摄动法及其在力学中的应用

第一册　概论

丁　汝

（美国纽约大学柯朗数学科学研究所教授）

中国科学院力学研究所

北京，一九八〇年十一月

谨以此书纪念

我的母亲

饶毓芬

序　　言

我非常高兴地应中国科学院的邀请，从纽约大学柯朗数学科学研究所到力学研究所来度过我的聘问休假年。我在与该所研究人员共同进行研究工作的同时，还讲授了一个学期的“摄动法及其在力学中的应用”的课程，其对象主要是该所年轻的研究人员。整个课程分成两个部分，每一部分约需四十小时。第一部分阐述各种摄动方法（包括正则摄动法，改进的摄动法，匹配渐近展开法和多重尺度法）的一般步骤。近卅年来，这些方法获得了发展，并在很多工程和科学问题中得到了应用。第二部分主要讲上述方法在波动传播和流体力学问题中的应用。对于每个问题，我们不仅讲述如何确定小参数和选择摄动方法、展开方式，而且说明这样做的动机。在构造了解的形式后，再详细研究它的物理意义。这一过程在一定程度上说明了“应用数学”的真正含意。

书中很多例子选自下列书籍：J. D. Cole “应用数学中的摄动法”（1968）；J. B. Keller” “摄动理论讲义”（1968）；A. H. Nayfeh “摄动法”（1973）；M. Van Dyke “摄动法及其在流体力学中的应用”（1975）。由于我同J. B. Keller教授长期共同从事研究工作，所以我引用了他的许多研究论文，在本文所列的参考文献中可以明显地看出这一点。

1979年6月间，我在母校上海交通大学作了短期讲学，该校应用数学系、工程力学系摄动方法组整理了讲义。本书是在此基础上作了大量修改和补充后写成的。讨论一般原理的这一卷是本书的第一

部分，这一部分是力学研究所李家春、戴世强同志执笔整理的，对于他们的有益建议和细致工作，作者谨致谢意。

丁汝　1980・11・11于北京

目　录

第一章　引　言

1、什么是应用数学？我们认为，应用数学是为了解决物理、化学和工程等领域中实际问题的数学方法，它应包括归纳、简化、求解和分析问题的全过程。通常，当我们遇到了一个实际问题时，可以按如下步骤进行处理：

(1)建立简单的模型，运用各学科领域中的基本定律进行讨论；

(2)找出基本控制方程，该方程支配着实际问题中所发生的物理、化学现象的规律。此控制方程可以是微分方程，积分方程，或积分微分方程，它们往往还是非线性的。此外，还应包括边界条件和初始条件。

(3)确定与所讨论问题有关的一个或几个无量纲参数λ_j($j=1, 2, \cdots\cdots, N$)及其范围。例如$\lambda_j >> 1$　$\lambda_j \sim 1$　$\lambda_j << 1$　($j=1, 2 \cdots\cdots N$)；

(4)根据各参数的大小，抓住主要因素，略去次要的因素，简化原方程，使它便于求解；

(5)求解简化的控制方程。鉴于问题的复杂性，往往只能求得近似解。求解时，可以采用现有的数学方法，有时要发展新的数学方法。由于不同学科领域中的问题有相同（或相似）的数学提法，因此，可以互相借鉴。比如：可以用几何光学的方法处理流体力学问题，可以用边界层的思想解决物理问题。应用数学工作者必须广泛了解有关方法，才能对各种类型问题应付自如；

(6)了解解的精密度，决定是否需要求高阶近似；

(7)确定解的实际适用范围。如$\lambda \ll 1$，那么λ究竟要求小到什么程度呢？有时，$\lambda = \frac{1}{2}$或$\lambda = 1$时近似程度也相当好。我们要进行两类比较：同实验比较，同数值计算作比较。应当指出，数值计算的出发点是控制方程，它已经忽略了次要因素。所以，同数值计算比较是说明我们的渐近解同控制方程的准确解间有多大误差；另一方面，实验如果设计得好，可以相当真实地模拟客观现象。所以同实验比较是为了说明我们的渐近解能否描摹真实现象，这一步也是必不可少的。

(8)阐述解的物理意义，说明如何用它来定性、定量的解释出现在该实际问题中的一些现象。

综上所述，上面八个步骤除了第一步外，都是应用数学研究的范畴。不能认为只有第五步求控制方程的解才是应用数学的任务。如果这样来认识问题当然是片面的。现在，有的应用数学家也参与第一步的工作，即从事建立模型的工作。

2、实际问题常常很复杂，不能精确求解，这时就要求近似解。摄动法是应用数学的重要工具，它是寻求物理问题渐近解的一种有效的近似方法，这就是本课程的主要内容。

有些人轻视近似解的作用，以为只有精确解才是完美无缺的。从应用数学角度来看，这是不正确的。当然，如果能够得到精确解固然很好。但是，一方面，这往往做不到，另一方面既然控制方程本身已经是一种近似，那么，如果近似解的精密度不比控制方程的精密度差，对于最终结果是丝毫没有影响的。比如，我们在工程中常用的Newton力学方程就是相对论方程 以$\beta = \frac{u}{c}$（u为物体运动速度。c是光速）为小参数的摄动展开的首项。只有当$\beta \ll 1$时Newtom定律才是近似地成立的。

现在再举几个例子来说明控制方程是近似的，它只有在某些无量纲参数符合一定条件时才能成立。这些无量纲参数可以选择为摄动参数。

〔例1·1〕物体自由下落

物体运动符合于自由落体的规律的条件是重力要远大于物体所受的空气阻力，即

$$mg \gg D = \frac{1}{2} C_D \rho_g V^2 A \qquad (1\cdot1)$$

其中m为物体质量，g为重力加速度，C_D为阻力系数，ρ_g为空气密度，V为物体运动速度，A为物体迎风面积。由于$m \sim \rho_S A^{3/2}$，ρ_S为物体的密度。由此可得如下条件

$$\lambda_1 = \frac{\rho_g V^2}{\rho_S g \sqrt{A}} \ll 1 \qquad (1\cdot2)$$

由于地球的自转，自由落体在下落过程中会发生偏东现象，这是因为它受到了Coriolis 力引起的。如果Coriolis 力$2m\vec{\Omega}\times\vec{V}$远小于重力，就可以忽略地球自转的影响。Coriolis 加速度的表达式为

$$|\vec{a}_c| = |2\vec{\Omega}\times\vec{V}| \sim 2\Omega\sqrt{hg}\cos\lambda \qquad (1\cdot3)$$

Ω为地球自转角速度，h为物体初始高度，λ为当地纬度。因此，当

$$\lambda_2 = \Omega\sqrt{\frac{h}{g}} \ll 1 \qquad (1\cdot4)$$

时，偏东现象可忽略不计。

〔例1·2〕不可压缩流

如果流体的密度ρ（或压力p）相对变化很小，流体是可以看作不可压缩的，由于

$$\frac{\triangle\rho}{\rho} \sim \frac{\triangle p}{p} \sim \frac{V^2}{\gamma\frac{p}{\rho}} = \frac{V^2}{C^2} = M^2 \qquad (1\cdot5)$$

其中，C 为声速，M为Mach数，γ为比热比，对于空气$\gamma=1\cdot4$。所以，当

$$M^2 << 1 \qquad (1\cdot6)$$

时，我们可以认为流体的密度几乎是不变的。当条件（$1\cdot7$）不成立时，必须考虑流体的压缩性。

〔例$1\cdot3$〕无粘流

这时，要求流体的粘性力远小于动压力，即

$$\frac{\rho V^2}{\mu\frac{V}{L}} = \frac{PVL}{\mu} = Re >> 1 \qquad (1\cdot7)$$

时，可以用Euler 方程来研究流体运动规律。Re为Reynolds数μ为流体的粘度，L为特征长度。但是，由于无粘流解，不能满足物体表面上无滑流的条件，在物体表面附近有一层很薄的边界层，在这里，粘性效应就不能忽略。我们可以用无粘流解了解流场的大致结构；但为了确定摩阻和传热现象，又必须用边界层理论了解在物面附近流场的细致结构。以后，我们要说明边界层理论属于奇异摄动理论的范畴。

3．为了讨论摄动理论方便起见，我们先介绍与此有关的几个重要数学概念。〔1〕〔2〕

(a)符号大O的定义：设$\varphi(x)$和$\psi(x)$是定义在区域Ω上的两个函数。如果存在某个常数$A>0$，Ω内某点X_0，及其内的一个邻域U，

使对于$X \in U$，

$$|\varphi(x)| \leq A|\psi(x)| \tag{1·8}$$

成立。或者

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|=A<\infty \tag{1·9}$$

我们就称函数$\varphi(x)$在$X\to X_0$时至多与$\psi(X)$是同阶的，记作

$$\varphi(X)=O(\psi(X)) \tag{1·10}$$

(b)符号小o的定义：设$\varphi(X)$和$\psi(X)$是定义在区域Ω中的两个函数。若对于任意的$\varepsilon>0$，总有Ω内某点X_0及其内的邻域U_ε存在，使对于$X\in U_\varepsilon$时，

$$|\varphi(X)|\leq\varepsilon|\psi(X)| \tag{1·11}$$

成立，或者

$$\lim_{X\to X_0}\left|\frac{\varphi(X)}{\psi(X)}\right|=0 \tag{1·12}$$

我们就称$\varphi(X)$为比$\psi(X)$的阶数更高的函数，记作

$$\varphi(X)=o(\psi(X)) \tag{1·13}$$

例如：　$\sin x=O(X)$，　$X^2=O(\sin^2 x)$，($X\to 0$ 时)

(1·14)

$\ln x=o(x)$　　$e^{-x}=o(X^{-n})$　$X\to\infty$时　(1·15)

(c)渐近序列　设有函数序列$\{\varphi_n(X)\}$ $n=1,2,\cdots\cdots$ 当$X\to X_0$时$\varphi_n(X)\to 0$,*) 且满足

---

*）在有些问题中，上述条件只要当$n>n_0$(n_0为有限数)时成立即可。

$o(\varphi_n(x))$

$$\varphi_{n+1}(X)=0(\varphi_n(X)) \qquad X\to X_0 \qquad (1\cdot16)$$

我们称$\{\varphi_n(X)\}$构成了一个渐近序列

渐近序列的例子很多，例如

$\varphi_n(X)=(X-X_0)^n \quad n=1,2,\quad\cdots\cdots$ 当$X\to X_0$时为渐近序列；

(1·17)

$\varphi_n(X)=X^{-\lambda_n}$，$\lambda_n>\lambda_{n-1} \quad n=1,2,\cdots\cdots$当$X\to\infty$ 时为渐近序列；

(1·18)

$$\varphi_1=1,\ \varphi_2=X,\quad \varphi_3=\frac{X}{\ln x}\quad \varphi_4=X^2\qquad \varphi_5=\frac{X^2}{\ln X}\cdots\cdots$$

$$\varphi_{2n}=X^n\qquad \varphi_{2n+1}=\frac{X^n}{\ln x}\cdots\cdots$$ 当$X\to0$ 时是渐近序列；

(1·19)

(d)渐近展开，对于已知的函数$F(X)$，选择适当的渐近序列$\{\varphi_n(X)\}$，存在一组常数$\{a_n\}$，使它对于任意N，在下式中的余项

$$F(X)=\sum_{n=1}^{N} a_n\,\varphi_n(X)+R_N(X) \qquad (1\cdot20)$$

$R_N(X)=o(\varphi_N(X))\quad(X\to X_0)$，我们称$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$为$F(X)$在Poincare 意义上的渐近展开式，记为

$$F(X)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(X) \qquad (1\cdot21)$$

如果渐近序列$\{\varphi_n(X)\}$取为整幂函数，则该渐近展开就称为渐近级数，即

$$F(X)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(X-X_0)^n \qquad (1\cdot22)$$

关于函数的渐近展开，有两类问题：一是已知函数$F(X)$和渐近

序列：求它的渐近展开式。其实，由上述定义，不难确定渐近展开的系数为

$$a_N=\lim_{X\to X_0}\frac{F(X)-\sum_{n=1}^{N-1}a_n\varphi_n(X)}{\varphi_N(X)} \tag{1·23}$$

另一方面，我们在解决实际问题时，面临的是另一种情况，F(X)本身是未知的、待求的。具体来说，如果取物理问题的参数为ε，选择渐近序列{$\varphi_n(\varepsilon)$}，并假定待求的解为

$$\Phi(X,t,\varepsilon)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x,t)\varphi_n(\varepsilon) \tag{1·24}$$

x、t分别为空间、时间变量。然后利用方程和边界条件逐步确定$a_n(x,t)$，以便估计$\Phi(x,t,\varepsilon)$本身。渐近序列往往选为{ε^n} n=1，2，……。如果遇到困难，这就说明所选的渐近序列不适当，再猜测可能的其它形式的渐近序列（如lnε，ε的分数幂函数）。

必须区别渐近和收敛这两个不同的概念。前者是指当n固定，参数ε趋于某值时，后项比前项为高阶小量；后者指当参数固定，项数增加时，级数之和存在极限。因此，渐近展开往往是发散的，如

$$I=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}x^{-1}e^{x}\,dx$$

$$\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{x^n} \tag{1·25}$$

就是一例。这时，余项R_N有时可以增大，而不像收敛级数那样必逐渐减小，所以渐近展开有一个最佳截断问题，此时所产生的误差最小。（图1·1）

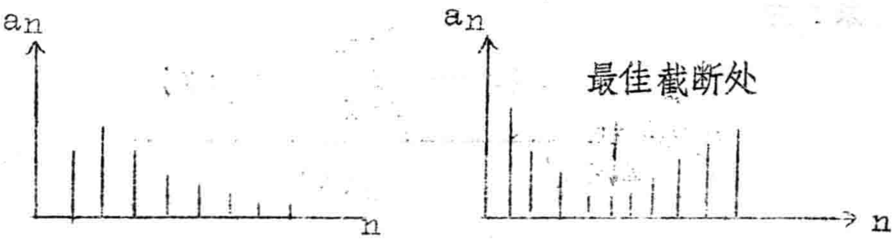


图1.1 收敛和发散的渐近展开的比较

由于渐近序列可能是发散的，我们往往只求摄动解的一、两项就足够了。因为项数取多了，工作量大，精密度也不一定好。现在已有一些求发散级数和的方法。这时，就要应用计算机计算相当多的项，这是M. Van Dyke近年来在Stanford 的工作，[3]这里不予赘述。

4、什么是摄动法？摄动法是指求含有小参数 ε 的一类数学问题（一般指微分方程的定解问题）$P(\varepsilon)$的渐近解的方法，该渐近解是对于非摄动问题$P(0)$解的一种改进，或延拓。具体地讲，它的大致步骤如下：

(a)把实际问题归纳成含有小参数 ε 的数学问题$P(\varepsilon)$；

(b)令 $\varepsilon=0$，求出非摄动问题$P(0)$的解 $u_0(x,t)$，有时它可称为零级近似。

(C)运用摄动法求 $\varepsilon\ll 1$ 时的解$u(x,t,\varepsilon)$ 要求

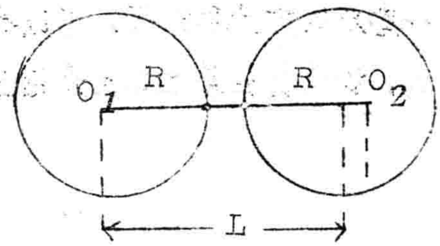
$$u(x,t,0)=u_0(x,t) \qquad (1\cdot 26)$$

也即 $u(x,t,\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处关于 ε 连续

$$u(x,t,\varepsilon)-u_0(x,t)=o(1) \qquad (1\cdot 27)$$

注意，并非所有问题都可以用摄动法求解。两个浸没在水中的气

泡膨胀过程就是一个特例。若气泡中心距离为L，气泡半径为R，可取



$$\varepsilon=\frac{L-2R}{2R}>0 \quad (1\cdot 28)$$

图1—2 气泡的膨胀

为小参数。当$\varepsilon>0$时，两个气泡的定常解符合力的平衡要求：

$$R=\frac{2T}{P} \qquad (1\cdot 29)$$

T为张力，R为半径，P为气泡内的压力。但当$\varepsilon=0$时，气泡合成一个。这时，在短时间内会发生从两个气泡转变成一个气泡的非定常过程，力的平衡方程（1·29)不适用，即不能用摄动法求定常解。

如果某个问题可以用摄动法求解，我们先假定可以用最简单的渐近序列幂函数进行展开。

$$u(\varepsilon)=u(o)+\varepsilon u_{\varepsilon}(o)+\frac{1}{2!}\varepsilon^{2}u_{\varepsilon\varepsilon}(o)+\cdots\cdots \qquad (1\cdot 30)$$

利用控制方程和边界条件，可以继续不断地求出每个系数。我们称这种问题为正则摄动问题。

另一方面，如果仅在假定（1·30）下求解，从某项以后因某种原因（如函数有奇性）不能继续进行下去，必须辅之以其它手段，这类问题我们称为奇异摄动问题，这是广义的提法。狭义地说，奇异摄动法仅指边界层方法，此时，由于方程的退化，u(o)本身就不存在。

在本课程中，我们着重讲奇异摄动理论。这并非是因为正则摄动不重要，而是因为它已发展得较成熟，约定俗成，只要循规蹈矩、细致和耐心就能取得成功。而奇异摄动问题在实际问题中已并不罕见，

它需要一些新的方法和技巧，所以有必要进行详细讨论。为了使读者循序渐进，我们仍在第二章先介绍正则摄动法的梗概

习　题

1·1、试用简单函数（如幂函数、指数函数、对数函数）来表达当 $\varepsilon \to 0$ 时下述函数的量阶

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon},\quad \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{1-\cos\varepsilon},\quad \mathrm{Sech}^{-1}\varepsilon\quad \mathrm{Ln}\left[1+\frac{\mathrm{Ln}(1+2\varepsilon)}{(1-2\varepsilon)}\right]$$

$$\mathrm{Ln}\left[1+\frac{\mathrm{Ln}\frac{1+2\varepsilon}{\varepsilon}}{1-2\varepsilon}\right],\quad e^{-\cosh(1/\varepsilon)},\quad \int_0^{\varepsilon} e^{-s^2}\,ds$$

1·2对于小 ε，按量阶大小排列如下函数

ε^2，$\varepsilon^{1/2}$，$\mathrm{In}(\mathrm{Ln}\varepsilon^{-1})$，$1$，$\varepsilon^{1/2}\mathrm{Ln}\varepsilon^{-1}$，$\varepsilon\mathrm{Ln}\varepsilon^{-1}$，$e^{-1/\varepsilon}$，$\mathrm{Ln}\varepsilon^{-1}$，$\varepsilon^{3/2}$，$\varepsilon$，$\varepsilon^2\mathrm{Ln}\varepsilon^{-1}$

1·3 证明对于大X

$$F(X)=\int_X^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$$

的渐近展开为

$$F(X)\sim\left(-\frac{1}{X}+\frac{2!}{X^3}-\frac{4!}{X^5}+\cdots\cdots\right)\sin X+\left(\frac{1}{X^2}-\frac{3!}{X^4}+\frac{5!}{X}\cdots\right)\cos X$$

这个级数收敛吗？求余项的上界，并证明 $X\to\infty$ 时，它比渐近展开的末项更迅速地趋于零。

1·4 求函数$\Phi(X)=\int_X^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (X\gg 1)$的渐近展开式，通过数值计算说明它的性质，求最佳截断位置 （取X＝2，3）。

参 考 文 献

〔1〕Erdelyi, A., Asymptotic Expansions. Dover, New York (1956)

〔2〕Olver, F. W. J. Asymptotics and Special Functions. Academic Press, New York and London (1974)

〔3〕Van Dyke, M. Analysis and improvement of Perturbation Series. Quart. Jour. Mech. Appl. Math. Vol. 27 (1974)

第二章　正则摄动法

§2·1 正则摄动问题

为了使大家对正则摄动法有感性的认识，我们先举一个简单的例子。[1]

〔例1·1〕微小变形的圆柱不可压缩绕流。

如果柱体的截面周线形状为Γ：$r=a(1-\varepsilon\sin^2\theta)$，其中$r$，$\theta$为极坐标。当$\varepsilon$很小时，它同圆截面偏离很小。现在来考察不可压缩流体绕过这类柱体的二维流动。

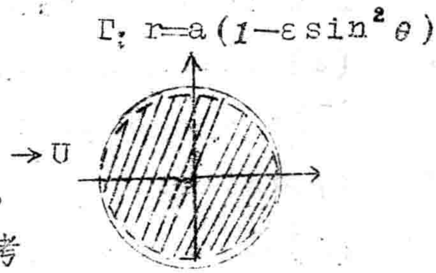


图2·1 微小变形圆柱的绕流

若用流函数$\psi(r,\theta,\varepsilon)$来描述上述流动，该问题$P(\varepsilon)$的提法为：

D。E。	$\Delta\psi=0$	在Γ所围区域外	(2·1)
B。C。	$\psi=0$	在Γ上	(2·2)
	$\psi=Ur\sin\theta+o(1)$	$r\to\infty$ 时	(2·3)

这里，D。E指微分方程，B。C指边界条件，以后还用I．C指初始条件。P。C指周期性条件，下面各章节依然还要使用这种简称，不再另予说明。

对于正则摄动问题，我们仅对流函数作展开，它有如下两种方式：

$$\psi(r,\theta,\varepsilon)=\psi_0(r,\theta)+\psi_1(r,\theta)\varepsilon+\psi_2(r,\theta)\varepsilon^2+\cdots\cdots \tag{2·4}$$