离散数学

李晓东　莫海平　钮佩琨　主　编

东 北 林 业 大 学 出 版 社

离散数学

李晓东　莫海平　钮佩琨　主编

东北林业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/李晓东等主编．-哈尔滨：东北林业大学出版社，1999.9

ISBN 7-81076-002-5

Ⅰ．离… Ⅱ．李… Ⅲ．离散数学 Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 61671 号

责任编辑：朱成秋
封面设计：曹　晖

离散数学
Lisan Shuxue
李晓东　莫海平　钮佩琨　主编
东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路 26 号）
黑龙江省教委印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 10　字数 250 千字
1999 年 9 月第 1 版　1999 年 9 月第 1 次印刷
印数 1--1 000 册

ISBN 7-81076-002-5
O·44　定价：18.00 元

如发现印、装质量问题，请与本厂质量科联系调换。
地址：哈尔滨市南岗区和兴路 147 号 邮编：150080

前　　言

离散数学是现代数学的一个重要分支,它是随着计算机科学的发展而逐步建立的,是一门新兴的工具性学科。离散数学是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标,它与计算机科学相关的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、容错技术、网络理论、开关理论等是密不可分的,充分体现了计算机科学离散性的特点。因此,随着计算机科学的发展,离散数学的应用将越来越广泛,最终将成为现代科学技术的理论基础和重要工具。正因为如此,不但计算机科学专业,信息管理专业也将离散数学作为学生必须学习的基础课程,而且在修订教学计划时,师范院校数学教育专业也将离散数学列为专业课程。

离散数学所涉及的范围非常广泛,凡是以离散量作为其研究对象的数学均属于离散数学。在本书中,没有论及离散数学的所有内容,而是着重讨论离散数学的最基本内容,主要有集合论、数理逻辑、代数系统和图论等几个部分。其目的是使初学者对离散数学的基础知识有一个较全面、系统的了解,为今后在实际工作中应用这些知识或进一步学习有关的内容打下良好的基础。

本书在编写过程中,得到了李燕杰教授的大力支持和帮助,在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限,加上时间仓促,错误和疏漏之处在所难免,希望使用本书的教师和学生不吝指正。

编　者

1999 年 9 月于哈尔滨

目　　录

1 集合论

集合的概念是现代数学中最基本的概念之一,并且已渗透到科学和技术领域,成为现代科学技术的一个基本工具.这一章我们介绍集合的基本概念,集合的运算及其性质,笛卡儿乘积,幂集与划分等.

1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合的定义及其表示法

集合是数学中的一个基本概念,也是一个不能严格定义的原始概念,所以对它只能进行直观描述.一般地说,具有共同性质的事物,其全体就构成一个**集合**(简称**集**).构成集合的事物,就称之为该集合的**元素**.

例如 (1)小于 8 的自然数;

(2)所有中国人;

(3)全国的高等学校;

(4)给定教室内的桌椅;

(5)给定平面上的所有点.

它们都分别构成集合.构成集合的元素分别为自然数、中国人、高等学校、桌椅和点.

对于一个给定的集合,它的元素所具有的性质应该是明确的.

因此,“比较矮的人”,“比较大的实数”,“商店里好看的衣服”等就不能构成集合.同时,约定集合中的元素是互不相同、不分次序的.

通常我们用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,用小写英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.若元素 a 在集合A 中,记作 $a\in A$,读作“a 属于A”;若元素 a 不在集合A 中,记作 $a\notin A$,读作“a 不属于A”.

对于集合,有以下几种常用的表示方法.

一种是**列举法**,即将集合中的所有元素一一列出,写在同一括号内.例如,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是集合A 的元素,则集合 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

又如用 $A=\{1,2,3\}$ 表示小于4的自然数所成的集.但有些集合,如区间$[0,1]$ 中的所有实数,就无法用列举法表示.此时,可采用第二种表示法,即**描述法**,它是利用详细说明元素所具有的性质来确定集合中的元素.例如,

$$\{x\mid x\in\mathbf{R},0\leqslant x\leqslant 1\}$$

表示区间$[0,1]$ 中的所有实数.又如

$$B=\{\text{中国的城市}\},$$

$$C=\{\text{英文的字母}\}$$

等都是用描述法表示的集合.

有时也用一些特定的字母表示集合.一般地,自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集分别用字母 $\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 表示.

给定一个集合 A,用封闭曲线表示集合 A,封闭曲线内的点表示集合 A 的元素.这种图形叫做韦恩(John Venn,1834～1923,英国数学家)图.韦恩图能直观地表现出集合间的关系,但不能作为计算或证明的工具.

定义 1.1.1　有限集合 A 中元素的个数称为此集合的**基数**,记为 $|A|$.

1.1.2 子　集

定义 1.1.2　设 A,B 为两个集合,

(1) 若 A 中的每一个元素都是 B 中的元素,则称 A 是 B 的一个**子集**,记为:

$$A \subseteq B \quad (\text{或 } B \supseteq A),$$

读作:B 包含 A(或 A 包含于 B 中).

如果 A 不是 B 的子集,记作:

$$A \nsubseteq B.$$

(2) 若 $A \subseteq B$,且 B 中至少有一个元素不在 A 中,则称 A 是 B 的**真子集**,记为:

$$A \subset B \ (\text{或 } B \supset A),$$

读作:B 真包含 A(或 A 真包含于 B 中).

(3) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称集合 A 和 B 相等,记作 $A = B$,即

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A,$$

其中记号"$\Leftrightarrow$"的意义为"当且仅当"或"充要条件".

需注意,不要把属于关系 $\in$ 与包含关系 $\subseteq$ 相混淆,前者表示集合中的元素与集合本身的一种从属关系,而后者是两个集合之间的一种关系,它们是完全不同的两种关系.

例如

$$\{a\} \subset \{a,b\},\ \{a\} \notin \{a,b\},$$

$$a \in \{a,b\}, \qquad a \not\subset \{a,b\}.$$

根据空集的定义可知,空集 $\varnothing$ 不含有任何元素,因而空集是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing \subseteq A$.

需要注意的是,集合 $\varnothing$ 与集合 $\{\varnothing\}$ 是有区别的.前者是空集,它没有任何元素,而后者是包含一个元素 $\varnothing$ 的集合,所以 $\varnothing \neq \{\varnothing\}$,同理 $A \neq \{A\}$.如:$\{\varnothing\}$,$\{8\}$,$\{\mathbf{R}\}$ 等都是单元素集,$\varnothing$ 与 $\mathbf{R}$

均不为单元素集.

根据子集的定义及前面的分析可知:任何一个集合都有子集,由集合 A 的所有子集组成的集合,称为 A 的幂集,记为 2^A. 给定一个含有 n 个元素的有限集合 A,A 所包含的子集的个数依据下面的定理给出.

定理 1.1.1 如果集合 A 是有 n 个元素的集合,则 A 有 2^n 个子集,2^n-1 个真子集.

证明 集合 A 中所有 k 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 k 个的组合数,

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!},$$

又 $\varnothing\subseteq A$,$\varnothing$ 的个数为 $1=C_n^0$,$A\subseteq A$,A 的个数为 $1=C_n^n$,故 A 的所有子集的个数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,$$

A 的所有子集中,除 A 外的其他子集均为 A 的真子集,个数为 2^n-1 个.

例 1 写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的所有子集.

解 根据定理 1.1.1,A 所含子集的个数为 $2^3=8$ 个,它们是 $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$.

定义 1.1.3 在所讨论的范围内,所有的集合均为某一集合的子集,则称该集合为**全集**,记作 I.

例如,若讨论的集合中的元素只有小于 8 的自然数:

集合 $A=\{1,2\}$, $B=\{4,5,7\}$, $C=\{3,6,7\}$.

则可取全集 $I=\{1,2,\cdots,8\}$,也可取 $I=\{1,2,\cdots,10\}$. 因此,就某些集合而言,全集是不唯一的. 对于一个具体问题,依讨论问题方便而选取恰当的全集.

1.2 集合的运算

1.2.1 集合的运算

集合的运算,是指给定的集合按着一定的规则构造出另外一些集合.集合的运算主要有交、并、差、补和对称差等.以下的讨论均假定在全集 I 中.

定义 1.2.1 设 A,B 为两个集合,那么由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合 C,称为 A 和 B 的**交集**,记作 $A\cap B$,读作"A 交 B",即

$$C = A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

求交集的运算称为交(运算).

定义 1.2.2 设 A,B 为两个集合,那么由属于 A 或属于 B 的元素组成的集合 C,称为 A 和 B 的**并集**,记作 $A\cup B$,读作"A 并 B",即

$$C = A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

求并集的运算称为并(运算).

定义 1.2.3 设 A,B 为两个集合,那么由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合 C,称为 A 与 B 的**差(集)**,记作 $A-B$,即

$$C = A - B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

求差集的运算称为差(运算).

定义 1.2.4 设 I 为全集,A 为 I 的任意一个子集,差集 $I-A$ 称为 A 的**绝对补集**,简称为 A 的**补(集)**,记为 $\overline{A}$,即

$$\overline{A} = I - A = \{x \mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

求补集的运算称为补运算,简称补.

定义 1.2.5 设 A,B 为两个集合,那么由属于 $A-B$ 或属于

$B - A$ 的元素组成的集合C,称为 A 与B 的对称差(集),简称为**对称差**,记作 $A \oplus B$,即

$$
\begin{aligned}
A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\
&= \{x \mid x \in A - B \text{ 或} x \in B - A\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ 或} x \in B, \text{但} x \notin A \cap B\}.
\end{aligned}
$$

求对称差集的运算称为对称差(运算).

几种运算可用韦恩图(如图 1 - 1)形象地表示出来.

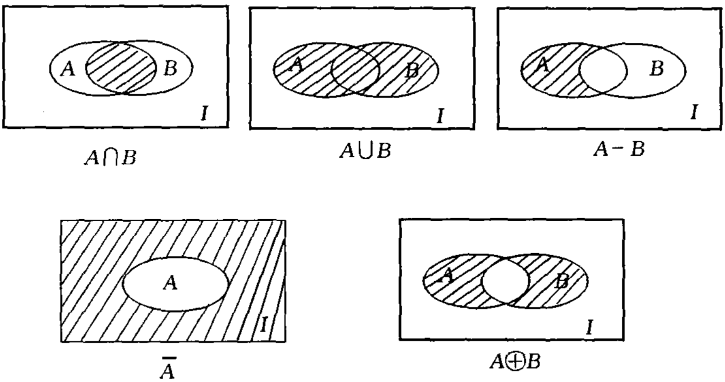

图 1-1

1.2.2 集合的基本运算律

集合的基本运算律是指集合交、并、差、补等运算的主要性质. 设集合 A,B,C 是全集 I 的三个子集,它们有如下运算性质:

1. 幂等律 $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
2. 零一律 $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup I = I$;
3. 互补律 $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = I$;
4. 同一律 $A \cap I = A$, $A \cup \varnothing = A$;
5. 交换律 $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;
6. 结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

7. 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

8. 吸收律 $A \cap (A \cup B) = A,\quad A \cup (A \cap B) = A;$

9. 双重否定律 $\overline{\overline{A}} = A;$

10. 补余律 $\overline{I} = \varnothing,\quad \overline{\varnothing} = I;$

11. 德·摩根律 $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B};$

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

此外还有

12. 差化补公式 $A - B = A \cap \overline{B}.$

利用韦恩图,可以验证这些等式的正确性. 如图 1－2 中阴影部分为 A 与 B,C 交的并,同时也是 A 与 B 的并和 A 与 C 的并的交,即

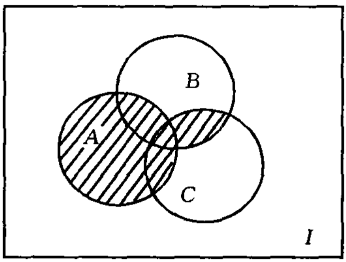

图 1－2

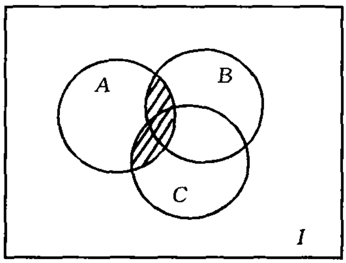

图 1－3

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

同样,图 1－3 中阴影部分为 A 与 B 并 C 的交,同时也是 A 与 B 的交和 A 与 C 的交的并. 即

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

以上等式即为分配律.

集合的基本运算律可以利用集合的相等及交、并、差、补的定义加以证明.作为例子,仅给出德·摩根律的证明.

例1 证明德·摩根律

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

证明 设任一元素 $x \in \overline{(A \cap B)}$,则 $x \notin (A \cap B)$.所以 $x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$,即 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$,于是有 $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.反之,设任一元素 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$,则 $x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$,即 $x \notin A$ 或 $x \notin B$,因而 $x \notin A \cap B$,于是有 $x \in \overline{(A \cap B)}$,所以

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}.$$

综合以上两种情况有

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

同理可证

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

利用集合的基本运算及其运算律,还可以证明有关集合的等式.

例2 证明 (1) $A = (A - B) \cup (A \cap B)$;

(2) $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$.

证明

(1) 右边 $= (A - B) \cup (A \cap B)$

$= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ (差化补公式)

$= A \cap (\overline{B} \cup B)$ (分配律)

$= A \cap I$ (互补律)

$= A =$ 左边, (同一律)

故有

$$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

(2) 左边 $= (A - B) \cap (A \cap B)$

$= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B)$ (差化补公式)

$= A \cap (\overline{B} \cap B)$ (分配律)

$$= A \cap I \qquad \text{(互补律)}$$
$$= \varnothing = \text{右边}, \qquad \text{(零一律)}$$

故有

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing.$$

例3 证明$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup C) = (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap B)$.

证明

左边$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup C)$

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup C) \cap (A \cup I) \cap (A \cup \overline{A})$

(零一律,互补律,同一律)

$= (A \cup (B \cap I)) \cap (\overline{A} \cup (A \cap C))$

(分配律、交换律)

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap (A \cap C)) \cup (B \cap I \cap \overline{A}) \cup (B \cap I \cap A \cap C)$ (分配律)

$= (A \cap C) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A \cap C)$

(互补律、幂等律,同一律)

$= (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap C) \cup (B \cap A \cap C)$ (交换律)

$= (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap B) =$ 右边. (吸收律)

例4 证明 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

证明

因为 $B \oplus C = (B - C) \cup (C - B)$ (对称差定义)

$= (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})$, (差化补公式)

所以 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$.

(分配律)

而 $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$= (A \cap B - A \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B)$

(对称差定义)

$= (A \cap B \cap \overline{(A \cap C)}) \cup (A \cap C \cap \overline{(A \cap B)})$

(差化补公式)

$$= (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$$
(摩根律)

$$= ((A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})) \cup ((A \cap C \cap \overline{A}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}))$$
(分配律)

$$= (\varnothing \cup (A \cap B \cap \overline{C})) \cup (\varnothing \cup (A \cap C \cap \overline{B}))$$
(互补律)

$$= (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}),$$
(同一律)

故有

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

下面再举一个有条件的集合等式的证明.

例 5 证明 $A - B = A \cap B \iff A = \varnothing$.

证明 充分性 若 $A = \varnothing$,则

$$A - B = \varnothing - B = \varnothing = \varnothing \cap B = A \cap B,$$

必要性 若 $A - B = A \cap B$,由于

$$A - B = A \cap \overline{B},$$

则

$$A \cap \overline{B} = A \cap B,$$

于是

$$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$
(互补律,同一律,分配律)

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B) = A \cap B$$
(幂等律)

$$= (A \cap B) \cap (A \cap B)$$

$$= (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B})$$

$$= A \cap (B \cap \overline{B})$$
(互补律)

$$= A \cap \varnothing$$
(零一律)

$$= \varnothing.$$

1.2.3 任意多个集合的交与并

类似于两个集合的交与并的定义,可以给出多个集合甚至无

限多个集合的交与并的定义.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是集合,则有:

定义1.2.6 由属于每一个 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 的元素所组成的集合 C,称为这些集合的**交集**,记为

$$C=\bigcap_i A_i=\{x \mid x\in A_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

定义1.2.7 由至少属于某个 $A_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 的元素组成的集合 C,称为这些集合的并集.记为

$$C=\bigcup_i A_i=\{x \mid \exists\, i\in\{1,2,\cdots,n,\cdots\} \quad x\in A_i\}.$$

两个集合交与并的一些运算性质可以推广到任意个集合的情形.如设 $A,A_i(i=1,2,\cdots)$ 均为集合,则有

分配律 $A\cap(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i(A\cap A_i)$.

德·摩根律 (1) $A-\bigcup_i A_i=\bigcap_i(A-A_i)$;

(2) $A-\bigcap_i A_i=\bigcup_i(A-A_i)$;

例6 设 $A_n=[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}]\quad(n=1,2,\cdots)$,

求 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

解 由于 $A_{n+1}\subset A_n\quad(n=1,2,\cdots)$,所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1=[-1,1].$$

又由于 $0\in A_n(n=1,2,\cdots)$,则 $0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,而对任一 $x\neq 0$,一定存在充分大的 n,使得 $|x|>\dfrac{1}{n}$,此时 $x\notin A_n$,因而 $x\notin\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,可以推出

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}.$$