

# 光学系統計測方法

Г.Г. 斯雷薩力夫着

第二版  
补充和修改

程永铭 译  
谢德胜 校

# 内 容 提 要

从第一版问世后三十年来，应用（计标）光学发生了很大的变化：出现了光学系统新的应用范围，新的计标方法（电子计标机的出现招致新的计标方法），在实际中出现了许多新的系统，完善了像的质量评价方法，鉴别率的概念得到了进一步的发展。这一切招致书的完全修改。

在第二版中重新写了一些章节，其中有光学系统的自动计标方法，光学系统的公差计标原理，像的质量评价，温度变化对像的影响，完全修改了光路计标、三级象差、系统结构的初始计标、通用的系统计标方法的内容。

本书可供从事光学系统计标和设计的工程技术人员以及从事光学工业工作的人员参考。

表面的变形	216
3. 借助对数表精确计算通过二次曲面的光路	217
4. 确定非球面的子午截面的级数及其变换	220
5. 在电子计算机上的光路计算	222
6. 细线散光束的计算	224
7. 对于轻微变形表面的象散光束的计算	230
8. 二次非共轴表面	232
9. 在三级像差范围内, 含有非球面的共轴系统的计算	234
10. 消除折射(反射)面变形的高级像差	237
11. 波象差的计算	237
轴上点的波象差计算	241
轴外点的波象差计算	243
波象差的符号规则	244
12. 一个面的变形	245
13. 两个和更多曲面的变形	248
14. 三个和更多变形面的情况	250
15. 把微分方程用来计算具有非球面的光学系统	251
一个反射面的情况	251
折射面	251
两个反光镜的不明系统	254
16. 应用环形如纹曲面(盘状曲面)于光学系统中	259
17. 基本公式的综合	264
5. 变形镜头	266
18. 引言	266
19. 变形镜头的高斯光学	268

# 序 言

从《光学系统计标方法》考着的第二版出版后的三十年内，应用（计标）光学发生了很大的变化。显著地扩大了光学系统应用的光谱范围，所以不仅需要新的材料，而且甚至需要新的计标方法，例如对于伦琴射线的散射。要求许多场镜和聚光镜型式的光学系统的孔径角能够达到可能的极限—— $90^\circ$ ，与此同时又要求系统的透镜数目不应当多于1-2。

应用非球面已经不像三十年前那样稀少，具有非球面的光学系统理论也得到显著的发展，特别是这种系统的实际计标方法得到了完善。

但是，近几年来主要事件是采用了高速电子计标机，借助电子计标机大大地缩短了光路的计标时间（这使得有可能不计较光线的数目和在纸上计标的由光学系统给出的像的最重要的质量特性），并能够期望计标的完全自动化。但是，使用电子计标机的经验表明，这种希望为时尚早。通晓光学系统和象差特性只能给电子计标机工作指出这样的方向，使得能够在短期内达到需要的结果。电子计标机的出现不会贬低象差理论的作用，相反，必须在某些方向（例如在具有非球面的系统的象差和性质研究的领域内）上加深这个理论。电子计标机显著地加快像差透镜物镜这样一些简单的系统的计标，而且在这个领域内差不多达到完全的自动化。复杂光学系统（例如近来在照相、电影和电视摄影领域内得到广泛使用的变焦距物镜）的计标，由于计标数量过大不用电子计标机就不能实现。

需要在大气层外使用光学仪器，这给光学工业提出了新的任务，其中拟制在温度变化颇大的条件下工作的新型光学系统。近几年，苏联和国外的作者建立了在温度变化的情况下不会被破坏的光学系统计标理论。

随着光学系统孔径的增大和对系统鉴别性能的要求的提高，要求有更完善的像（由这些系统成的）的质量的评价方法；用于这种评价所必须的计标

的复杂性，在有了电子计算机后已不再害怕了。已经可以更详细地改良偏心和其它制造误差，以及材料缺陷对象质的影响问题。

在本书的第二版中增加了新的章节：温度对像的位置和光学系统的象差的影响，光学系统中的公差的设计，其中包括偏心公差的设计；关于像的质量的评价；关于包含非球面的系统，其中包括具有双曲率的表面，由这种曲面构成变形镜头。较大篇幅用来论述有关把电子计算机用于光学系统的设计和光学系统设计自动化问题。

虽然若干章节，其中包括第一、二和第三章，从标题来看与第一版的相应章节是一致的，但其内容则经过根本性的修改。纠正了明显的刊误，增添了在实际中有效的公式和介绍，特别是许多根据纵向和横向象差来设计波象差的公式；大大地减缩了有关目前很少应用的光路三角设计方法以及某些其它方法，这些方法在实际中还看不出其必要性。

第七章由技术科学付博士 A. N. 盖拉姆与季南写的，第八章第 13 节由技术科学博士 Г. B. 博伽列佛叶编写。

在收集和整理材料时，Г. Г. 科斯季姆和 A. У. 斯涅萨力夫给予了很大帮助。作者对他们以及帮助作者提出建议和意见的本部门的全体同事表示深切感谢。

# 第一章

## 通过共轴球面光学系统的光路计算

### 1. 引言

在一切可能情况中的光学系统计算由两个阶段组成。第一个阶段是借助某一方法，常常利用三级象差理论寻找近似介，而在第二阶段上，用逐渐改善（根据通过初始系统的大量光线的光路检验计算结果，对系统方案作稍许的修改，以逐渐达到要求）的方法达到符合一切要求的最后的介。因此，通过研究系统的光路计算通常占整个工作的50-90%。系统愈复杂，它的孔径角和视场角愈大，则化在校正上的时间也愈长。

计算方法的基本问题之一是拟制迅速而方便，能够根据中间的结果来判断某个面的象差贡献等的光路计算方法。

直到本世纪五十年代，通过光学系统的光路计算方法和大数普通精确计算（要求5-7位数值）方法一样，是以应用对数表为基础的；利用便于求对数的公式来进行计算。

本书第一版以及大量国内外文献中详细叙述的，从匹泽凡时代（十九世纪中期）就开始广泛应用的，首先在纸上计算光学系统的三角计算方法，到了廿世纪后半叶（经出现电子计算机后）开始衰退了。

现有光路计算的各表不适用于电子计算机的计算是因为下列原因：

1)、大量地从角度化为正弦和正切以及作相反的转化，要求在电子计算机上作大量的运算；

2)、结果的精度与表面半径大小的依赖关系，而表面半径通常具有各种值；

3)、必须有专门用于平面和接近平面的公式；

4)、当存在非球面的情况下计标必表相当复杂。

因此曾拟制了消除这些缺点的一些计标方法。这中间应当指出菲德耳方法，该方法将在下面作详细地描述。考虑到还不是从事光学计标的所有企业都有电子计标机这一事实，仍列出在匹兹凡时代就得到广泛应用的公式，但是由于这些公式已在本书第一版中作了详细的论述（第一章），而在目前又没有实际价值，故删去了原有的整个误差理论。

我们首先来研究球面系统。

## 2、在子午面中的光路计标名称和符号

1955年颁布了在几何光学中碰到的基本量的符号的国家标准。在这个标准中采用在本国计标部门中所应用的，与德国和俄国的作者所取的符号基本上一致的符号。

设  $CO$  (图 1.1) 是系统的光轴； $MS$  是入射在球面  $AM$  上的光线； $M$ 、 $S$  是光线与表面及轴的交点； $C$  是表面  $AM$  的曲率中心； $A$  是表面顶点； $MS'$  是为表面  $AM$  折射的光线。引用下列符号：截距  $AS$  用  $S$  来表示；曲率半径  $AC=MC$  用  $r$  来表示；入射光线所在介质的折射率用  $n$  来表示；光线与轴的交角  $\angle MSA$  用  $u$  来表示；法线与轴的交角  $\angle MCO$  用  $\varphi$  来表示；光线与法线的交角  $\angle SMC$  用  $i$  来表示；经折射后的相对的量用同一符号上加撇来表示 ( $S'$ ,  $n'$ ,  $u'$ ,  $i'$ )。

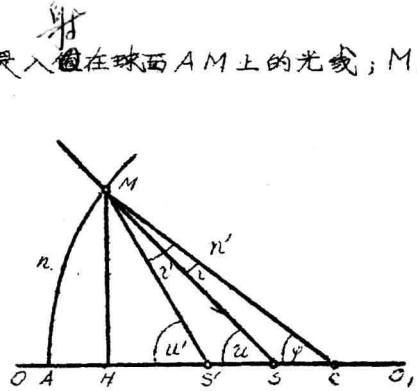


图 1.1

符号规则用处很大。假定所有的不迹象都是用这样的方法来作出的，使光线从左向右传播，而且把光线的这个传播方向看成是正的。取顶点  $A$  作为截距  $AC$  和  $AS$  的原点；这样，当  $S$  和  $C$  在  $A$  的右边时， $S$  和  $r$  是正的。如

果把光线作反时针转动使其与光轴  $OO'$  的正方向重合, 那末, 角  $u$  和  $u'$  是正的; 如果光线作反时针旋转使其与法线  $MC$  重合, 并且把  $M$  点作为法线原点, 那末, 角  $i$  和  $i'$  是正的。

图 1.1 上所示的情况下, 所有截距和角都是正的。必须指出, 在这里对角  $i$  和  $i'$  所取的符号规则与鲁尔 [1], 柴伯斯基和埃本斯汀 [2] 等书中所采用的符号规则是不同的。

## 公 式

光线的位置由两个坐标—— $S$  和  $u$  来决定。若已知  $S$  和  $u$ , 我们来确定折射光线的坐标  $S'$  和  $u'$ 。

由三角形  $MSC$  得到:

$$\begin{aligned} \frac{\sin i}{\sin u} &= \frac{SC}{MC} \sin u \\ &= \frac{r-s}{r} \sin u \end{aligned} \quad (1.1)$$

从折射定律得到:

$$\frac{\sin i'}{\sin u'} = \frac{n}{n'} \frac{\sin i}{\sin u} \quad (1.2)$$

角  $u'$  (经折射后) 与  $u$  相差  $i' - i$  值。

$$u' = u + i' - i \quad (1.3)$$

由三角形  $MS'C$  得到:

$$r - s' = \frac{r \sin i'}{\sin u'} \quad (1.4)$$

这四个公式解决了单个折射面的情况的问题, 因为根据已知的  $S$  和  $u$ , 可以由这四个公式求出  $S'$  和  $u'$ 。

为了确定整个光学系统的光路还必须有一个从一个面到另一个面 (例如从第  $K$  面到第  $K+1$  面) 的过渡公式 (转化公式)。

设 (参 1.2)  $M_K S'_K$  是经第  $K$  面  $Q_K M_K$  折射后入射在第  $K+1$  面  $Q_{K+1} M_{K+1}$

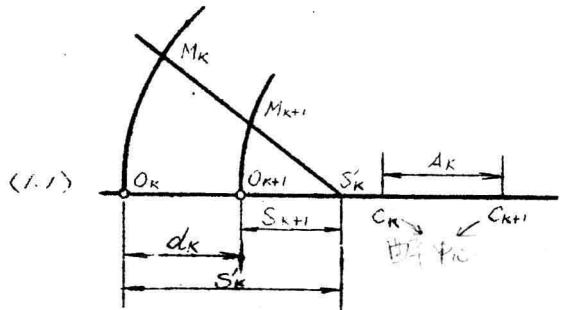


图 1.2

上的光线。从图得到：

$$S_{K+1} = S'_K - d_K \quad (1.5)$$

$$u_{K+1} = u'_K \quad (1.6)$$

此处  $d_K$  是在第  $K$  面与第  $K+1$  面的顶点之间的距离。此外有

$$n_{K+1} = n'_K \quad (1.7)$$

方程 (1.5) - (1.7) 解决了从一个面向另一个面过渡的问题。为便于计算最好引用辅助值  $A_K = r_{K+1} - r_K + d_K$  —— 是在第  $K$  面中心和第  $K+1$  面中心之间的距离 (在图 1.2 上  $A_K = C_K C_{K+1}$ )。于是依照下列公式  $r_{K+1} - s_{K+1}$  值将通过  $r_K - s'_K$  和  $A_K$  来表示

$$r_{K+1} - s_{K+1} = r_K - s'_K + A_K \quad (1.5^*)$$

公式 (1.5\*) 代替了公式 (1.5)，这使计算图式简化了一些。

## 傍轴光线

### 基本公式

如果光线在离光轴无限小的距离上通过整个光学系统，那末，把这种光线称为傍轴 (另的或轴的) 光线。由于傍轴光线与轴及傍轴光线与法线形成的角都是无限小的，故通过系统的傍轴光线的光路计算可以利用公式 (1.1) - (1.4)，此时公式中的正弦用非常小的角度来代替：

$$i = \frac{r-s}{r} u; \quad (1.1^*)$$

$$i' = \frac{n}{n'} i; \quad (1.2^*)$$

$$u' = u + i' - i; \quad (1.3^*)$$

$$r - s' = r \frac{i'}{u} \quad (1.4^*)$$

从第  $K$  面到第  $K+1$  面的过渡公式也和普通光线一样，用 (1.5) 和 (1.6)

两个公式。

般情况，如果所有角度增加或缩小同样的倍数，计算结果（ $S'$  值）仍然不变，也就是结果与所取的角度单位无关，因而傍轴角  $u$  可以取任意值。计算最好按照和轴成有限角度的光线一样的公式进行，此时应用的对数表也相同。在两种情况中碰到通用的值，例如曲率半径的对数、折射率比值的对数、 $A_k$  值的对数。但是，当需要计算的只是傍轴光线的  $S$  和  $S'$  值，特别是如果应用计算机的话，最好应用其它的公式。这些公式是从通过曲率半径为  $r$  的面的折射的基本公式中得出的：

$$\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n' - n}{r}$$

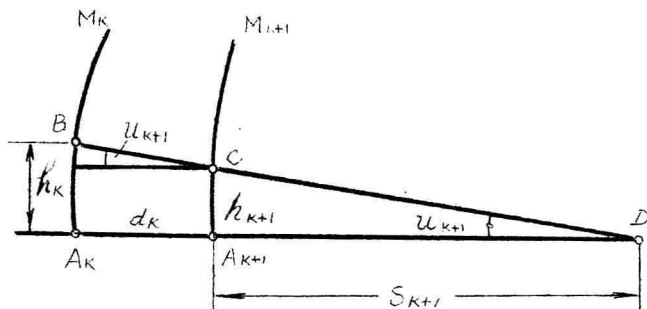
两边同乘以  $h$ （在图 1.1 上为距离  $\overline{MH}$ ）并用  $\frac{h}{S} = u$ ， $\frac{h}{S'} = u'$  [《傍轴角》，与公式 (1.1\*) - (1.4\*) 中遇到的角相似] 来表示比值时得到

$$n'u' - nu = \frac{h(n' - n)}{r} \quad \text{傍轴角}$$

或者引用标明折射面序号的符号

$$n_{k+1} u_{k+1} - n_k u_k = \frac{h_k}{r_k} (n_{k+1} - n_k) \quad (1.8)$$

为了从第  $k$  面的高度变化为第  $k+1$  面上的高度，我们来观察图 1.3，在这个图上画出了为空气间隔  $A_k A_{k+1} = d_k$  分开的前后两个面  $A_k M_k$  和  $A_{k+1} M_{k+1}$ 。光线  $BCD$  经表面  $A_k M_k$  折射后入射在面  $A_{k+1} M_{k+1}$  上，并与轴形成  $u_{k+1}$  角。从图 1.3 看到：



(图 1.3)

$$h_{k+1} = h_k - d_k u_{k+1} \quad (1.9)$$

公式(1.8)和(1.9)可以计算通过整个系统的光路。 $S_{k+1}$ 和 $S'_k$ 值用下面关系式决定

$$S_{k+1} = \frac{h_{k+1}}{u_{k+1}};$$

$$S'_k = \frac{h_k}{u_{k+1}}.$$

这个式子容易从图求得。

对于实际的计算最好引用变量 $\check{u}$ 来代替变量 $u$ ，并用符号 $\check{v}$ 来表示这个变量时有

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{v}_{k+1} - \check{v}_k = \frac{h_k}{r_k} (n_{k+1} - n_k); \\ h_{k+1} = h_k - \frac{d_k}{n_{k+1}} \check{v}_{k+1}. \end{array} \right.$$

用来计算通过薄的密接透镜系统的傍轴光线光路的公式：

对复杂系统进行初始光路计算的许多情况下，为了简化，可以采取把系统的每个部分看成是由一些薄的密接单透镜组成的复杂透镜。用符号 $\varphi$ 表示号码为 $i$ 的这样一个复杂透镜的允焦度；从理想光学系统的理论知道，

$$\varphi_i = \sum \frac{n_{k+1} - n_k}{r_k}$$

在这里对透镜 $i$ 的所有的面求和。对于 $i$ 群的全部透镜来说，光线与组元全部表面的交点高度 $h$ 等于同一个 $h_i$ 值。把公式(1.8)依次应用于组元的一切表面并把全部得到的方程相加后得到：

$$\left. \begin{array}{l} \alpha'_i - \alpha_i = h_i \varphi_i, \\ h_{i+1} - h_i - d_i \alpha_i, \end{array} \right\}$$

此处 $\alpha_i$ 和 $\alpha'_i$ 是傍轴光线通过透镜 $i$ 折射前后与轴的角度； $d_i$ 是组元 $i$ 和组元 $i+1$ 之间的距离。

把这些公式依次应用于系统的所有透镜时，能够画出通过透镜系统的傍轴光线的光路。

大家知道，这同一<sup>此</sup>公式可以用于有限厚度的透镜系统，但在这种情况中需要把  $h_i$  理解为光线与透镜的主平面的交点高度。此外，有限厚度透镜系统的光焦距  $f_i$  应当用平行于光轴入射在系统上的傍轴光线的光路的精确计算来求出。

把两条傍轴光线的座标联系起来的关系式：

如果已经计算了任意一条通过光学系统的傍轴光线的光路，则任何其它傍轴光线的座标为下面公式与第一条傍轴光线的座标联系起来。

$$Q_{KX} - Q_{KS} = \frac{h_{K-1} y_{K-1}}{h_K y_K} (Q_{K-1, X} - Q_{K-1, S}), \quad (1.10)$$

此处  $Q_{KX}$  和  $Q_{KS}$  是第一条和第二条光线对第  $K$  面的不变量，也就是下列形式的表示式：

$$\begin{cases} Q_{KS} = n_K \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{s_K} \right) = n_{K+1} \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{s_K} \right); \\ Q_{KX} = n_K \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{x_K} \right) = n_{K+1} \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{x_K} \right); \end{cases}$$

$s$  和  $x$  是从  $K$  面顶点到第一条和第二条傍轴光线与轴交点的距离； $h$  和  $y$  是第一条和第二条光线与  $K$  面交点的高度。借助下面的公式能够从公式 (1.10) 中依次消去  $y_K$  值

$$\frac{y_K}{y_1} = \frac{h_K}{h_1} + h_1/h_K (Q_{1X} - Q_{1S}) \sum_{v=2}^{v=K} \frac{d_{v-1}}{n_v h_v h_{v+1}} \quad (1.11)$$

为密德应用的这两个公式的推导可以在鲁尔 [1] 及柴伯斯基和埃本斯汀 [2] 的书中找到；这两个公式的推导将在第二章中进

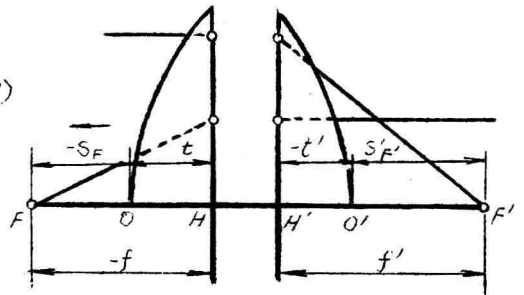


图 1.4

行。公式(1.10)和(1.11)由于其复杂性没有直接用于光路计算，但是它们在一些三级象差的表示式的变换中有很大用处；在由有限数目的薄透镜群（以后我们将它们称为组元）构成的系统中，这些公式被大大地简化了，并且能够有效。

根据任意两条傍轴光线的坐标确定光学系统的基点。

确定基点（主点和焦点）位置的最简单方法是计算两条平行于轴射入系统的傍轴光线的光路：一条在正向中的光路即从左到右（正向光路），另一条在相反方向中的光路即从右到左（反向光路）。在系统顶点 $O, O'$ 与在正向光路中 $(S'_F)$ 光线和轴的交点以及在反向光路中 $(S_F)$ 光线和轴的交点之间的距离 $\overline{S'_F}$ 和 $\overline{S_F}$ （图1.4）给出了焦点（后和前）的位置，而比值 $\frac{h_1}{u_p} = f'$ 和 $\frac{h_1}{u_p} = f$ 给出了焦距（后和前）的值。主点相对于后面的面（对后主点）和第一面（对前主点）的位置被截距 $t'$ 和 $t$ 决定。如果主点在相应的顶点的右边，则 $t'$ 和 $t$ 值认为是正的。例如在图1.4上 $t > 0$ ，而 $t' < 0$ 。

$$t' = \overline{S'_F} - f' ; \quad t = -f + \overline{S_F} .$$

在计算反向光路中的光线时，取

$$\begin{aligned} \overline{r_1} &= -r_p ; & \overline{r_2} &= -r_{p-1} ; & \dots \\ \overline{n_1} &= n_{p+1} ; & \overline{n_2} &= n_p ; & \dots \\ \overline{d_1} &= d_{p-1} ; & \overline{d_2} &= d_{p-2} ; & \dots \end{aligned}$$

代替用来决定基点位置的两条上述专门选取的光线，我们可以利用二条任意的傍轴光线的光路计算，知道了这两条光线的初始座标 $S_1$ 和 $u_1$ ， $\overline{S_1}$ 和 $\overline{u_1}$ 及最终的座标 $S'_p$ 和 $u'_p$ ， $\overline{S'_p}$ 和 $\overline{u'_p}$ 后可以求出所要求的 $f, f', t$ 和 $t'$ 值。

用 $S$ 和 $S'$ （图1.5）来表示第一条傍轴光线在折射前后与轴的交点。设 $HS = -\xi$ ，和 $H'S' = \xi'_p$ 是从主面到 $S$ 和 $S'$ 点的距离。对于第二条光

线与轴的交点的相对应的值用  $\bar{\xi}_1$  和  $\bar{\xi}'_p$  来表示。高斯光学的两个基本方程对第一条光线有

$$\frac{f}{\bar{\xi}_1} + \frac{f'}{\bar{\xi}'_p} = 1,$$

$$\frac{\bar{\xi}'_p}{\bar{\xi}_1} = \frac{u_1}{u'_p};$$

对第二条光线有

$$\frac{f}{\bar{\xi}'_1} + \frac{f'}{\bar{\xi}_p} = 1;$$

$$\frac{\bar{\xi}'_p}{\bar{\xi}'_1} = \frac{u_1}{u'_p}.$$

从这个方程组求得

$$\frac{u'_p}{u_1} f' + f = \bar{\xi}_1.$$

用  $S_1$  和  $S'_p$  来表示从顶点到点 S 和点 S' 的距离以及用  $\bar{S}_1$  和  $\bar{S}'_p$  来表示第二条光线的相应的值。由图 1.5 看到  $\bar{\xi}_1 = S_1 - t$ ,  $\bar{\xi}'_p = S'_p - t'$ 。因此,

$$\frac{u'_p}{u_1} f' + f = S_1 - t$$

对于第二条光线

$$\frac{u'_p}{u_1} f' + f = \bar{S}_1 - t.$$

由第二个方程减去第一个方程后得到

$$f' \left( \frac{\bar{u}'_p}{u_1} - \frac{u'_p}{u_1} \right) = \bar{S}_1 - S_1$$

于是求得:

$$f' = \frac{\bar{S}_1 - S_1}{\frac{\bar{u}'_p}{u_1} - \frac{u'_p}{u_1}}; \quad f = \frac{\bar{S}'_p - S'_p}{\frac{\bar{u}_1}{u'_p} - \frac{u_1}{u'_p}}. \quad (1.12)$$

知道  $f$  和  $f'$  后, 容易求出  $t$  和  $t'$  :

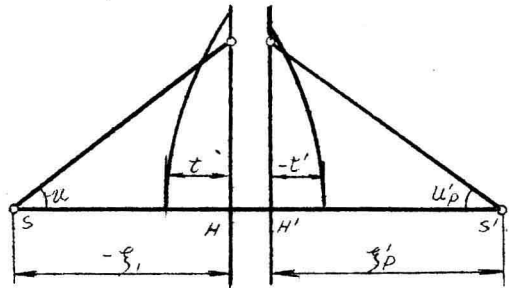


图 1.5

2. 系总总总总

$$\left. \begin{aligned} t = S_1 - \frac{u_p' f' + u_i f}{u_1} &= -\frac{\overline{u_p' f' + u_i f}}{u_1} + \overline{S_1}; \\ t' = S_1' - \frac{u_p f' + u_i f}{u_p} &= \overline{S_1'} - \frac{\overline{u_p f' + u_i f}}{u_p}. \end{aligned} \right\} \checkmark \quad (1.13)$$

下面公式可以用来检验焦距的计算是否正确

$$\overline{n_i f' + n_p f} = 0 \quad (1.14)$$

用两种不同方法来表示  $t$  和  $t'$  的公式 (1.13) 不要求另外的检验。

### 按照施米特公式来计算光路

T. 施米特 [3] 拟制了不要应用三角表并适用于计算机计算的计算光路方法。

光线的位置用  $u$  角的正弦和在光线  $MS$  上所作垂线  $OH$  的长度  $p$  来决定 (图 1.6)。试根据  $u$  和  $i$  角来求出  $p$  值。截距  $\overline{OM}$  的长度等于  $2r \sin \frac{\varphi}{2}$ 。由三角形  $OMH$  得到  $p = \overline{MO} \cos \angle MOH$ ；由于  $\angle MOH = u - \frac{\varphi}{2}$ ，故



图 1.6

$$p = \overline{MO} \cos \left( u - \frac{\varphi}{2} \right) = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( u - \frac{\varphi}{2} \right).$$

但是  $\varphi = u - i$ ，因此  $u - \frac{\varphi}{2} = \frac{u+i}{2}$ 。于是

$$p = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{u+i}{2}. \quad (1.15)$$

同样有

$$p' = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{u+i'}{2} \quad (1.16)$$

$$\text{差 } p' - p = 2r \sin \frac{\varphi}{2} \left( \cos \frac{u+i'}{2} - \cos \frac{u+i}{2} \right).$$

$$\text{但是 } \cos \frac{u+i'}{2} - \cos \frac{u+i}{2} = -2 \sin \frac{u+u+i'+i}{4} \sin \frac{u'-u+i'-i}{4}.$$

由于  $u' - u = i' - i$  和  $u + i' = u' + i$ ,

$$\cos \frac{u+i'}{2} - \cos \frac{u+i}{2} = -2 \sin \frac{u+i'}{2} \sin \frac{i'-i}{2}.$$

因此

$$p' - p = -4r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{u+i'}{2} \sin \frac{i'-i}{2} \quad (1.17)$$

把  $p$  的表示式 (1.15) 代入这个公式的右边后得到

$$p' - p = -2p \frac{\sin \frac{u+i'}{2} \sin \frac{i'-i}{2}}{\cos \frac{u+i}{2}} \quad (1.18)$$

下面的一切变换都是为了消去复合角  $u+i'$ ,  $i'-i$ ,  $u+i$  等, 而只留下  $\sin i$ ,  $\sin i'$ ,  $\sin u$  和  $\sin u'$ , 从而没有三角表也行。注意到

$$\sin \frac{i'-i}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin i' - \sin i}{\cos \frac{i+i'}{2}} \quad \sin \frac{u+i'}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin u + \sin i'}{\cos \frac{u-i'}{2}}$$

把这两个式子代入  $p' - p$  的公式后有

$$p' - p = -p \frac{(\sin i' - \sin i)(\sin u + \sin i')}{2 \cos \frac{i+i'}{2} \cos \frac{u-i'}{2} \cos \frac{u+i}{2}} \quad (1.19)$$

现在我们用变换分母来达到上述目的。从三角学教程中引出关系式

$$4 \cos a \cos b \cos c = \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c) + \cos(a+b+c).$$

把这个式子代入分母中, 我们得到

$$4 \cos \frac{i+i'}{2} \cos \frac{u-i'}{2} \cos \frac{u+i}{2} = 1 + \cos(i+i') + \cos(u-i') + \cos(u+i).$$

假定

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sin i' - \sin i + \sin u; \\ \tau &= \cos i' + \cos i + \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

并列出来表示式  $\sigma^2 + \tau^2 - 1$  后有

$$\tau^2 + \sigma^2 - 1 = 2[1 + \cos(i+i') + \cos(u+i) + \cos(u-i')]. \quad (1.21)$$

这样,  $p' - p$  的公式 (1.19) 的分母具有  $\frac{1}{4}(\tau^2 + \sigma^2 - 1)$  的形式, 故最后有

$$p' - p = -4p \frac{(\sin i' - \sin i)(\sin u + \sin i')}{c^2 + s^2 - 1} \quad (1.22)$$

这个公式能够从  $p$  转化为  $p'$ 。

注意到  $p' - p$  值总是很小，其为光线的纵向象差的数量级。它可以标出比其余的值 ( $\sin u, \sin u', \sin i, \sin i'$ ) 低二级的精度。

在  $p$  和  $s$  值之间存在着关系式

$$p = S \sin u.$$

$p$  和  $\sin i$  由关系式  $\sin i = \sin u - \frac{p}{r}$  联系起来，该关系式从基本计算公式得出

$$\sin i = \frac{r-s}{r} \sin u = \sin u - \frac{S \sin u}{r} = \sin u - \frac{p}{r}.$$

向  $\sin u'$  的转化借助于类似的公式进行

$$\sin u' = \frac{p'}{r} + \sin i' = \sin i' + \frac{p}{r} + \frac{p' - p}{r}.$$

这个公式也可以写成这样：

$$\sin u' = \sin u + \sin i' - \sin i + \frac{p' - p}{r}.$$

或者

$$\sin u' = s + \frac{p' - p}{r}.$$

从  $K$  面向  $K+1$  面的转化依照由图 1.7 得出的公式来完成：

$$p_{K+1} = p'_K - d_K \sin u'_K.$$

这样，对于光路计算有下列公式顺序。

对第一面

$$p_1 = S_1 \sin u_1;$$

对任意面

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sin i = \sin u - \frac{p}{r}; \\ 2. \sin i' = \frac{n}{n'} \sin i; \end{array} \right\}$$

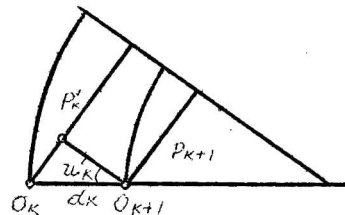


图 1.7