计算机为工

具，方能得到比较满意的方案。例如：

一个工厂在现有的生产能力下，如何制订产品计划，既能获得较大的经济效益，又能尽量满足市场的需求？

在工厂和人口密集的城市中，如何选定油库的地址，既能使运输方便、运费较少，又能尽量少污染环境？

在远程飞机的设计中，如何给出结构方案，既能在耗油量限定的情况下使航程较远，又能使飞机的重量尽量地轻？

在战场上，如何调遣现有的兵力和兵种，既能较多地歼灭敌人，又能较好地保存实力？

在建筑物的结构设计中，如何选定框架尺寸，既能较省材料，又能抗地震？

……？

类似这样的问题真是不胜枚举。如果你能搞清哪些是决定方案的未知参数(决策变量)，哪些是已知参数；而现有的条件(约束条件)可以用一些决策变量和已知参数的函数等式或不等式表示出来；几个不同的评判标准(目标函数)也可以表示成决策变量和已知参数的函数。那么就可以运用多目标规划的理论和方法，藉助于计算机获得满意的方案。

在这本中等程度的小册子中，我们不可能对多目标规划这门学科作全面、深入的介绍和严格的论证，因为这需要一些高等数学中的分析、代数和几何方面的知识。我们只打算在中学数学的水平上，通过特殊的实例或者用几何直观的描述办法来介绍一些本学科的基本思想和算法。

本书初稿经过潘一民同志的审阅修改。人民教育出版社的同志为本书的编辑出版作了大量工作，谨致谢意。

二、 从线性规划谈起

在平面解析几何中，一个含两个变量 x_1 和 x_2 的一次方程 $ax_1+bx_2=c$ 表示平面上的一条直线，不等式 $ax_1+bx_2>c$ 表示该直线的一侧，而 $ax_1+bx_2<c$ 表示该直线的另一侧(例如图 2.1 中所示)。

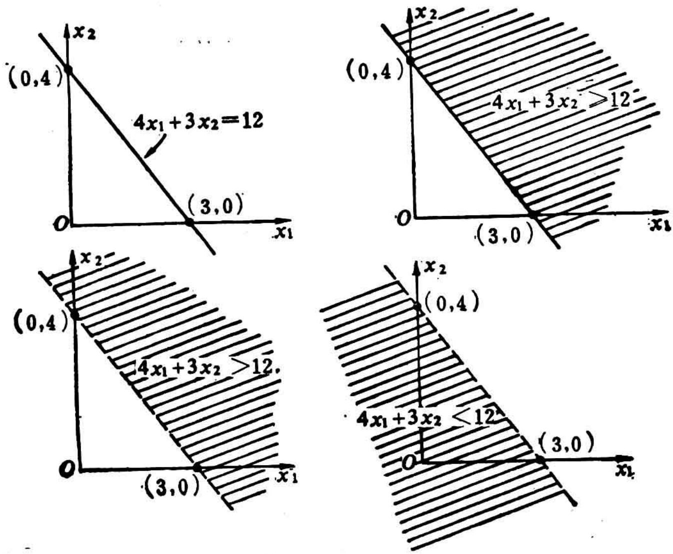

图 2.1

我们称 ax_1+bx_2 为**线性函数**(或**二元线性函数**)，称 $ax_1+bx_2=c$为线性方程，而称 $ax_1+bx_2\geqslant c$，或 $ax_1+bx_2\leqslant c$，或 ax_1+

$bx_2>c$，或 $ax_1+bx_2<c$ 为线性不等式。有不少实际问题可以用线性函数来描述，进而用一种线性规划方法来求解。什么是线性规划？先从一个产品生产计划的简单例子说起。

某工厂生产两种产品：甲和乙。生产每件甲的利润为 4 元，生产每件乙的利润为 3 元。每件甲的加工时间为每件乙的两倍。如全部时间用来加工乙，则每日可生产乙 500 件。工厂每日供应的原料只够生产甲和乙的总数共 400 件。问如何安排甲和乙的日产量，使工厂在现有的条件下，获得最大利润？

先看看这个问题的变量(未知参数)是什么？令

x_1 ＝产品甲的日产量，

x_2 ＝产品乙的日产量。

再看看现有条件(约束条件)是否能用 x_1，x_2 和已知参数的线性函数关系式表达出来？

工厂的日总产量为 x_1+x_2。原料的供应最多只够生产400件(甲和乙的总量)。因此 x_1，x_2 必须满足

$$x_1+x_2\leqslant 400。\tag{1}$$

这就形成了一个对 x_1，x_2 的约束条件。

从加工时间来看，每件甲相当于两件乙，而每日全部时间可加工乙 500 件，所以得到第二个约束条件

$$2x_1+x_2\leqslant 500。\tag{2}$$

因为产量是非负数，所以必然有

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0\tag{3}$$

的限制。这是第三个约束条件。

(1)—(3) 描述了问题的全部现有条件，称之为问题的**约束条件**。工厂的日利润总数(元)为

$$4x_1+3x_2,$$

也就是问题的评判标准，称之为**目标函数**。

任意一组满足约束条件(1)—(3)的数(x_1, x_2)称为问题的**可行解**；给定一组可行解，就可以算出一个目标函数值。例如(50,350)满足(1)—(3)，代入目标函数，得利润值

$$4\times 50+3\times 350=1250\text{ 元。}$$

可行解一般有无穷多组。问题的要求是从这无穷多组可行解中找出一组来使目标函数(利润)值为最大，也就是求一组满足(1)—(3)的$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$，使得

$$4x_1+3x_2\leqslant 4\bar{x}_1+3\bar{x}_2$$

对一切满足(1)—(3)的(x_1, x_2)都成立。称$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$为问题的**最优解**(或**最大解**)，而称$4\bar{x}_1+3\bar{x}_2$为**最优值**(或**最大值**)。

我们用符号 max 表示最大值(英文 maximum 之缩写)。于是上面的问题可简写为求

$$\begin{cases}\max \quad (4x_1+3x_2) & \\ x_1+x_2\leqslant 400 & (1)\\ 2x_1+x_2\leqslant 500 & (2)\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 & (3)\end{cases}$$

的最优解(最大解) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$。

因为这里的目标函数和约束条件都是由线性函数构成，所以统称这类问题为**线性规划问题**。

怎么求最优解？对于两个变量的线性规划问题，可以用图解法。

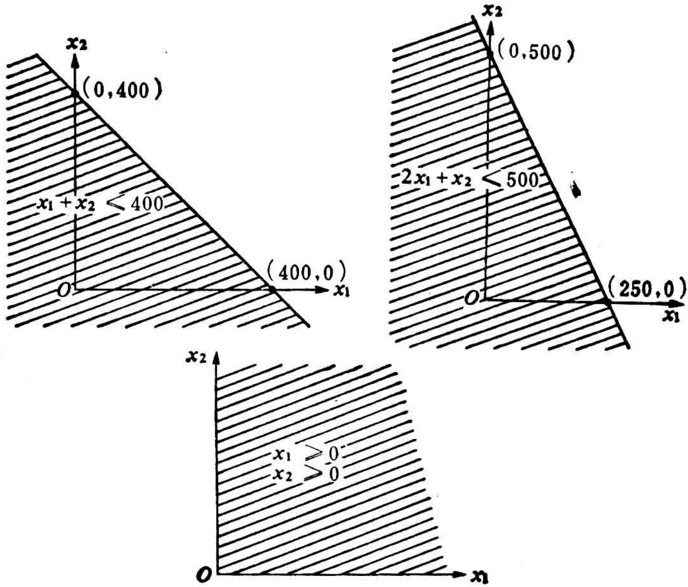

图 2.2

先在座标平面上画出各约束条件：

三个图中的阴影部分分别是满足约束条件(1),(2),(3)的点(x_1, x_2)所构成的图形。因为可行解(x_1, x_2)必须同时满足这些约束条件，所以只要画出上面各图中阴影部分的公共部分(称之为交集)，就得到了全部可行解(x_1, x_2)所构成的图形。这个图形又称之为**约束集**，记作R。每个可行解对应于R中的一点

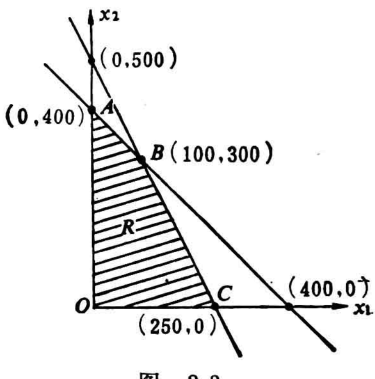

图 2.3

(见图 2.3)。R 中的点(x_1, x_2)如果使至少一个约束条件的等号成立，则称之为R 的**边界点**，例如满足

$$
(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 400 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 500 \\ 0 \leqslant x_1 \leqslant 100, \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}
$$

的(x_1, x_2)是边界点。图 2.3 中直线段 $\overline{AB}$ 就是满足上述(I)的边界点全体。不难看出R 的所有的边界点是由线段 $\overline{OA}$，$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CO}$ 组成的，或者说R 的**边界**就是由顶点O，A，B，C 所构成的多边形的边界线。R 中不是边界点的点称之为**内点**。全体内点构成R 的**内部**。实际上满足

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 < 400 \\ 2x_1 + x_2 < 500 \\ x_1 > 0, \quad x_2 > 0 \end{cases}
$$

的一切(x_1, x_2)为R 的内点。图 2.3 中多边形除去四条边界线后就构成R 的内部。

现在来看一下目标函数值变化的图形。任意给定一个值 y，使目标函数取 y 值的所有的点(x_1, x_2) 组成一条直线 $4x_1 + 3x_2 = y$(这样的直线称之为**等值线**，或**等高线**。) 对不同的 y_1，y_2，$4x_1 + 3x_2 = y_1$ 和 $4x_1 + 3x_2 = y_2$ 虽为不同的两条直线，但却是相互平行的。当 y 逐渐增大时 (例如逐次取 $y = 0, 1, 2, 3, \cdots$)，在平面上可以画出一系列的平行线，不同直线上的点将使目标函数取不同的值，离原点 $O = (0, 0)$ 越远的直线上的点 (x_1, x_2) 将使目标函数值越大。随着 y 的增大，等值线 $4x_1 + 3x_2 = y$ 在R 上按箭头所示方向平行地向前推进(图2.4)，当 $y < 1300$ 时，等值线和 R 的内部相交 (有公共点)，而

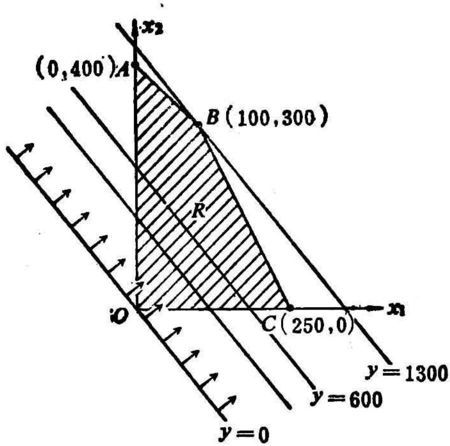

图 2.4

当 $y=1300$ 时，等值线 $4x_1+3x_2=1300$ 和 R 的边界相交，其交点就是两个边界线 $x_1+x_2=400$，$2x_1+x_2=500$ 的交点 B，解这组二元一次方程，得解 $B=(100,300)$。当 $y>1300$ 时，等值线不再和 R 相交，也就是在等值线上的点不再是可行解了。因此(100，300)是在约束条件下使目标函数取最大值的点，也就是最优解为 $\bar{x}_1=100, \bar{x}_2=300$，而最大值为 $4\bar{x}_1+3\bar{x}_2=1300$。工厂如日产 100 件甲，300 件乙，将获得最大利润 1300 元。

从图 2.4 中可见，线性规划问题的最优解不仅一定是在边界上达到，而且可以从多边形的顶点中找到最优解。在这个例题中最优解恰好只有一个。可以设想，如等值线恰好平行于某一边界线(例如是 $\overline{AB}$)，则整个边界线(例如 $\overline{AB}$)上的点都是最优解。只要把多边形的所有顶点座标算出来，再算出相应于各顶点处的目标函数值，然后把对应于最大目标函

数值的顶点找出来，就可以得到最优解。具体计算结果列表如下：

顶点	(x_1, x_2)	$4x_1+3x_2$	最大值	最优解
A	(0,400)	$4\times0+3\times400=1200$		
B	(100,300)	$4\times100+3\times300=1300$	1300	(100,300)
C	(250,0)	$4\times250+3\times0=1000$		
D	(0,0)	$4\times0+3\times0=0$		

现在可以自然地对具有 $n(\geqslant1)$ 个变量的问题给出线性规划的一般定义了。

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个变量。称一次方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

为**线性方程(或线性等约束)**，称不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant b$$

或者

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant b$$

(也可表为

$$(-a_1)x_1+(-a_2)x_2+\cdots+(-a_n)x_n\leqslant -b)$$

为**线性不等式(或线性不等约束)**。称一次函数

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

为**线性函数**。

线性规划的一般数学模型：

在满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{l1}x_1+\cdots+a_{ln}x_n\leqslant b_l \end{cases}$$

的一切$(x_1,\cdots,x_n)$中求出使目标函数

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$

达到最大（或最小）值的$(\bar{x}_1,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$。若记max 为最大值(maximum)，min 为最小值(minimum)，问题可简写为：求

$$\begin{cases}\begin{array}{l}\quad\max\\(\text{或}\min)\end{array}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\\ R:\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\quad(i=1,\cdots,l)\end{cases}$$

的解$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$。称满足约束条件的$(x_1,\cdots,x_n)$为**可行解**；称可行解全体为**约束集**，记作R。称使得目标函数达到最大(或最小)值的可行解$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$为**最大**(或**最小**)**解**，统称之为**最优解**。

当$n=2$时，用上述例题中介绍的办法画出约束集R.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\leqslant b_i\quad(i=1,\cdots,l)$$

的平面图(例如$l=4$)

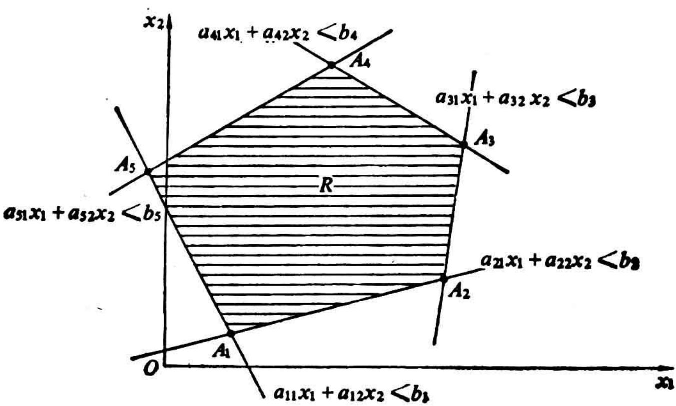

图　2.5

算出该多边形各顶点 A_i 的坐标 (x_1, x_2)，比较在各顶点上目标函数值 $c_1x_1+c_2x_2$ 的大小，就可以求得最大(或最小)值以及最优解了。

当 $n\geqslant 3$ 时，这种图解法就不再适用了。虽然我们可以同样定义 R 的**边界点**为 R 中使至少一个 $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ 成立的点 $(x_1, \cdots, x_n)$，而且可以证明最优解一定在 R 的边界上达到。但是要算出全部边界点是极其困难的事。1947 年，美国数学家但泽克(Dantzig)提出一种**单纯形方法**：从任何一个边界点开始，按照一定程序进行某种代数运算，得到另一个边界点，这个点使目标函数值得以增加(或者是得以减少)。经过若干次这种代数运算后，就可以求得最优解。我们不打算详细介绍这个方法，因为这需要用些高等代数知识，超出了小册子的范围。有兴趣的读者可参阅有关“线性规划”的专著。

三、线性双目标规划

我们还是从上一节的例子说起。那里已经得出，当工厂的决策者把最高利润作为唯一的目标时，最优生产方案是：每日生产产品甲 100 件和产品乙 300 件。现在再加上一个条件：产品甲是紧俏商品。预测市场需要量为 300 件。显然上述最优方案所给出的产品甲的产量比市场的需要量相差甚大。如果决策者认为应该把尽量满足市场需要也作为一个追求目标时，那么当如何重新制定生产方案呢？

现在有两个目标：

$$f_1(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \quad \text{（利润）}$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \quad \text{（甲产量），}$$

希望在约束条件

$$x_1 + x_2 \leqslant 400$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 500$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

下找到一个可行解$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$，使之同时为 $f_1(x_1, x_2)$ 和 $f_2(x_1, x_2)$的最大解。这样的$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$是否存在？让我们先分别对每个目标求最大解：

$$\begin{cases} \max \ (4x_1 + 3x_2) \\ R: \quad x_1 + x_2 \leqslant 400 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leqslant 500 \\ \qquad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

有唯一的最优解(100,300)(从图解看出)。

$$\begin{cases} \max\ x_1 \\ R:\quad x_1+x_2\leqslant 400 \\ \qquad 2x_1+x_2\leqslant 500 \\ \qquad x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

也只有唯一的最优解(250,0)。

由此可见，上述两个线性规划问题没有共同的最优解。

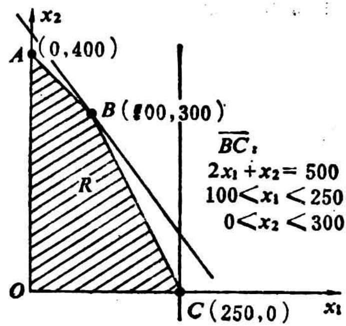

图 3.1

如果决策者把两个目标看成同样重要，应该怎么办？现在有两个方案，方案(100,300)可得最大利润1300元，但甲的产量100件太少，而方案(250,0)可得甲的最高产量250件，但利润只有 $4\times 250=1000$ 元。看来这两种方案都不理想。如何从R中找出合适的方案？先设法把R中肯定不好的可行解去掉。我们称可行解(x_1,x_2)为劣解，如果存在另一个可行解(y_1,y_2)使

$$f_1(y_1,y_2)>f_1(x_1,x_2),$$
$$f_2(y_1,y_2)\geqslant f_2(x_1,x_2),$$

或者

$$f_1(y_1,y_2)\geqslant f_1(x_1,x_2),$$
$$f_2(y_1,y_2)>f_2(y_1,y_2)$$

(即方案(x_1,x_2)可以改进)。易见，R的内点一定是劣解，因为当

$$x_1+x_2<400, 2x_1+x_2<500, x_1>0, x_2>0$$

时，总可适当选取(y_1,y_2)，$y_1>x_1$，$y_2>x_2$ 使

$$y_1+y_2\leqslant 400, 2y_1+y_2\leqslant 500, y_1>0, y_2>0,$$