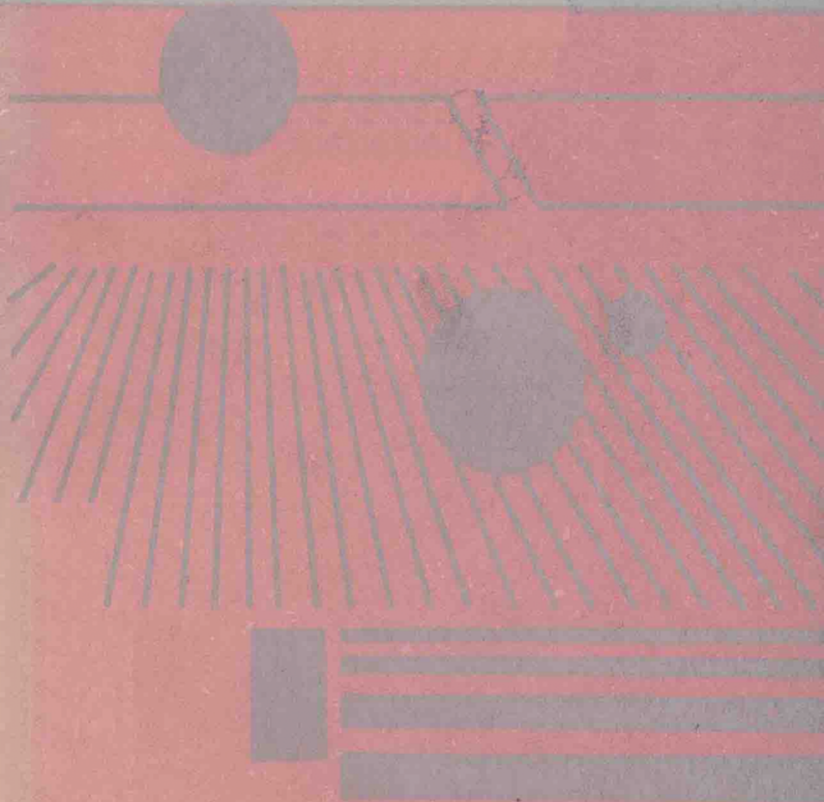
灰色数学引论

HSSXYL

吴和琴
岳常安
刘凤雷
杨志民
庞颜军
葛　琦



河北人民出版社

灰色数学引论

吴和琴　岳常安　刘凤雷　杨志民　庞颜军　葛琦　著

河北人民出版社

灰色数学引论

吴和琴　岳常安　刘风雷　杨志民　庞颜军　葛琦　著

河北人民出版社出版发行（石家庄市北马路45号）

邯郸日报印刷厂印刷

787×1092毫米 1/32　5.5印张　100,000字　1990年12月第1版

1990年12月第1次印刷　印数：1—1000　定价：3.00元

ISBN7—202—00850—5/O·1

序

吴和琴、岳常安、杨志民、刘风雷、庞颜军、葛琦同志所著"灰色数学引论"，是一本很有理论意义和理论价值的著作。灰色系统的量化需要有量化的根据、量化的关系、量化的基础，而本书正是从这一角度作了出色的研究。

作者首先将Cantor Set与Fuzzy Set 推广为广义集合。广义集合特征函数的多重性显示了灰的特征、性质与关系，从而自然地得到了灰集合。作者又将灰数看作是数量化的灰集合，从而将一般的概念型、信息型、层次型灰数等统一在一个新的框架内。在上述基础上还延拓出灰函数、灰极限、灰距离、灰概率、灰拓扑空间，并且分别研究了它们的性质与运算。

总之，通过上述研究，作者巧妙地定义了灰集。从而，一个Fuzzy集与一个普通集就自然地成为了灰集的特例。这表明作者在研究灰集中，在内涵方面下了功夫。一个灰集的一些性质的获得和性质的清晰度显示了工作的力度。

所以，本书对灰色数学的形成具有明显的价值。

华中理工大学教授、武汉灰色系统研究会理事长邓聚龙

1989年3月1日

前　言

《灰色数学引论》是一本研究灰量即不完整性信息量的专著。灰量起源于邓聚龙教授的“灰色系统理论”，“不完整信息量”起源于王光远教授的“结构软设计理论”，本质上是一致的。这种量的提出虽然始于上述理论，但是客观现实中是普遍存在的，在各个科技领域和社会生活中到处皆是，只是过去不曾被人们注意。

1987年《灰集合论初探》一文得到了邓聚龙教授的高度评价，1988年《灰数的抽象定义》得到王光远教授的肯定。这些对灰色数学的发展起到了有力的推动作用。

灰色数学研究工作的开展，得到了河北煤炭建筑工程学院各级领导的大力支持，在他们的支持下成立了学院“灰色数学研究室”；在市科协的支持下又成立了市“灰色数学研究所”，对灰色数学的发展起到了积极的推动作用。邯郸地区教育学院领导也给予了大力支持。

煤炭建筑工程学院科技处和学报编辑部各位同志，特别是学报负责同志对我们的工作都给以了很大的支持。

中共中央书记处农村经济政策研究室姬业成研究员，中科院郭官义研究员以及记者李冰泉同志对本书的编写都很关心和支持。

在本书的编著过程中，河北师范大学李思忠副教授和朱计生副教授审阅过本书的部分章节，并提出了宝贵的意见。

张宗敏、李国才、王清印、刘开第、陈金鹏、杨广林、梁惠深、贺冠军、武英川、徐杨、刘志诚、霍兴常、奚声俞、

周志仁、王英丽、雷国铭、关登君、王丽萍、李科的、傅国增、翟风海等同志对灰色数学的发展，以及本书的编写从不同角度给予了支持和帮助，有的直接参加了部分章节的编写工作。邯郸丛台区工艺美术挂毯厂，张秀惠、代艮环对本书的问世给予大力支持．在此，一并致以衷心的谢意。

著者

1989年4月1日

绪　言

灰色数学和其它数学一样，都是由于人们研究客观世界的需要而产生的。华中理工大学邓聚龙教授将客观现实中存在的部分已知部分未知的量称为灰量，并给予了形象性的描述，创立了灰色系统控制理论。但是怎样利用数学工具来刻划、表达灰量和灰量之间的关系呢？这是国内广大科技工作者迫切要求解决的问题之一。众所周知，建立在*Cantor*集合基础上的经典数学只能描述"非此即彼"的清晰量，以F*uzzy*集合为基础的模糊数学，虽能描述"亦此亦彼"的模糊量，但对于部分已知部分未知的灰量以及灰量不确知程度的描述，它们都是无能为力的。因此，要求产生建立在更高层次集合基础上的新的数学理论。我们建立在灰集合基础上的灰色数学或者说不完整性数学，正是为给出灰量（或不完整性信息量）以精确的刻划和表达。

哈尔滨工业大学王光远教授在其专著《结构软设计理论初探》中写道："目前人们已经认识到客观世界所提供的信息中还有另一种不确定性信息。这表现在有些事物本身，虽然既无随机性又无模糊性，客观上是一种确定性事物，但决策者纯粹由于主观的原因而对该事物认识不清，也就是说该事物对决策者只提供了一个不完整的信息。当然在决策中必须使用这种信息，就必须考虑它的不确定性，而不能把它作为确定性信息处理。可惜，现在对这种不完整性信息还没有适当的数学工具来表达和处理，亟待研究。"本书所述的灰色数学正是王光远教授指出的"亟待研究"的数学。按照王教

授的论述灰色数学也可以称之为“不完整性数学”，它与概率论、模糊数学可统称之为不确定性数学。因此，也可以说，灰色数学即是灰色系统理论的一部分，也是结构软设计理论的一部分。

目录

绪　言

第一章　广义集合

§1.1　广义集合的概念…………………………（1）
§1.2　广义集合的无矛盾性、独立性和完备性…（3）
§1.3　广义集合举例——模糊灰集……………（3）
§1.4　实广义集合……………………………（22）

第二章　灰数

§2.1　灰数的概念……………………………（35）
§2.2　有理灰数的运算和性质…………………（43）
§2.3　区间灰数的推广…………………………（46）
§2.4　邓氏灰数的推广…………………………（54）
§2.5　有理灰数的推广及其运算性质…………（60）
§2.6　灰方程…………………………………（68）

第三章　灰函数与灰极限

§3.1　经典灰集合……………………………（76）
§3.2　经典灰数………………………………（83）
§3.3　灰距离空间……………………………（98）
§3.4　灰函数………………………………（104）
§3.5　灰极限………………………………（107）

第四章　灰概率

§4.1　基本空间和灰事件………………………（131）
§4.2　灰概率的公理化体系……………………（132）
§4.3　灰概率的性质…………………………（134）
§4.4　灰概率和模糊概率、经典概率的关系…（140）

第五章　灰拓扑空间

§5.1　预备知识……………………………………（141）
§5.2　灰拓扑空间的概念…………………………（147）
§5.3　灰拓扑空间的紧致性………………………（152）
§5.4　灰拓扑空间的连通性………………………（154）

第一章　广义集合

§1.1　广义集合的概念

创立灰色数学的目的是构造出一种符号体系来准确地表达和研究灰量(或不完整性量)。对于部分已知部分未知的灰量描述，显然经典数学和模糊数学是不满足要求的。因此，我们将已有数学的基础——*Cantor*集合和*Fuzzy*集合加以拓广，在拓广之后的集合——广义集合的基础上建立一种新的数学，使它不但包含已有的数学，而且在其上能够构造出一种我们需要的体系。即灰色数学。

对于给定的一个论域U(集合)，无论它的*Cantor*子集还是F*uzzy*子集，都将由它的特征函数(或隶属函数)所确定。对于*Cantor*子集来说，特征函数的值域为$\{0,1\}$的子集，对于F*uzzy*子集来说，其值域为$[0,1]$的子集。我们若用V表示$\{0,1\}$或$[0,1]$时，我们会看出无论哪种子集都可以看做是定义域为集U、值域为集V的子集的函数，我们仅取它们这样的共性而定义广义子集。从而对原来集合概念进行推广时就会把任意函数关系都包含在集合概念的外延之中，这样我们自然会觉得推广是过大了，把不应该承认为集合的东西也都搞成集合了。因此，我们需要再保持一些集合的共性，来缩小拓广集合概念的外延。同时也使原来集合真的得到推广。基于上述想法，我们给出广义集合如下定义：

定义1.1.1　设U、V是两个*Cantor*集合，U到V的全部映射构成的集合

$F(U,V)=\{\mu \mid \mu$是U到V的映射$\}$的$Cantor$子集$T(\mu$ $\subseteq F(U,V)$具备下列条件时，则称$T(\mu)$的每个元素为U的一个广义子集合。

1. $T(\mu)$上定义了叫做并、交、补三种运算，分别记作$\cup$、$\cap$、$-$(或C)；

2. $T(\mu)$上的三种运算满足如下性质：

设A、B、C是$T(\mu)$的任意三个元素。

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A$；

$A\cap B=B\cap A$；

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3)$DeMergan$律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

(4)等幂律 $A\cup A=A$，

$A\cap A=A$；

(5)还原律 $\overline{\overline{A}}=A$。

从广义子集的定义中看出，对于我们熟知的$Cantor$集和F$uzzy$集来说，它们的运算除满足上述五个性质外，还满足分配律和0－1律，对于广义子集来说并不要求具备这两个性质。当我们把$\{0,1\}$或$[0.1]$看作是V时，我们便知$Cantor$集和F$uzzy$集都是广义子集。这就是说推广后的广义子集包含$Cantor$集合和F$uzzy$集合，即广义集合是$Cantor$集合和F$uzzy$集合的一种推广，$Cantor$集合和F$uzzy$集合是我们所定义的广义集合的特例。

§1.2 广义集合的无矛盾性、独立性和完备性

在数学中，对于一个公理体系都必须考虑它的无矛盾性、独立性和完备性，特别是无矛盾性。

无矛盾性 由广义集合的定义我们可以看出，*Cantor*集是它的一个特例，因此我们可以用任意一个*Cantor*集作为广义集合的一个实例。这就证明了广义集合的无矛盾性。

独立性 由于*Cant r*集是广义集合的特例，故由*Cantor*集的独立性即可推得广义集合的独立性。

完备性 广义集合的完备性有两种含义：(1)广义集合是*Cantor*集和F*uzzy*集的推广，这在前文已经阐明；(2)在广义集合的基础上能够建立起一种表示灰量(或不完整性量)的符号体系，这个将在后面各章中逐步完成。

注：关于灰色数学中的运算及有关符号习惯上都冠以⊗以区别于经典数学和模糊数学中的相应概念。例如灰数a写成⊗(a)，灰集合的(并)运算记作$\overset{\otimes}{\cup}$，这些仅是表示方法问题，不涉及其本质内容，因此本书中在不会引起混淆时省略其“⊗”用和经典数学中常用的记法，这样在书写中会省略不少符号。

§1.3 广义集合举例——模糊灰集

当我们把V取作包含在〔0，1〕内的所有闭区间构成的集

合时，可以构造出一个非常有用的并且可以表示灰量的广义集，此种特殊的广义集合将称之为模糊灰集，简称灰集。

1 模糊灰集（简称灰集）的定义及其表示法

我们知道，Cantor集只能表示“非此即彼”的清晰量，而Fuzzy集虽能表示“亦此亦彼”的模糊量，但对于客观实际中许多部分已知部分未知的灰量(或不完整性量)它们已无法表达和处理。这正是我们引入灰集的客观基础，或者说事实背景。

定义1.3.1 设U为论域(所研究事物的全体组成的Cantor集)，若$\forall u\in U$，$\exists\ \overline{\mu}_G(u)\in[0,1]$，$\underline{\mu}_G(u)\in[0,1]$且$\underline{\mu}_G(u)\leq\overline{\mu}_G(u)$，并有

$$\overline{\mu}_G:\quad U\longrightarrow[0,1],\ u\longmapsto\overline{\mu}_G(u);$$
$$\underline{\mu}_G:\quad U\longrightarrow[0,1],\ u\longmapsto\underline{\mu}_G(u);$$

则说$\overline{\mu}_G$和$\underline{\mu}_G$构成了U上的一个灰子集G，且称$\overline{\mu}_G$与$\underline{\mu}_G$分别为灰集G的上隶属函数和下隶属函数，称$\overline{\mu}_G(u)$与$\underline{\mu}_G(u)$分别为u对G的上隶属度和下集属度。

由灰子集的定义可看出，U的灰子集实质上就是定义在U上且取值在$[0,1]$中满足一定条件的函数对。

例1 设$U=R$(实数集)，a、$b\in R$ 令：

$$\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\overline{\in}[a,b];\end{cases}$$

$$\underline{\mu}_G(x)\equiv 0, \qquad x\in R$$

显然，$\overline{\mu}_G(x)$和$\underline{\mu}_G(x)$都是U到$[0,1]$上的映射，且$\underline{\mu}(x)\leq\overline{\mu}_G(x)$，所以它们确定了$U$上的一个灰子集$G$。这个灰子集正好是邓聚龙教授提出的信息型灰数，因此我们也可称之为邓氏灰集。

例2 设$U=\{a,b\}$，令

$$\overline{\mu}_G:\quad U\longrightarrow[0,1],$$
$$a\longmapsto 1,\ b\longmapsto 0.9;$$
$$\underline{\mu}_G:\quad U\longrightarrow[0,1],$$
$$a\longmapsto 0.8,\ b\longmapsto 0.5.$$

显然，它们确定了U上的一个灰子集G。

灰子集可用如下方法表示：

(1)向量表示法　设$U=\{a,b,\cdots\cdots\}$则

$$G=\{(\overline{\mu}_G(a),\underline{\mu}_G(a),\ a),(\overline{\mu}_G(b),\underline{\mu}_G(b),\ b),\cdots\}.$$

(2)分式表示法　设$U=\{a,b,\cdots\cdots\}$　则

$$G=(\overline{\mu}_G(a),\underline{\mu}_G(a))/a+(\overline{\mu}_G(b),\underline{\mu}_G(b))/b+\cdots).$$

这实质上是由$L.A\cdot Zadeh$关于F$uzzy$集的记法演变来的，每个分式的分子表示相对于U中某个元素的隶属度序对，“+”表示其总括，而不是一般的加法。

若U为一般的论域，我们可记作：

$$G=\int_U[\overline{\mu}_G(u),\underline{\mu}_G(u)/u]\qquad\forall u\in U$$

这里“$\int$”仅是一种记号，而不是积分号的意义。

(3)一般表示法

我们用$G_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}$表示以$\overline{\mu}(u)$、$\underline{\mu}(u)$为上下隶属函数的灰子集。

2.灰子集的基本运算

为简便起见，我们规定：

(i)若$\overline{\mu_G}(u)\equiv 1$，$\underline{\mu_G}(u)\equiv 1$　$u\in U$　则

$$G_{\underline{\mu}(u)}^{\overline{\mu}(u)}=G_1^1。$$

这时用论域U表示这个灰子集G，这里我们是把$\overline{\mu}(u)\equiv\underline{\mu}(u)\equiv 1$看作是论域$U$上的上下隶属函数，从而$U$也是$U$上的一个特殊的灰子集。

(ii)若$\overline{\mu_G}(u)\equiv 0$，$\underline{\mu_G}\equiv 0$　$u\in U$　则

$$G_{\underline{\mu}(u)}^{\overline{\mu}(u)}=G_0^0。$$

这时用$\varnothing$表示这个灰子集G，且称$\varnothing$为灰空集，从而灰空集也是U上的一个特殊的灰子集。

(1)包含与相等

定义1.3.2　设G_1、G_2是U的灰子集，若$\forall u\in U$，都有$\underline{\mu}_{G_1}(u)\geqslant\overline{\mu}_{G_2}(u)$，则称$G_1$包含$G_2$，记作　$G_1\supseteq G_2$。

如果$\overline{\mu}_{G_1}(u)=\overline{\mu}_{G_2}(u)$，$\underline{\mu}_{G_1}(u)=\underline{\mu}_{G_2}(u)$，则称$G_1$与$G_2$相等，记作$G_1=G_2$。

显然，包含关系具有如下性质：

(i)若G是U的灰子集，则$G\subseteq U$，且$\varnothing\subseteq G$。

这条性质说明U包含它的所有灰子集，任意灰子集包含空集。

(ii)反对称性

若$G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_1$，则$G_1=G_2$且

$\overline{\mu}_{G_1}(u)=\underline{\mu}_{G_1}(u)=\overline{\mu}_{G_2}(u)=\underline{\mu}_{G_2}(u)$。

从这里我们也可看出，对于任意灰集其自反性：$G\subseteq G$一般不成立，这是灰集与Cantor集、Fuzzy集的一个不同之处。

(iii)传递性

若$G_1\subseteq G_2$、$G_2\subseteq G_3$，则$G_1\subseteq G_3$

我们称定义1.3.2给出的包含关系为全包含(或绝对包含)，还可以定义其它包含关系。

命题1.3.1　若G是U的灰子集，则$G\subseteq U$。

证明　(略)

有了这个命题，今后对于U的任意的灰子集G，可以记作$G\subset U$或$G\subseteq U$。

(2)灰集的并、交、余运算

定义1.3.3　设$G_1\subset U$、$G_2\subset U$，$\forall u\in U$，我们定义$G_1\cup G_2$、$G_1\cap G_2$、G^c的隶属函数为：

$$\overline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u)\triangleq\overline{\mu}_{G_1}(u)\vee\overline{\mu}_{G_2}(u);$$

$$\underline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u)\triangleq\underline{\mu}_{G_1}(u)\vee\underline{\mu}_{G_2}(u);$$

$$\overline{\mu}_{G_1\cap G_2}(u)\triangleq\overline{\mu}_{G_1}(u)\wedge\overline{\mu}_{G_2}(u);$$