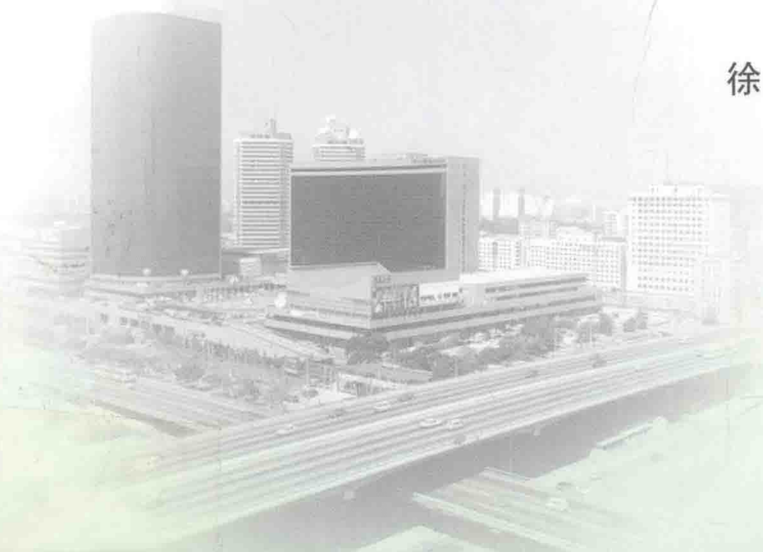
高等职业教育“十二五”规划教材

土建数学（下册）

应用篇

陈秀华　主　编
刘　淋　副主编
徐　栋［同济大学］主　审



人民交通出版社
China Communications Press

土建数学（下册）

应用篇

责任编辑/任雪莲
封面设计/王红锋

ISBN 978-7-114-09260-2
9 787114 092602 >

网上购书 / www.jtbook.com.cn
总定价：72.00元（上、下共两册）

高等职业教育"十二五"规划教材

Tujian Shuxue

土建数学

（下册 应用篇）

陈秀华 主 编
刘 淋 副主编
徐 栋［同济大学］ 主 审

人民交通出版社

内 容 提 要

本书是高等职业教育“十二五”规划教材。全书共十三章，分上、下两册。上册为基础篇，主要介绍微积分学；包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分及其应用、微分方程。下册为应用篇，主要介绍工程数学及相关专业应用；包括工程结构截面几何性质、线性代数基础、概率论基础、工程测量误差理论基础、数理统计基础及应用、土建工程中常用计算方法、数学建模等。每章都配有学习目标、本章小结和习题，并附有习题参考答案。带 * 号部分为不同专业的选学内容。

本书可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，以及参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，也可作为相关工程技术人员参加工程师考试的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

土建数学 / 陈秀华主编. --北京：人民交通出版社，2011.8
高等职业教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-114-09260-2

Ⅰ.①土… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①土木工程－工程数学－高等职业教育－教材 Ⅳ.①TU12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 173229 号

高等职业教育“十二五”规划教材
书　　名：**土建数学**（下册　应用篇）
著 作 者：陈秀华
责任编辑：任雪莲
出版发行：人民交通出版社
地　　址：（100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：（010）59757969，59757973
总 经 销：人民交通出版社发行部
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市密东印刷有限公司
开　　本：787 × 1092　1/16
印　　张：12.25
字　　数：289 千
版　　次：2011 年 8 月　第 1 版
印　　次：2012 年 7 月　第 2 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-09260-2
总 定 价：72.00 元（上、下共两册）
（有印刷、装订质量问题的图书由本社负责调换）

前　言

为适应高职教育的特点、满足土建工程类专业对“高等数学”的具体要求，本书在教学内容上突出专业应用，注重数学思想的渗透，淡化计算技巧和定理的证明，加强数学课与专业课程的有机融合，以适应新时期人才培养的需要。

本书突破了传统高职数学教材的结构和体系，以工程背景展现数学的应用途径，培养学生运用数学方法解决工程问题的能力。主要特色：突出数学工具课的作用，从内容的选择到具体问题的求解，都力求密切与专业有机结合；以实际应用为背景，为学生构建数学基本概念，使数学概念不再抽象；强调数学思想和方法，淡化计算技巧和定理证明，注重培养学生解决实际问题的能力。

本书共十三章，分上、下两册。上册为基础篇，主要介绍微积分学，包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分及其应用、微分方程。下册为应用篇，主要介绍工程数学及相关专业应用，包括工程结构截面几何性质、线性代数基础、概率论基础、工程测量误差理论基础、数理统计基础及应用、土建工程中常用计算方法、数学建模等。建议全书（上、下册）总学时数为118学时。下册的教学内容和顺序，可根据不同专业教学的需要进行选择和调整。带*号部分为不同专业的选学内容。

本书可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，以及参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，也可作为相关工程技术人员参加工程师资格考试的参考用书。

本书由福建交通职业技术学院陈秀华副教授担任主编。上册“基础篇”由福建交通职业技术学院沈焰焰担任副主编，下册“应用篇”由福建交通职业技术学院刘淋担任副主编。参加编写的还有福建交通职业技术学院黄颖、梁巍以及甘肃建筑职业技术学院巩军胜。各章的具体编写分工如下：第一、二章由沈焰焰编写，第三、四、五、七、八章由陈秀华编写，第六、十三章由刘淋编写，第九章由陈秀华和巩军胜共同编写，第十章由黄颖编写，第十一章由沈焰焰和黄颖共同编写，第十二章由梁巍编写。全书由陈秀华负责统稿。

本书承蒙同济大学博士生导师徐栋教授主审。福建交通职业技术学院道路工程系主任周志坚教授和建筑工程系主任高杰副教授参与了审稿工作，他们对专业应用的相关内容进行了详细审查，并对全书的框架结构给出了建设性的调整意见，同时对本书的出版给予了大力支持，在此表示由衷的感谢！

本书的编写得到了南阳理工学院陈守兰教授、杭州科技职业技术学院城市建设学院副院长周晓龙副教授、集美大学陈景华副教授、福建交通职业技术学院土建系宋子东副教授、福建交通职业技术学院基础部许贵福副教授等许多同行的支持和帮助,在此深表谢意!

本书的编写还受到全国高职高专教育专家、原高职高专教育土建类专业教学指导委员会主任杜国城教授和甘肃建筑职业技术学院副院长李社生教授的关注和指导,在此表示深切的谢意!

本书的编审和出版得到了人民交通出版社有关领导和编辑们的鼎力支持,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限、编写时间紧迫,书中疏漏、错误之处在所难免,敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

下册　应用篇

第七章　工程结构截面几何性质 ········· 3
第一节　截面的静矩与形心 ········· 3
第二节　惯性矩与惯性积、极惯性矩 ········· 6
*第三节　平行移轴和转轴公式 ········· 8
本章小结 ········· 14
复习题(七) ········· 15
第八章　线性代数基础 ········· 18
第一节　行列式 ········· 18
第二节　矩阵 ········· 31
第三节　线性方程组 ········· 49
本章小结 ········· 55
复习题(八) ········· 57
第九章　概率论基础 ········· 61
第一节　随机事件与概率 ········· 61
第二节　概率的基本公式 ········· 67
第三节　事件的独立性与贝努里概型 ········· 74
第四节　离散型随机变量及其分布 ········· 77
第五节　连续型随机变量及其分布 ········· 82
第六节　随机变量的数字特征 ········· 91
本章小结 ········· 96
复习题(九) ········· 97
第十章　工程测量误差理论基础 ········· 100
第一节　测量误差概述 ········· 100
第二节　衡量工程测量精度的标准 ········· 103
第三节　误差传播定律 ········· 105
第四节　最或是值及其残差 ········· 109

第五节　等精度直接观测平差 …… 110
本章小结 …… 113
复习题(十) …… 114
*第十一章　数理统计基础及应用 …… 116
第一节　数理统计基础 …… 116
第二节　常用的数理统计方法与工具 …… 134
第三节　抽样检验基础 …… 144
本章小结 …… 146
复习题(十一) …… 148
*第十二章　土建工程中常用计算方法 …… 150
第一节　内插法 …… 150
第二节　图乘法 …… 152
第三节　工程量计算 …… 155
本章小结 …… 156
复习题(十二) …… 157
*第十三章　数学建模 …… 158
第一节　数学模型概述 …… 158
第二节　数学建模实例 …… 160
本章小结 …… 163
复习题(十三) …… 163
附录 …… 164
附表一　泊松分布概率值表 …… 164
附表二　标准正态分布函数表 …… 165
附表三　t 分布双侧分位数表 …… 166
附表四　χ^2 分布上侧分位数表 …… 167
附表五　F 分布上侧分位数表 …… 168
附表六　正态分布概率系数表 …… 178
附表七　t 分布概率系数表 …… 179
附表八　相关系数检验表(γ_α) …… 180
习题参考答案 …… 181
参考文献 …… 190

下　册

应　用　篇

第七章　工程结构截面几何性质

学习目标

1. 掌握静矩、形心、惯性矩的概念及其积分表达式；
2. 会用积分方法计算简单几何图形和组合截面的静矩、形心、惯性矩；
3. 能理解惯性积、极惯性矩的概念和积分表达式；
4. 了解平行移轴和转轴公式及其应用.

在土建工程施工和结构设计中，构件的承载能力与构件的形状、尺寸有着十分密切的关系. 而构件的尺寸和形状对构件承载能力的影响，主要通过构件横截面的某些几何量来反映，如形心、静矩、惯性矩、惯性半径、极惯性矩、惯性积等；这些统称为“平面图形的几何性质”，它们是单纯的几何特征，与物理、力学因素无关. 在第四章和第五章积分应用中介绍了应用积分方法求形心、惯性矩的基本思想，下面我们将详细介绍这些几何性质的表征量；它们在构件应力与变形的分析与计算中有举足轻重的作用.

第一节　截面的静矩与形心

一、静矩

平面几何图形如图 7-1 所示. 在其上取面积微元 $\mathrm{d}A$，该微元在 zOy 坐标系中的坐标为 z、y.

定义 7.1　下列积分

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A, \quad S_z = \int_A y\mathrm{d}A \tag{7-1}$$

分别称为图形对于 y 轴和 z 轴的**截面一次矩**或**静矩**，其量纲为长度的 3 次方.

注意：静矩与坐标轴有关，同一平面图形对于不同的坐标轴有不同的静矩. 图形对某些坐标轴静矩为正；对另外某些坐标轴为负；对于通过形心的坐标轴，静矩等于零.

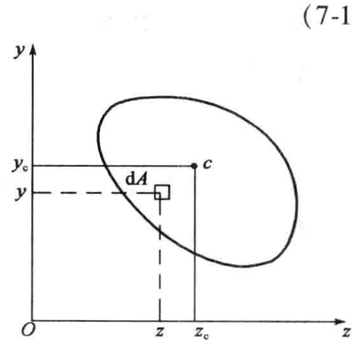


图　7-1

二、形心

由于均质薄板的重心与平面图形的形心有相同的坐标 z_c 和 y_c，则

$$A \cdot z_c = \int_A z\mathrm{d}A = S_y.$$

由此可得薄板重心的坐标 z_c 为

$$z_c = \frac{\int_A z\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_y}{A}.$$

同理有

$$y_c = \frac{S_z}{A}.$$

所以**形心坐标**为

$$z_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_z}{A} \tag{7-2}$$

或

$$S_y = Az_c, \quad S_z = Ay_c$$

推论 1 如果 y 轴通过形心(即 $z_c = 0$),则静矩 $S_y = 0$;同理,如果 z 轴通过形心(即 $y_c = 0$),则静矩 $S_z = 0$;反之也成立.

推论 2 如果 z 轴、y 轴均为图形的对称轴,则其交点即为图形形心;如果 y 轴为图形对称轴,则图形形心必在此轴上.

推论 3 如果已经计算出静矩,就可以确定形心的位置;反之,如果已知形心位置,就可以计算图形的静矩.

如一个平面图形是由几个简单平面图形组成,称为组合平面图形. 设第 i 块分图形的面积为 A_i,形心坐标为 y_{ci}, z_{ci},则其静矩和形心坐标分别为

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} A_i y_{ci}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i z_{ci}, \tag{7-3}$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}. \tag{7-4}$$

三、综合举例

例 7-1 试计算如图 7-2 所示矩形截面对 z 轴的静矩 S_z.

解 取平行于 z 轴的微面积 $\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$ 由公式(7-1)得

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^h y \cdot b\mathrm{d}y = b\frac{y^2}{2}\Big|_0^h = \frac{1}{2}bh^2.$$

例 7-2 求图 7-3 所示半圆形的 S_z, S_y 及形心位置.

解 由对称性,$y_c = 0, S_z = 0$. 现取平行于 y 轴的狭长条作为微面积 $\mathrm{d}A$,

$$\mathrm{d}A = 2y\mathrm{d}z = 2\sqrt{R^2 - z^2}\mathrm{d}z,$$

所以

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A = \int_0^R z \cdot 2\sqrt{R^2 - z^2}\mathrm{d}z = \frac{2}{3}R^3,$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{4R}{3\pi}.$$

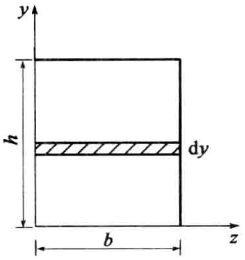


图　7-2

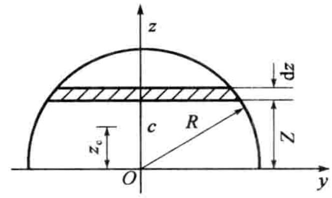


图　7-3

例 7-3　确定形心位置,如图 7-4 所示.

解　解法一:

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^{10} 120\mathrm{d}y + \int_{10}^{80} 10\mathrm{d}y = 1900\mathrm{mm}^2$$

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A = \int_0^{120} (10 \times z)\,\mathrm{d}z + \int_0^{10} (70 \times z)\,\mathrm{d}z = 75500\mathrm{mm}^3$$

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^{10} 120y\mathrm{d}y + \int_{10}^{80} 10y\mathrm{d}y = 37500\mathrm{mm}^3$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{37500}{1900} \approx 19.74\mathrm{mm}$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{75500}{1900} \approx 39.74\mathrm{mm}.$$

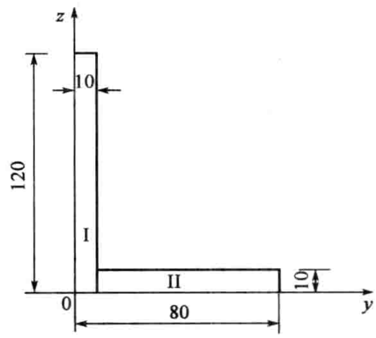


图　7-4

解法二:

将图形看作由两个矩形 I 和 II 组成,在图示坐标下每个矩形的面积及形心位置分别为

矩形 I:

$$A_1 = 120 \times 10 = 1200\mathrm{mm}^2$$

$$y_{c1} = \frac{10}{2} = 5\mathrm{mm}, \quad z_{c1} = \frac{120}{2} = 60\mathrm{mm}.$$

矩形 II:

$$A_2 = 70 \times 10 = 700\mathrm{mm}^2$$

$$y_{c2} = 10 + \frac{70}{2} = 45\mathrm{mm}, \quad z_{c2} = \frac{10}{2} = 5\mathrm{mm}.$$

整个图形形心 c 的坐标为

$$y_c = \frac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{1200 \times 5 + 700 \times 45}{1200 + 700} \approx 19.74\mathrm{mm},$$

$$z_c = \frac{A_1 z_{c1} + A_2 z_{c2}}{A_1 + A_2} = \frac{1200 \times 60 + 700 \times 5}{1200 + 700} \approx 39.74\mathrm{mm}.$$

第二节　惯性矩与惯性积、极惯性矩

一、惯性矩

平面图形对某坐标轴的2次矩,定义为**惯性矩(轴惯性矩)**,如图7-5所示.

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A, \quad I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{7-5}$$

其单位为长度的4次方,恒为正.

组合图形的惯性矩:设I_{yi},I_{zi}为分图形的惯性矩,则总图形对同一轴惯性矩为

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{yi}, \quad I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi} \tag{7-6}$$

例7-4　试计算图7-6所示矩形截面对其对称轴(形心轴)x和y的惯性矩.

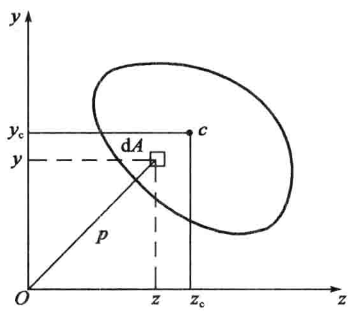


图　7-5

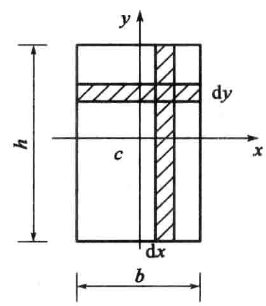


图　7-6

解　先计算截面对x轴的惯性矩I_x.取平行于x轴的狭长条作为面积元素,即$\mathrm{d}A = b\mathrm{d}y$,根据公式(7-5)的第二式可得

$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}.$$

同理在计算对y轴的惯性矩I_y时可以取$\mathrm{d}A = h\mathrm{d}x$(图7-6).根据公式(7-5)的第一式,可得

$$I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} hx^2 \mathrm{d}x = \frac{b^3 h}{12}.$$

二、极惯性矩

若以ρ表示微面积$\mathrm{d}A$到坐标原点O的距离,则定义图形对坐标原点O的极惯性矩为

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A. \tag{7-7}$$

因为$\rho^2 = y^2 + z^2$,所以极惯性矩与(轴)惯性矩有如下关系

$$I_\rho = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A (y^2 + z^2) \mathrm{d}A = I_y + I_z. \tag{7-8}$$

式(7-8)表明,图形对任意两个互相垂直轴的(轴)惯性矩之和,等于它对该两轴交点的极

惯性矩.

定义下式

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{7-9}$$

为图形对 y 轴和对 z 轴的**惯性半径**.

惯性矩的特征:

(1)截面图形的极惯性矩是对某一极点定义的;轴惯性矩是对某一坐标轴定义的.

(2)极惯性矩和轴惯性矩的单位均为长度的 4 次方.

(3)极惯性矩和轴惯性矩的数值均为恒大于零的正值.

三、惯性积

惯性积定义为

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A. \tag{7-10}$$

惯性积的特征:

(1)截面图形的惯性积是对相互垂直的某一对坐标轴定义的.

(2)惯性积的量纲为长度的 4 次方.

(3)惯性积的数值可正可负,也可能等于零. 若一对坐标轴中有一轴为截面图形的对称轴,则截面图形对该对坐标轴的惯性积必等于零. 但图形对某一对坐标轴的惯性积为零,该对坐标轴中不一定包含图形的对称轴.

例 7-5　求图 7-7 所示三角形图形的 I_y 及 I_{yz}.

解　取平行于 y 轴的狭长矩形,由于 $\mathrm{d}A = y \cdot \mathrm{d}z$,其中宽度 y 随 z 变化,$y = \frac{b}{h}z$,则

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_0^h \frac{b}{h} z^3 \mathrm{d}z = \frac{bh^3}{4}.$$

由 $I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A$ (如图 7-7 所示)可得

$$I_{yz} = \int_0^h z \frac{y}{2} y\mathrm{d}z = \frac{b^2h^2}{8}.$$

例 7-6　求如图 7-8 所示圆形截面的 I_y, I_z, I_{yz}, I_ρ.

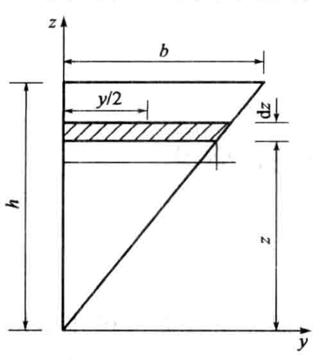


图　7-7

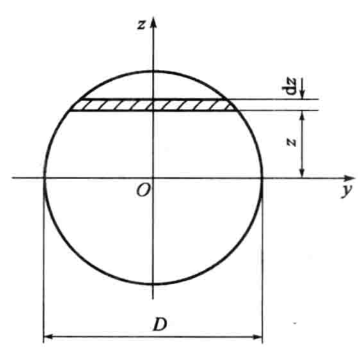


图　7-8

解　如图 7-8 所示取 dA,根据定义,

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} z^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - z^2}\mathrm{d}z = \frac{\pi D^4}{64},$$

由于轴对称性,则有

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64},$$

$$I_{yz} = 0.$$

由公式(7-8)有

$$I_\rho = I_y + I_z = \frac{\pi D^4}{32}.$$

对于空心圆截面,外径为 D,内径为 d,则

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4),$$

$$\alpha = \frac{d}{D},$$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$$

例 7-7　试确定组合图形(图 7-9)的形心.

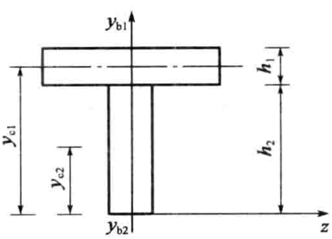


图　7-9

解　取对称轴. 形心位置与选之坐标无关.

组合板块 1:

$$A_1 = b_1 h_1 = 100 \times 20\mathrm{mm}^2,$$

$$y_{c1} = \frac{h_1}{2} + h_2 = 10 + 100 = 110\mathrm{mm}.$$

组合板块 2:

$$A_2 = b_2 h_2 = 20 \times 100\mathrm{mm}^2,$$

$$y_{c2} = \frac{h_2}{2} = \frac{100}{2} = 50\mathrm{mm}.$$

组合截面形心　　$y_c = \dfrac{\sum A_i y_{ci}}{\sum A_i} = \dfrac{A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}}{A_1 + A_2} = 80\mathrm{mm}.$

即形心位置为　　$y_c = 80\mathrm{mm},\quad z_c = 0.$

* 第三节　平行移轴和转轴公式

一、平行移轴公式

由于同一平面图形对于相互平行的两对直角坐标轴的惯性矩或惯性积并不相同,如果其中一对轴是图形的形心轴(y_c,z_c)时,如图 7-10 所示,可得到如下平行移轴公式:

$$\begin{cases} I_y = I_{yc} + a^2 A, \\ I_z = I_{zc} + b^2 A, \\ I_{yz} = I_{yczc} + abA. \end{cases} \tag{7-11}$$

简单证明之：$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_A (z_c + a)^2 \mathrm{d}A = \int_A z_c^2 \mathrm{d}A + 2a\int_A z_c \mathrm{d}A + a^2 \int_A \mathrm{d}A$.

其中 $\int_A z_c \mathrm{d}A$ 为图形对形心轴 y_c 的静矩，其值应等于零，则得

$$I_y = I_{yc} + a^2 A.$$

同理可证公式(7-11)中的其他两式.

此即关于图形对于平行轴惯性矩与惯性积之间关系的移轴定理. 其中，公式(7-11)表明：

(1)图形对任意轴的惯性矩，等于图形对于与该轴平行的形心轴的惯性矩，加上图形面积与两平行轴间距离平方的乘积.

(2)图形对于任意一对直角坐标轴的惯性积，等于图形对于平行于该坐标轴的一对通过形心的直角坐标轴的惯性积，加上图形面积与两对平行轴间距离的乘积.

(3)因为面积及 a^2，b^2 项恒为正，故自形心轴移至与之平行的任意轴，惯性矩总是增加的. a，b 为原坐标系原点在新坐标系中的坐标，故二者同号时为正，异号时为负. 所以移轴后惯性积有可能增加，也可能减少.

结论：同一平面内对所有相互平行的坐标轴的惯性矩，对形心轴的惯性矩最小. 在使用惯性积移轴公式时应注意 a，b 的正负号.

例 7-8　如图 7-11 所示，试求 $r = 1\mathrm{m}$ 的半圆形截面对于 x 轴的惯性矩，其中 x 轴与半圆形的底边平行，相距 1m.

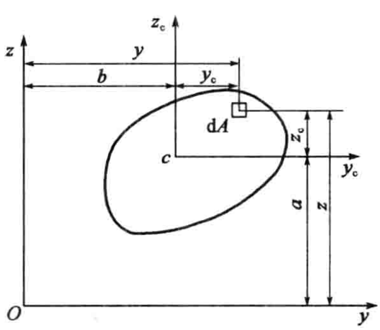


图　7-10

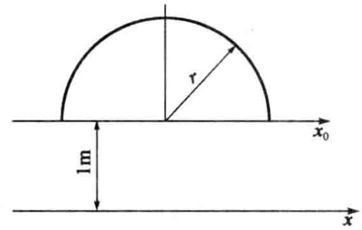


图　7-11

解　知半圆形截面对其底边的惯性矩是

$$\frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8},$$

用平行轴定理得截面对形心轴 x_0 的惯性矩

$$I_{yc} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8r^4}{9},$$

再用平行轴定理，得截面对 x 轴的惯性矩