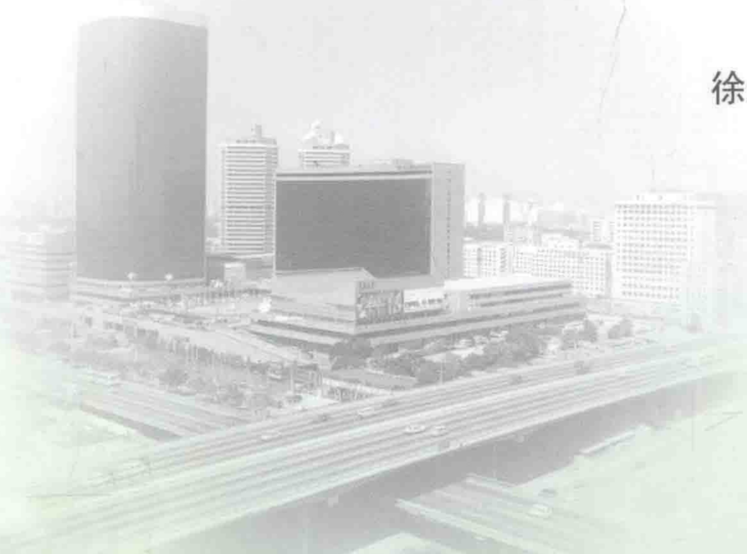
高等职业教育“十二五”规划教材

土建数学（上册）

基础篇

陈秀华 主 编
沈焰焰 副主编
徐 栋［同济大学］ 主 审



人民交通出版社
China Communications Press

土建数学（上册）

基础篇

责任编辑/任雪莲

封面设计/王红锋

ISBN 978-7-114-09260-2

9 787114 092602 >

网上购书 / www.jtbook.com.cn

总定价：72.00元（上、下共两册）

高等职业教育“十二五”规划教材

Tujian Shuxue

土建数学

（上册 基础篇）

陈秀华 主 编
沈焰焰 副主编
徐 栋[同济大学] 主 审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是高等职业教育“十二五”规划教材。全书共十三章，分上、下两册。上册为基础篇，主要介绍微积分学；包括函数、极限与连续，导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分及其应用、微分方程。下册为应用篇，主要介绍工程数学及相关专业应用；包括工程结构截面几何性质、线性代数基础、概率论基础、工程测量误差理论基础、数理统计基础及应用、土建工程中常用计算方法、数学建模等。每章都配有学习目标、本章小结和习题，并附有习题参考答案。带 * 号部分为不同专业的选学内容。

本书可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，以及参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，也可作为相关工程技术人员参加工程师考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

土建数学／陈秀华主编．--北京：人民交通出版社，2011.8

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-114-09260-2

Ⅰ.①土… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①土木工程－工程数学－高等职业教育－教材 Ⅳ.①TU12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 173229 号

高等职业教育“十二五”规划教材

书　　名：土建数学（上册　基础篇）

著 作 者：陈秀华

责任编辑：任雪莲

出版发行：人民交通出版社

地　　址：（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网　　址：http://www.ccpress.com.cn

销售电话：（010）59757969，59757973

总 经 销：人民交通出版社发行部

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京市密东印刷有限公司

开　　本：787 × 1092　1/16

印　　张：13

字　　数：306 千

版　　次：2011 年 8 月　第 1 版

印　　次：2012 年 7 月　第 2 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-114-09260-2

总 定 价：72.00 元（上、下共两册）

前　　言

为适应高职教育的特点、满足土建工程类专业对“高等数学”的具体要求，本书在教学内容上突出专业应用，注重数学思想的渗透，淡化计算技巧和定理的证明，加强数学课与专业课程的有机融合，以适应新时期人才培养的需要。

本书突破了传统高职数学教材的结构和体系，以工程背景展现数学的应用途径，培养学生运用数学方法解决工程问题的能力。主要特色：突出数学工具课的作用，从内容的选择到具体问题的求解，都力求密切与专业有机结合；以实际应用为背景，为学生构建数学基本概念，使数学概念不再抽象；强调数学思想和方法，淡化计算技巧和定理证明，注重培养学生解决实际问题的能力。

本书共十三章，分上、下两册。上册为基础篇，主要介绍微积分学，包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分及其应用、微分方程。下册为应用篇，主要介绍工程数学及相关专业应用，包括工程结构截面几何性质、线性代数基础、概率论基础、工程测量误差理论基础、数理统计基础及应用、土建工程中常用计算方法、数学建模等。建议全书（上、下册）总学时数为118学时。下册的教学内容和顺序，可根据不同专业教学的需要进行选择和调整。带*号部分为不同专业的选学内容。

本书可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，以及参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，也可作为相关工程技术人员参加工程师资格考试的参考用书。

本书由福建交通职业技术学院陈秀华副教授担任主编。上册“基础篇”由福建交通职业技术学院沈焰焰担任副主编，下册“应用篇”由福建交通职业技术学院刘淋担任副主编。参加编写的还有福建交通职业技术学院黄颖、梁巍以及甘肃建筑职业技术学院巩军胜。各章的具体编写分工如下：第一、二章由沈焰焰编写，第三、四、五、七、八章由陈秀华编写，第六、十三章由刘淋编写，第九章由陈秀华和巩军胜共同编写，第十章由黄颖编写，第十一章由沈焰焰和黄颖共同编写，第十二章由梁巍编写。全书由陈秀华负责统稿。

本书承蒙同济大学博士生导师徐栋教授主审。福建交通职业技术学院道路工程系主任周志坚教授和建筑工程系主任高杰副教授参加了审稿，他们对专业应用的相关内容进行了详细审查，并对全书的框架结构给出了建设性的调整意见，同时对本书的出版给予了大力支持，在此表示由衷的感谢！

本书的编写得到了南阳理工学院陈守兰教授、杭州科技职业技术学院城市建设学院副院长周晓龙副教授、集美大学陈景华副教授、福建交通职业技术学院土建系宋子东副教授、福建交通职业技术学院基础部许贵福副教授等许多同行的支持和帮助,在此深表谢意!

本书的编写还受到全国高职高专教育专家、原高职高专教育土建类专业教学指导委员会主任杜国城教授和甘肃建筑职业技术学院副院长李社生教授的关注和指导,在此表示深切的谢意!

本书的编审和出版得到了人民交通出版社有关领导和编辑们的鼎力支持,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限、编写时间紧迫,书中疏漏、错误之处在所难免,敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

上册　基础篇

上　册

基　础　篇

第一章　函数、极限与连续

学习目标

1. 理解函数、极限、无穷大与无穷小、连续的概念；
2. 会求函数定义域，会分解复合函数；
3. 熟练掌握极限的运算法则和常用的求极限方法；
4. 会讨论函数的连续性；
5. 掌握土建工程中的常见函数，如分布荷载、剪力与弯矩函数、挠曲线方程等；
6. 会就简单实际问题进行函数关系的建立.

高等数学与初等数学有很大不同. 初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而高等数学则主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 不同的研究对象有不同的研究方法. 极限方法是高等数学中处理问题的最基本方法，高等数学的基本概念、性质和法则都是通过极限法推导出来的. 因此，极限是高等数学中最基本的概念.

本章主要介绍函数、极限和函数连续性等基本概念及性质，同时介绍土建工程中常见的一些函数，如分布荷载、剪力与弯矩函数、挠曲线方程等，并通过一些实际问题举例介绍函数关系的建立.

第一节　函　　数

一、函数的概念及其性质

1. 函数的概念

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集，如果对于给定的每个数 $x \in D$，按照某个法则 f 总有唯一确定的 y 值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$，数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**. y 的取值范围叫函数的**值域**，用 R 表示.

函数的两个要素：定义域 D 和对应法则 f.

(1) 对应法则 f　f 是一个函数符号，表示自变量取 x 时，因变量 y 取值为 $f(x)$，不可看作 f 与 x 相乘.

例 1-1　设函数 $f(x) = x^3 - 2x + 3$，求 $f(1)$，$f(t^2)$.

解　$f(1) = 1^3 - 2 \times 1 + 3 = 2$；

$f(t^2) = (t^2)^3 - 2(t^2) + 3 = t^6 - 2t^2 + 3$.

例 1-2　$f(x+1) = x^2 + x$，求 $f(x)$.

解　令 $t = x + 1$,则 $x = t - 1$,代入得

$$f(t) = (t - 1)^2 + (t - 1) = t^2 - t.$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x.$$

(2)定义域 D　函数的定义域是另一个要素. 给定一个函数,它的定义域也是给定的. 如果所讨论的函数来自某个实际问题,其定义域就必须符合实际意义;如果不考虑实际背景,则其定义域应使得它在数学上有意义.

求定义域时,要求熟记以下几点:

①分母不能为 0;

②偶次根式被开方数非负;

③对数的真数大于 0;

④三角函数应满足三角函数各自的定义域要求;

⑤反三角函数应满足反三角函数各自的定义域要求;

⑥如果函数含有分式、根式、对数式、三角函数和反三角函数,则应取各部分定义域的交集.

例 1-3　确定函数 $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} + \ln(x - 2)$ 的定义域.

解　$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 \geqslant 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < x \leqslant 3$,所以定义域为$(2,3]$.

注意:如果两个函数的定义域相同,同时对应法则也相同,那么这两个函数是相同的;否则不同.

$f(x)=2x+1$ 与 $f(t) = 2t + 1$ 相同,与变量用何字母表示无关.

$f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$ 相同,这是常用的恒等变换.

$f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$ 不同,因为两个函数定义域不同;$f(x)$的定义域是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. 而 $f(x) = \ln x^3$ 与 $g(x) = 3\ln x$ 相同.

$f(x) = 1$ 与 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$ 不同,因为 $g(x)$ 中 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

2. 函数的表示法

(1)公式法(解析法):用数学式子表示函数. 优点:便于理论推导和计算.

(2)表格法:以表格形式表示函数. 优点:所求函数值容易查得,如三角函数表、对数表等.

(3)图像法:用图形表示函数. 优点:直观形象,可看到函数变化趋势. 此方法在工程技术上应用较普遍.

3. 函数的性质

(1)奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x) = f(x)$ [或 $f(-x) = -f(x)$],则称 $f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

偶函数的图形是关于 y 轴对称的;奇函数的图形是关于原点对称的.

例如,$f(x) = x^2$,$g(x) = x\sin x$ 在定义区间上都是偶函数. 而 $F(x) = x$,$G(x) = x\cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

(2)周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，并把 T 称为 $f(x)$ 的周期. 应当指出的是，通常讲的周期函数的周期是指最小正周期.

对三角函数而言，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

(3)单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ [或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加**(**或单调减少**)的函数. 单调增加或单调减少函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的；在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. 而函数 $y=x$，$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的.

图像特征：递增函数图形从左往右呈上升趋势；递减函数图形从左往右呈下降趋势.

(4)有界性

若存在正数 M，使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**有界函数**；否则，$f(x)$ 在区间 I 上是**无界函数**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是其定义域内的有界函数.

4. 反函数

设函数的定义域为 D，值域为 R. 对于任意的 $y\in R$，在 D 上只有唯一的 x 与之对应，且满足 $f(x)=y$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就可以得到一个新的函数：$x=f^{-1}(y)$. 我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，而把函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于函数最本质的是其对应法则，与其变量用的字母无关，因此，习惯上用 x 表示自变量，即反函数改写为：$y=f^{-1}(x)$. 直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

二、复合函数、初等函数与分段函数

1. 复合函数

定义 1.2　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $R(\varphi)$，若 $R(\varphi)\cap D(f)$ 非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为**复合函数**，其中 x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

例 1-4　试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成的函数.

解　将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^2$ 得

$$y=\cos^2 x.$$

例 1-5　指出 $y=\ln\sin x$，$y=e^{\sin^2 x}$，$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由哪些简单函数复合而成的.

解　(1) $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin x$ 复合而成的.

(2) $y=e^{\sin^2 x}$ 是由 $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成的.

(3) $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$ 和 $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

注意:

(1)并非任意两个函数都能复合.例如,$y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 2$ 不能复合成一个函数,因为 $u = x^2 + 2$ 的值域使 $y = \arcsin u$ 无意义.

(2)复合函数可以有多个中间变量,这些中间变量是经过多次复合产生的.

2.初等函数

(1)基本初等函数

常数函数　　$y = C$.

幂函数　　$y = x^{\mu}$ (μ 是常数).

指数函数　　$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

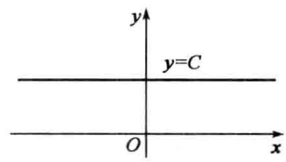
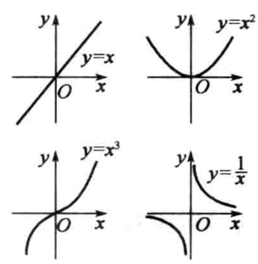
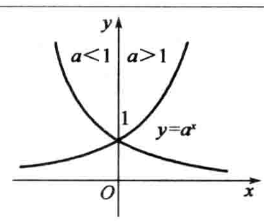
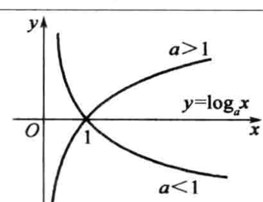
对数函数　　$y = \log_a x$,($a > 0, a \neq 1$).

三角函数　　$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$.

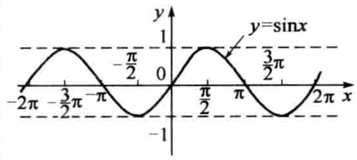
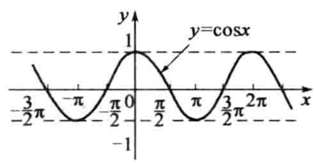
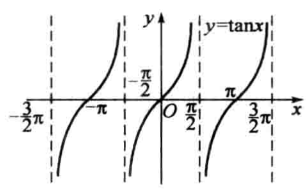
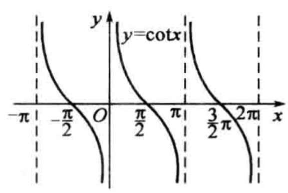
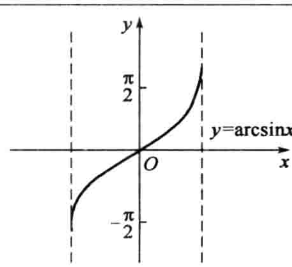
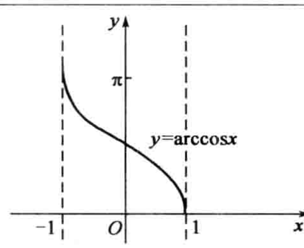
反三角函数　　$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

这六类函数统称为基本初等函数.下面利用表格(表1-1)归纳这些函数及其特性.

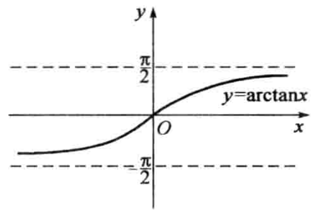
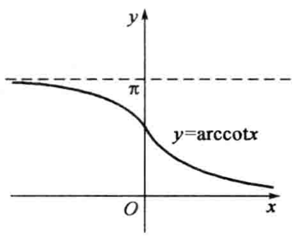
基本初等函数及其特性　　表1-1

名　称	表 达 式	定 义 域	图　形	函 数 特 性
常数函数	$y = C$	$(-\infty, +\infty)$		图形为过点 $(0,C)$ 平行于 x 轴的直线
幂函数	$y = x^{\mu}$ (μ 是常数)	在 $(0, +\infty)$ 内总有定义,当 μ 为不同实数时,定义域可不同.如: μ 为正整数时,定义域为 $(-\infty, +\infty)$; $\mu = 1/2$ 时,定义域为 $[0, +\infty)$; $\mu = -\frac{1}{2}$ 时,定义域为 $(0, +\infty)$ 等		μ 为任何值时,都是无界函数; 图形均经过点 $(1,1)$; $\lvert\mu\rvert$ 为偶数时,函数为偶函数,图形关于 y 轴对称; $\lvert\mu\rvert$ 为奇数时,函数为奇函数,图形关于原点对称; μ 为负数时,图形在原点间断,$x=0$ 为垂直渐近线
指数函数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		图形均经过点 $(0,1)$; 当 $a > 1$ 时,指数函数单调增加;$0 < a < 1$ 时,指数函数单调减少; $y = a^x$ 的图形与 $y = a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		对数函数是指数函数的反函数; 图形均在 y 轴右侧且经过点 $(1,0)$; 当 $a > 1$ 时,对数函数单调增加;$0 < a < 1$ 时,对数函数单调减少

续上表

名　称	表 达 式	定 义 域	图　形	函 数 特 性
三角函数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		正弦函数是有界函数，图形介于 $y = \pm 1$ 两条平行线之间；正弦函数是以 2π 为周期的奇函数
	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		余弦函数是有界函数，图形介于 $y = \pm 1$ 两条平行线之间；余弦函数是以 2π 为周期的偶函数
	$y = \tan x$	$x \in R$, $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $(k \in Z)$		正切函数是以 π 为周期的奇函数，其图形在 $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$ 处间断
	$y = \cot x$	$x \in R$, $x \neq k\pi$, $(k \in Z)$		余切函数是以 π 为周期的奇函数，其图形在 $x = k\pi$, $k \in Z$ 处间断
反三角函数	$y = \arcsin x$	$[-1,1]$		反正弦函数是正弦函数在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
	$y = \arccos x$	$[-1,1]$		反余弦函数是余弦函数在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数，是单调减少的有界函数，值域为 $[0, \pi]$

续上表

<table>
<tr><th>名　称</th><th>表 达 式</th><th>定 义 域</th><th>图　形</th><th>函数特性</th></tr>
<tr><td rowspan="2">反三角函数</td><td>$y = \arctan x$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td>
</td><td>反正切函数是正切函数在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数,是单调增加的有界奇函数,值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>$y = \operatorname{arccot} x$</td><td>$(-\infty, +\infty)$</td><td>
</td><td>反余切函数是余切函数在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数,它是单调减少的有界函数,值域为 $(0,\pi)$</td></tr>
</table>

(2) 初等函数

定义 1.3　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的,并且能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如, $y = \sqrt{\ln 5x + 3^x + \sin^2 x}$, $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x} + \tan x}{x^2 \sin x + 2^{-x}}$ 是初等函数,而 $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx + \cdots$ 不是有限次四则运算,所以不是初等函数.

3. 分段函数

在定义域的不同的范围内,有不同的表达式的函数称为**分段函数**.

例 1-6　设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$　求 $f(2)$, $f(0)$ 和 $f(-2)$.

解　$f(2) = 1$, $f(0) = 0$, $f(-2) = -1$.

注意:求分段函数的函数值时,应先确定自变量取值的所在范围,再按相应的式子进行计算.

一般地,分段函数不是初等函数(不能由一个式子表示出来).

习题 1.1

1. 下列函数对:(A) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$;(B) $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = (\sqrt{x})^2$;(C) $y = \tan x$ 与 $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$;(D) $y = \ln(x^2 - 1)$ 与 $y = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ 中表示相同函数的有哪些?

2. 求定义域:(1) $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin \ln \sqrt{1-x}$;(2) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, x < 3, \\ \ln(x-4), 3 < x \leqslant 5. \end{cases}$

3. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是________函数(奇、偶或非奇非偶).

4. 求 $f(x) = 1 + |\sin 2x|$ 的最小正周期.

5. 求 $y = \max\{2x, x^2\}$, $x \in [0,4]$ 的分段函数形式.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2}, & |x| \leq 3, \\ x^2 - 9, & |x| > 3, \end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(\pm 3)$, $f(\pm 4)$, $f(2 + a)$.

7. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

(2) $y = 1 + \ln(x - 1)$;

(3) $y = 2\sin\dfrac{x}{3}, x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. 下列复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y = \lg^2 \arccos x^3$;

(2) $y = \arctan[\tan^2(a^2 + x^2)]$;

(3) $y = e^{2x/(1-x^2)}$.

第二节　函数的极限

为了更好地掌握变量的变化规律,不仅要考虑变量的变化过程,还要从它的变化过程来判断它的变化趋势.极限就是描述变量变化趋势的重要概念.极限方法是人们从有限认识无限的一种数学方法.它是微积分的基本思想和方法.

一、函数极限的定义

数列可看作是定义在正整数集上的函数,它的极限可以看作当 $x \to +\infty$ 时函数极限的特殊情况.数列的极限在中学已经学习过,下面主要介绍函数的极限.

1. 当 $x \to \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.4　当自变量 x 取正值并无限增大时,如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数当 $x \to +\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to +\infty).$$

由定义 1.4 可知,当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 的极限为 1,即 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

定义 1.5　当自变量 x 取负值且绝对值无限增大时,如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为函数当 $x \to -\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to -\infty).$$

定义 1.6　当 $|x|$ 无限增大时,如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty).$$

由定义 1.6 可知,函数 $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限为 1,即 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

容易得出如下结论

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

例 1-7　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$.